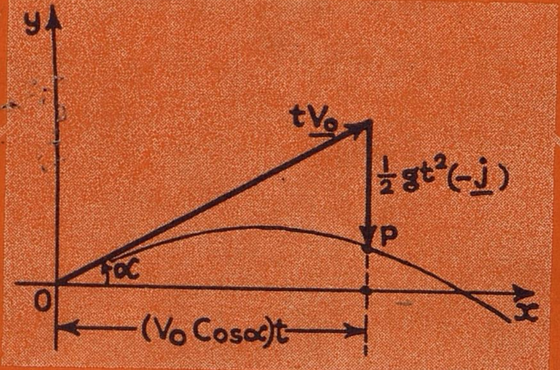
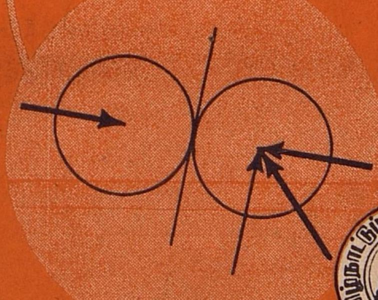
பொறியியல்சார் நிலை இயக்கவிசையியல்

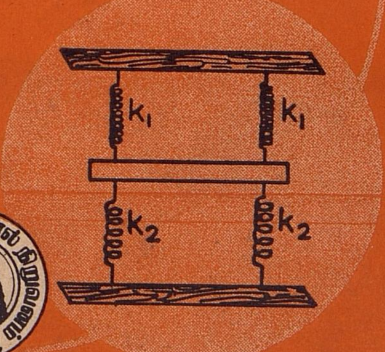
பகுதி - 2 : இயக்கவிசையியல்

(ENGINEERING MECHANICS
VOLUME - 2 : DYNAMICS)



சு. வைத்தியநாதன்





தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க. வெ.) வரிசை எண் — 615

பொறியியல்சார் நிலை இயக்க விசையியல்

பகுதி 2—இயக்கவிசையியல்

(திசையிப் பதிப்பு)

ஆசிரியர்

சு. வைத்தியநாதன், எம். ஏ., எம். எஸ்ஸி.,

துணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,

பொறியியற் கல்லூரி, கிண்டி,

சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—March, 1975

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 615

ENGINEERING MECHANICS
Part II — Dynamics (Vector edition)

S. VAIDYANATHAN

Price Rs. 16-55

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

KUMARAN PRESS,
298, Mint Street,
Madras-600001.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினைந்தாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பட்டப் படிப்பு வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவருகின்றனர். 1969 ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன் வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகமும் சென்னைப் பல்கலைக் கழகமும் ஆண்டு தோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், மெய்ப்பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டம் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூல நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'பொறியியல்சார் நிலை இயக்க விசையியல் பகுதி 2 — இயக்கவிசையியல் (திசையிப் பதிப்பு)' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 615 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 650 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப் படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக் கழகங்களிலும், கலையியற் பாடங்களையும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங்களையும், பயிலுகின்ற மாணவர்கள், அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளர வேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளரவேண்டும் என்பதுதான். 'எதிலும் தமிழ் எங்கும் தமிழ்' என்ற குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு, தமிழகத்து ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்ததாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

1. இயக்க இயல் (பகுதி-1) பக்கம்

2. திசையி நுண்கணித மூலக்கூறுகள்

3. இயக்க இயல் (பகுதி-2)

(துகளுக்கான வளைகோடு, நேர்கோட்டியக்க இயல்)

4. துகளின் விசையியல்
(வளைகோடு, நேர்கோட்டியக்கம்)

1. இயக்க இயல்

(Kinematics)

1·1. இயக்க இயலின் மூலகங்கள் (Elements of Kinematics)

விசைகள் பொருள் ஒன்றைத் தாக்குவதால் அவை (அ) அப் பொருளை ஓய்வு நிலையில் வைக்கலாம், அல்லது, (ஆ) அப் பொருளில் இயக்கத்தைத் தோற்றுவிக்கலாம், அல்லது (இ) அப் பொருள் முன்பு இருந்த இயக்கத்தை மாற்றலாம்.

விசைகளால் தாக்கப்பட்டுப் பொருள்கள் ஓய்வு நிலையிலிருக்குமாறு அமையும் அவ் விசைகளின் தாக்கத்தைப் பற்றி விவரித்துக் கூறும் நூல் நிலையியல் (Statics) என்றும், விசைகளின் தாக்கத்தால் பொருள்களில் இயக்கம் ஏற்படுவதை விவரித்துக் கூறும் நூல் இயக்க விசையியல் (Dynamics) என்றும் கொள்ளப்படும்.

இந் நூற்பகுதியில், ஒரு துகளின் (Particle) இயக்கத்தைப் பற்றியும், பிறகு ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் (Rigid body) இயக்கத்தைப்பற்றியும் கூறப்படும்.

பொதுவாக, இயக்க விசையியல், (அ) இயக்க இயல் (Kinematics), (ஆ) விசையியல் (Kinetics) என இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு விளக்கப்படும்.

துகள்கள், கட்டிறுக்கப் பொருள்கள் ஆகியவற்றில் இயக்கம் எக் காரணங்களால் விளைகின்றது என்று நோக்காமல், அவை இயங்கும் பல் வகையான பாதைகளின் வடிவமைப்பை (Geometry of motion) விவரிக்கும் பகுதியே **இயக்க இயலாகும்.**

இயக்க இயலின் கருத்துகளை வடிவகணித அமைப்பில் நன்கு அறிவோமாயின், இயக்கத்தை விளைவிக்கும் மூலக்கூறு

களுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்புகளையும், இயக்கத்தைப்பற்றியும் எளிதாக வெளிப்படுத்த இயலும்.

பொருள்களின் இயக்கத்திற்குக் காரணமான விசை, மற்றும் திறன், ஆற்றல் ஆகியவற்றை விவரிக்கும் பகுதியே விசையியலாகும்.

இயக்கம், அது நிகழ்வதற்குரிய காரணம் ஆகியவற்றைப்பற்றி அறிவிக்கும் அறிவுத்துறை **இயக்க விசையியல்** (Dynamics) எனப்படும்.

1·2. இயக்க விசையியலின் பிரிவுகள்

இயக்க விசையியலைக் கீழ்க்காணும் பிரிவுகளாகப் பிரித்து அறிதல் முறையாகும்.

(அ) ஒரு துகளுக்கு உரிய இயக்க விசையியல் (Dynamics of a Particle) : துகள் என்பது பொருண்மையோடு கூடிய கற்பனையால் உருவாக்கப்பட்ட பருமனற்ற புள்ளியாகும். இப் பிரிவில் துகளின் இயக்கம் விவரிக்கப்படும்.

(ஆ) துகள்களின் தொகுதிக்குரிய இயக்க விசையியல் (Dynamics of a System of Particles) : கட்டிறுக்கப் பொருள் (Rigid body), பாய்பொருள் (Fluid) ஆகியவற்றின் இயக்கத்திற்கு ஊன்றுகோலாக அமையும் தொடரக ஊடக இயக்கத்தை (Motion of continuous media) இப் பிரிவு விளக்கும்.

(இ) கட்டிறுக்கப் பொருளின் இயக்கவிசையியல் (Dynamics of a Rigid body) : கட்டிறுக்கப்பொருள் என்பது, அதன் பகுதிகள் ஒன்றுக்கொன்று மாறு நிலையிலமைந்து, பருமனுடன் பொருண்மையைப் பெற்ற பொருளைக் குறிக்கும்.

நிலையியக்க இயலில் (Mechanics) இப் பிரிவே மிகச்சிறப்புப் பெற்றதாகும்.

(ஈ) கட்டிறுக்கப் பொருள்களின் தொகுதிக்குரிய இயக்க விசையியல் (Dynamics of a System of Rigid bodies).

(உ) தொடரக உருவமாற்ற ஊடகத்திற்குரிய இயக்க விசையியல் (Dynamics of continuous deformable medium) : பாய்பொருள் இயக்கம் இப் பிரிவில் சிறப்புப்பெறும்.

இயக்க இயலின் கருத்துகளை நன்கு அறிவதற்குத் துகள் பெரிதும் இன்றியமையாத பங்கை மேற்கொள்கிறது. எனவே கற்பனையாகக் கருதப்படும் துகளுக்கும், பருப்பொருள் சார்ந்த (matter) பிரச்சினைகளில் உண்மையாகக் கண்ணுறும் கட்டிறுக்கப் பொருள்களுக்கும் உள்ள உறவு யாது என்பதைக் காணுதல் வேண்டும். பலப் பிரச்சினைகளில் ஒரு பொருளின் இயக்கத்தை ஆய்வுறும்போது அதன் பருமன், உருவம் என்பவை சிறப்பாகத் தேவைப்படுவதில்லை. ஆகவே, அப் பொருளின் இயக்கநிலையை அறிய அதன் நிறையை (mass)ப் பெற்ற ஒரு துகளின் நிலை அறிவிக்கும் எனக் கற்பனை செய்துகொள்வது முறையாகும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பாரவண்டியை, குன்றின்மேல் கடத்தப் பயன்படுத்தப்படும் இழுவிசையானது, வண்டியின் பருமன் உருவம் ஆகியவற்றைச் சார்ந்திராமல் (இயக்கத்தைத் தடைப் படுத்தும் காற்றின் எதிர்த்தாக்கம், உராய்வுவிசை, வண்டிச் சக்கரங்களில் நிகழும் சுழற்சிக்குரிய விளைவுகள் ஆகியவை புறக் கணிக்கப்படுவதாகக் கொள்ளும்போது) அதன் நிறையை மட்டுமே சார்ந்திருக்கிறது. எனவே, இவ்வித நிலைமைகளில், பாரவண்டியை, அதன் நிறைக்குச் சரிநிகரான நிறையையுடைய துகள் ஒன்றாகக் கருதி இழுவிசையைக் கணக்கிட முடிகிறது. அவ்வாறே ஒரு கோள் இயங்கும் பாதையை வரையறுக்க அக் கோளின் உருவத்தைக் காட்டிலும் அதன் நிறையே முக்கியத்துவம் பெறுவதால் இவ்விதக் கணக்குகளில் கோளை ஒரு துகளாகக் கொள்வது சிறப்புடைத்தாகும்.

1·3. இயக்கம் (Motion)

ஒரு பொருள் அல்லது துகள் நிலையான ஏதேனும் ஒரு பொருளைப்பொறுத்துத் தன் நிலையைத் தொடர்ந்து காலத்திற் கேற்றவாறு மாற்றிக் கொண்டேயிருந்தால், அது இயங்குகிறது என்று கூறப்படும்.

1·3-1. இயக்கப்பாதை (Trajectory; path of motion)

இயங்கும் துகளைக் குறிக்கும் புள்ளியின் அடுத்தடுத்த நிலைகளை இணைத்து முடிவாகக் கிடைக்கப்பெற்ற நிலைவரை அதன் இயக்கப் பாதையாகும்.

இயங்கும் புள்ளியின் நிலையை ஏதேனுமொரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில், ஆயத்தொலை வடிவ கணித முறையில் செவ்வக அச்சுத் தொலைவுகளால் குறிக்கப்பட்டு துகள் இயங்கும் பாதையின் சமன்பாட்டைப் பெற்று, அதன் வாயிலாக அப் பாதையின் பண்புகளை அறியலாம்.

1·4. நிலையான குறிப்பிட்டச்சு அமைப்பும் இயங்கும் சுட்டமைப்பும் (Fixed frame of reference and rotating frame of reference)

பரந்த வெளியில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும் நிலையான மூன்று அச்சுகளை வரையறுத்துக் கொண்டு ஒரு பொருளின் அடுத்தடுத்த நிலையை கணப்பொழுது நேர இடைவெளிகளில் (at every instant of time) கண்டு, அப் பொருளின் இயக்கத்தை அறிய முடியும். இவ்விதம் குறிப்பிட்டச்சு அமைப்பு தனிச்சுட்டமைப்பு (Absolute) அல்லது சடத்துவ சுட்டமைப்பு (inertial) அல்லது நியூட்டனின் சுட்டமைப்பு (Newton frames of references) என வழங்கப்படும். இந்த அமைப்பில் பொருளின் இயக்கம் தனி இயக்கமாகக் கருதப்படும்.

நடைமுறையில் ஒரு குறிப்பிட்டச்சு அமைப்பைப் பரந்த வெளியில் நிறுவுதல் எளிதன்று. புவியை நிலையாகக் கொண்ட ஆயத்தொலை அமைப்பு, புவியுடன் இயங்குவதால் பரந்தவெளியில் அது ஒரு நிலையான சுட்டமைப்பாகாது. இவ்வித அமைப்பில் பொருளின் இயக்கம் புவியைச் சார்ந்ததாகக் கருதப்படுமே தவிர தனி இயக்கமாகாது. பொருளின் தனி இயக்கத்திற்கும், புவியை நிலையாகக் கொண்டு இயங்கும் பொருளின் சார்ந்த இயக்கத்திற்கும் உள்ள வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதாக இல்லாமையால், பொறியியல் கணிப்புகளில் புவியை நிலையாகக் கொண்ட குறிப்பிட்டச்சு அமைப்பே வழக்கத்தில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

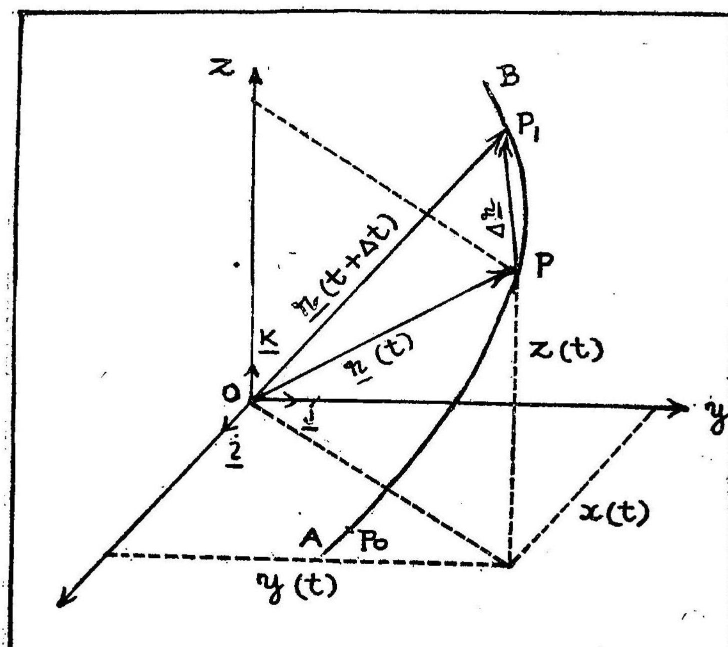
வானிலையைச் சார்ந்த ஆய்வுகளில் ஞாயிற்றைச் (Sun) சுட்டமைப்புப் புள்ளியாகக் கொண்டு பரந்த வெளியில் அச்சுகளை மூன்று நிலையான விண்மீன்களை (Fixed stars) நோக்கி எடுக்கப்படும். அவ்வித ஆயத்தொலை அமைப்பு ஞாயிற்றுச் சுட்டமைப்பு எனப்படும்.

இயங்கிடும் பொருள் ஒன்றின் அச்சுத் தொலைவுகள் அல்லது இயங்கிடும் பொருள் ஒன்றன்மேல் எடுக்கும் யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் அச்சுத் தொலைவுகள் மெட்ரிக் முறையில் செண்டிமீட்டர் அல்லது மீட்டர் அலகுகளில் அளக்கப்படும். தொடர்ச்சியாக மாறுபடிகிற நேரத்தைச் சார்பிலா மாறியாகக் (independent vaiable) கொண்டு இயங்கிடும் புள்ளியின் அச்சுத் தொலைவுகள் நேரத்தைச் சார்ந்த மாறிகளாகக் கருதப்படும். பொதுவாகத் தொடக்க நேரம் பூச்சியமாகக் கொள்ளப்படும். நேரம் ஓர் எண் கணியமாகும். அது விநாடிகளில் அளவிடப்படும்.

இயக்க இயல் முழுவதும் பகுமுறை வரைகணிதத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளது. எனினும் திசையி முறையைப் பின்பற்றி துகளின் இயக்கத்தை அறிவிப்பது வசதியாக உள்ளது.

1·5. துகள் பாதையின் சமன்பாடு (Equation of the path of a particle)

துகள் ஒன்று பரந்த வெளியில் படம் (1·1)-ல் காட்டியவாறு இயங்குவதாகக் கொள்க. வெவ்வேறு நேரங்களில் பரந்தவெளியில் துகள் வெவ்வேறு இடங்களில் அமையும் துகள் அடுத்தடுத்து உறைவிடம் கொள்ளும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும்போது *AB*



படம் 1·1

என்னும் இடநேர வளைகோட்டைப் பெறலாம். இதுவே துகளின் வீசுப்பாதை (Trajectory) யாகும். துகளின் பாதையும், அத் துகள் இருக்கும் இடமும் எல்லா நேரத்திலும் அறிவோமாயின் அதன் இயக்கம் முற்றிலும் வரையறுக்கப்படும்.

பொதுவாகத் துகளின் இயக்கத்தை விவரிப்பதில் இரு முறைகள் கையாளப்படும்.

முதல் முறை (திசையி முறை)

இது திசையி முறையாகும். படம் (1·1)-ல் O என்னும் சுட்டமைப்புப் புள்ளியில் OX, OY, OZ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானதும் நிலையானதுமான அச்சுகளாகும். இவற்றின் திசைகளை $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ என்னும் ஓரலகு திசையிகள் வரையறுக்கட்டும்.

துகள் இயங்கும் AB என்னும் வளைவுப்பாதையில் ஏதேனும் t என்னும் நேரத்தில் அது வீற்றிருக்கும் P என்னும் இடத்தை $\underline{OP} = \underline{r}(t)$ என்னும் நிலைத்திசையி (Position Vector) வரையறுக்கிறது. இந் நிலைத்திசையி ஒரு மாறிலியன்று. நேரத்தைக் குறிக்கும் t என்னும் மாறி தொடர் மாறியாதலால் $\underline{r}(t)$ என்னும் திசையியும் பொதுவாகத் தொடர்ச்சியான திசையியாகும். குறிப்பாக நேரமானது Δt என்னும் யாதாமொரு மிகச்சிறிய நேர அளவு மாற்றத்தைப் பெறும்போது துகளானது Pயிலிருந்து P' என்னும் இடத்திற்கு Δt நேரத்தில் செல்வதாகும். எனவே $(t + \Delta t)$ என்னும் நேரத்தில் துகள் P' என்னும் புள்ளியில் இருக்கத் தக்கது. அப் புள்ளிக்குரிய நிலையித்திசையி $\underline{OP'} = \underline{r}(t + \Delta t)$ ஆகும். படம் 1·1-ல் $\underline{PP'}$ என்பது Δt நேரத்தில் துகளில் ஏற்பட்ட இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிக்கிறது. $\underline{PP'} = \Delta \underline{r}$ எனக் கொண்டால் திசையி முக்கோண விதிப்படி,

$$\underline{PP'} = \underline{OP'} - \underline{OP},$$

அதாவது, $\Delta \underline{r} = \underline{r}(t + \Delta t) - \underline{r}(t)$ ஆகும்.

மேலும் $\Delta \underline{r}$ என்னும் திசையியிக்கு ஏற்றதான எண் மதிப்பு $\Delta r = |\Delta \underline{r}|$ ஆனது, Δt என்னும் மிகச்சிறிய அளவுக்கு உகந்ததான யாதாமொரு (arbitrary) சிறிய மதிப்பளவாகும்.

t என்னும் மாறியைத் துணை அலகாகக் (parameter) கருதத் துகள் இயங்கும் பாதை

$\underline{r} = \underline{r}(t)$ என்னும் துணையலகு சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

மற்றும் x, y, z என்பவை P என்னும் புள்ளியின் அச்சுத் தொலைவுகளைக் குறிப்பதால்,

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} \text{ என்றுரும்.}$$

நேரத்தைச் சார்ந்து துகளின் இருப்பிடம் பரந்த வெளியில் மாறக்கூடியதால் x, y, z என்னும் அச்சுத்தொலைவுகளும் t என்னும் துணை அலகைச் சார்ந்துள்ளன,

ஆகவே t என்னும் நேரத்தில் துகள் P என்னுமிடத்தில் அமைவதால் வெளிப்படையாக

$$\underline{r}(t) = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j} + z(t)\,\underline{k}$$

என்னும் சமன்பாடும், துகள் செல்லும் பாதையை வரையறுக்கும் சமன்பாடாகும்.

இங்கு $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்பவை நிலையான ஓரலகு திசையிகளைக் குறிப்பதால், துகள் இயங்கும் பாதையை

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

என்னும் துணையலகு சமன்பாடுகளும் வரையறுக்கின்றன.

இச் சமன்பாடுகளிலிருந்து t-ஐ விடுவிக்க

$$f(x, y, z) = 0$$

என்னும் சமன்பாட்டைப் பெறலாம். இச் சமன்பாடும் துகள் இயங்கும் பாதையை வரையறுப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

எல்லா நேரங்களிலும் $z(t) = 0$ எனில், துகள் இயங்கும் பாதை (x, y) என்னும் தளத்திலமைந்து

$$f(x, y) = 0$$

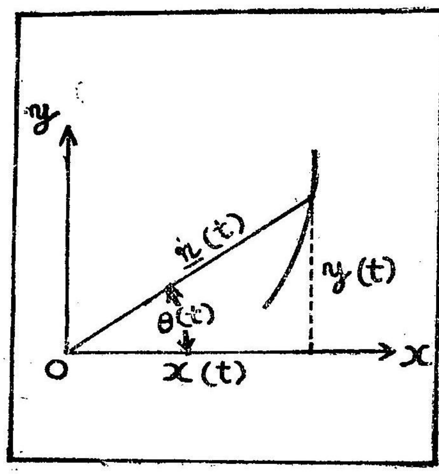
என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

குறிப்பாக, துகள் இயங்கும் பாதை ஒரு நேர்கோடாகும் எனில், அது ஒரு நேர்கோட்டியக்கத்தைப் (rectilinear motion) பெற்றுள்ளதெனப்படும்.

ஒரு தளத்தில் துகள் இயங்குவதாகில் கோணக்கூறுகளைப் (Polar Coordinates) பயன்படுத்தியும் நகரும் புள்ளியின் நிலைமையை வரையறுக்கலாம்.

படம் (1·2)-ல் குறிப்பிட்டுள்ளவாறு, P என்னும் நகரும் புள்ளியின் கோணக்கூறுகளான ஆரைத்தொலைவு $r = r(t)$, ஆரைக் கோணம் $\theta = \theta(t)$ என்பவை துகளின் நிலையை வரையறுக்கின்றன.

முனைப்புள்ளி (Pole) O-விலிருந்து கிடையாக அமையும் கோட்டை Ox என்றும், செங்குத்தாக அமையும் கோட்டை Oy என்றும் கொள்ளும்போது



படம் 1·2

$$x(t) = r(t)\cos\theta$$

$$y(t) = r(t)\sin\theta$$

என்னும் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. t என்னும் துணை அலகை விடுவிக்க, தளத்தில் ஒரு வளை வரையிலியங்கும் பாதையை

$$F(r, \theta) = 0$$

என்னும் சமன்பாடு வரையறுக்கும்.

இரண்டாவது முறை

சில சமயங்களில் பருப்பொருள் சார்ந்த நிபந்தனைகளால் (physical conditions) துகளின் இயக்கம் கட்டுப்படுத்தப்பட்டு அதன் பாதை முன்பே அறிவிக்கப்படும்.

படம் (1·3)-ல் காட்டியவாறு துகள் இயங்கும் AB என்னும் பாதையை

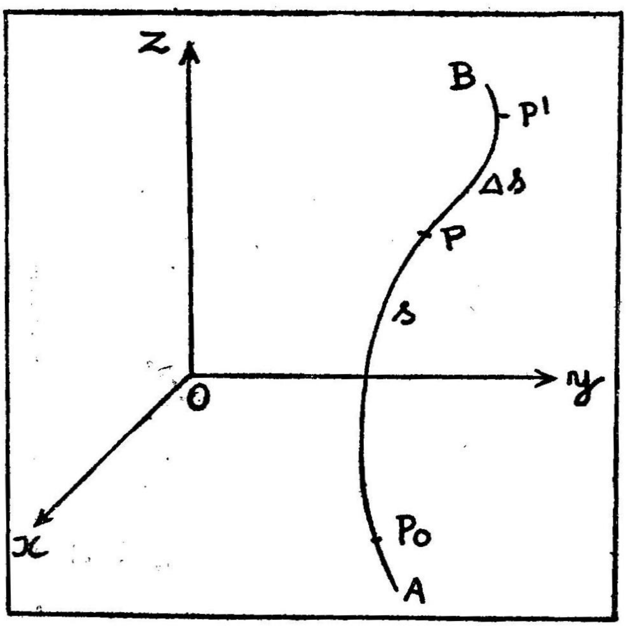
$$f(x, y, z) = 0$$

என்னும் சமன்பாடு வரையறுப்பதாகக் கொள்க.

P_0 என்னும் புள்ளி வளைவரையில் $t = 0$ என்னும் நேரத்தில் ஒரு நிலையான புள்ளியைக் குறிக்கட்டும். பாதையில் P என்னும் புள்ளியை, $\widehat{P_0 P} = s$ என்னும் வில் t நேரத்தில் வரையறுக்கும். P_0, P என்னும் புள்ளிகளுக்கு இடையிலுள்ள பாதையின் தொலைவு நேரத்திற்கேற்றவாறு மாறுபடுவதால்,

$$s = F(t)$$

எனக் கொள்ளலாம். எனவே $F(t)$ என்னும் சார்பலனும், பாதையை வரையறுக்கும் $f(x, y, z) = 0$ என்னும் சமன்பாடும்



படம் 1·3

தெரியும்போது வளைவரையில் துகளின் இருப்பிடத்தை எந்நேரத்திலும் வரையறுக்க முடியும்.

இவ்விரு முறைகளும் துகளின் இயக்க இயலில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

1·6 மாதிரிக் கணக்குகள்

1·6-1. t என்னும் நேரத்தில் துகள் ஒன்று அமையும் புள்ளியின் நிலைத்திசையி, (x, y, z) - என்னும் குத்தச்சுகளைப் பெற்ற சுட்டமைப்பில்,

$\underline{r}(t) = (t^2 + 3)\,\underline{i} + (1 + t^2)\,\underline{j} + 0 \cdot \underline{k}$ செ.மீ. என்றிருக்குமெனில் துகள் இயங்கும் பாதையையும், $t = 3$ விநடி என்றுள்ள போது துகளின் இருப்பிடத்தையும் காண்க.

இங்கு $x(t) = 3 + t^2$

$y(t) = 1 + t^2$

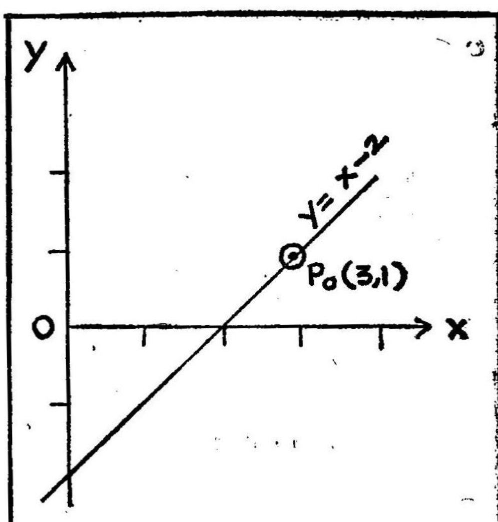
$z(t) = 0$ ஆகும்.

t என்னும் துணை அலகை விடுவிக்க,

$$x - 3 = y - 1$$

அல்லது $y = x - 2$

என்னும் சமன்பாடு கிடைக்கும். இதுவே துகளின் பாதையை



படம் 1 4

வரையறுக்கும். (x, y) தளத்தில் இப்பாதை ஒரு நேர்கோடாகும். அது படம் $(1 \cdot 4)$-ல் காட்டியுள்ளவாறு உள்ளது.

நேரம் $t = 0$ என்று உள்ளபோது நேர்கோட்டில் துகள், ஆயத்தொலைகள் $x = 3$ $y = 1$ என்பவைகளைக் கொண்ட P_0 என்னும் புள்ளியில் அமைகிறது.

நேரம் $t = 3$ விநாடி என்னும்போது துகள் பாதையில் அமையும் புள்ளிக்கு உரிய ஆயத்தொலைகள் முறையே $x = 3 + 9 = 12$ செ.மீ., $y = 1 + 9 = 10$ செ.மீ. ஆகும்.

1·6-2. t என்னும் நேரத்தில் துகள் இயங்கும் பாதையிலமையும் புள்ளியின் நிலைத்திசையி

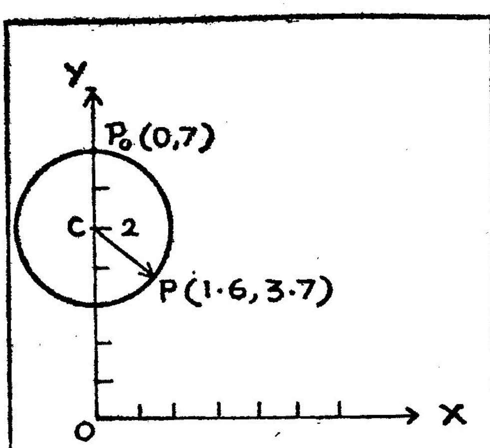
$$\underline{r}(t) = 2 \sin 10t\ \underline{i} + (5 + 2 \cos 10t)\underline{j}\ \text{செ.மீ.}$$

என்றால், துகள் இயங்கும் வளைவரையின் சமன்பாட்டையும் நேரம் $t = 4$ விநாடி என்றுள்ளபோது துகள் இருக்குமிடத்தையும் காண்க.

இங்கு $x(t) = 2 \sin 10t$

$y(t) = 5 + 2 \cos 10t$

நெடுக்கை, கிடக்கைகளில் கோணம் ஆரையனில் (Radians) குறிக்கப்படும்.



படம் 1 5

t என்னும் துணை அலகை விடுவிக்க

$$x^2 + (y - 5)^2 = 4(\sin^2 10t + \cos^2 10t)$$
$$= 4$$

என்னும் சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இச் சமன்பாடு (x, y)-தளத்தில் $c\,(0, 5)$ என்னும் புள்ளியை மையமாகவும் $r = 2$ செ.மீ. என்னும் நீளத்தை ஆரையாகவும் (radius) கொண்ட வட்டத்தைப் படம் (1·5)-ல் காட்டியவாறு வரையறுக்கிறது.

நேரம் $t = 0$ என்றுள்ளபோது துகள் $x = 0$, $y = 7$ என்னும் தொலைவுகளுடைய P_0 என்னும் புள்ளியில் அமையும்.

நேரம் $t = 4$ வி. ஆக உள்ளபோது துகள் $x = 2 \sin 40$, $y = 5 + 2 \cos 40$ என்னும் புள்ளியிலிருக்கும். மேற்கூறிய சமன்பாடுகளில் நெடுக்கை, கிடக்கைகளில் உள்ள 40 என்பது, 40 ஆரையன்களைக் குறிக்குமாதலால் ஆரையன் = 57.3° என்ற வரையறுப்புப்படி,

$$\begin{aligned} x &= 2 \sin (40 \times 57.3°) & y &= 5 + 2 \cos (40 \times 57.3°) \\ &= 2 \sin 2292° & &= 5 + 2 \cos 2292° \\ &= 2 \sin 132° & &= 5 + 2 \cos 132° \\ &= 2 \sin 48° & &= 5 - 2 \cos 48° \\ &= 1.5862 & &= 5 - 1.3382 \\ &= 1.6 \text{ செ.மீ.} & &= 3.7 \text{ செ.மீ.} \end{aligned}$$

ஆகும்.

எனவே துகள் வட்டத்தில் P ($x = 1.6$ செ.மீ., $y = 3.7$ செ.மீ.) என்னும் புள்ளியில், $t = 4$ வி என்னும் நேரத்தில் அமையும்.

மேலும் $\sin pt = \sin (pt + 2\pi) = \sin p\left(t + \dfrac{2\pi}{p}\right)$

$$\cos pt = \cos (pt + 2\pi) = \cos p\left(t + \frac{2\pi}{p}\right)$$

என்றுவதால், துகள் P என்னும் புள்ளியை மறுபடியும் அடைவதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் $t = \dfrac{2\pi}{p}$ வினாடிகளாகும். இவ்வித இயக்கமானது காலவட்ட ஒழுங்குபடைத்த இயக்கம் (Periodic motion) எனப்படும். துகள் அவ்வித இயங்குபாதையில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை அடுத்தடுத்து அடைவதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் இடைவெளிநேரம் காலவட்ட நேரம் (Periodic time) எனப்படும். அது $T = \dfrac{2\pi}{p}$ வி. ஆகும்.

இங்கு $T = \dfrac{2\pi}{p} = \dfrac{2\pi}{10} = \dfrac{2 \times 3{\cdot}1416}{10} = 0{\cdot}628$ வி. ஆகும்.

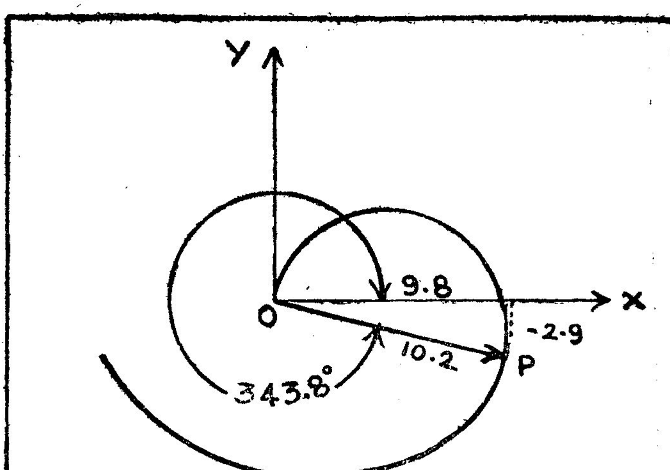
1·6-3. $r=0.51t$ மீ $\theta=0{\cdot}3t$ என்னும் கோண தூரக் கூறு களைப் பெற்ற துகளின் இயங்கும் பாதையைக் காண்க. $t=20$ வி என்னும் நேரத்தில் துகளின் இருப்பிடத்தையும் காண்க.

$$r = 0.51t = 0.51 \times \frac{\theta}{\cdot 3} = 1.7\theta$$

$t = 20$ வி $\theta = 0.3 \times 20 = 6$ ஆரையன் $= 6 \times 57.3°$
$= 343.8°$
$r = 1.7\theta = 1.7 \times 6 = 10.24$ மீ

$x = r\cos\theta$	$y = r\sin\theta$
$= 10.24 \cos 343.8°$	$= 10.2 \sin 343.8°$
$= 10.2 \cos 16.8°$	$= -10.2 \sin 16.8°$
$= 10.2 \times 0.9573$	$= -10.2 \times 0.289$
$= 9.7645$ மீ	$= -2.9478$ மீ

$t = 20$ வி. - என்னும் நேரத்தில், துகளின் இருப்பிடத்தை, படம் (1·6)-ல், P என்னும் புள்ளி குறிக்கிறது.



படம் 1·6

1·6-4. $\underline{r}(t)=a\cos wt\ \underline{i} + a\sin wt\ \underline{j} + ut\ \underline{k}$ செ.மீ என்னும் நிலைத்திசையியைக் கொண்ட துகள் ஒன்றின் இயங்கு வரையைக்

காண்க. (இங்கு a, w, u என்பவை மாறிலிகள்; நேரம் வினடியில் அளவிடப்படும்)

$a = 3 \quad w = 2 \quad u = 1 \quad t = \pi$ வி என்றால் துகளின் இருப்பிடத்தையும் காண்க.

$$x = a \cos wt; \quad y = a \sin wt; \quad z = ut$$

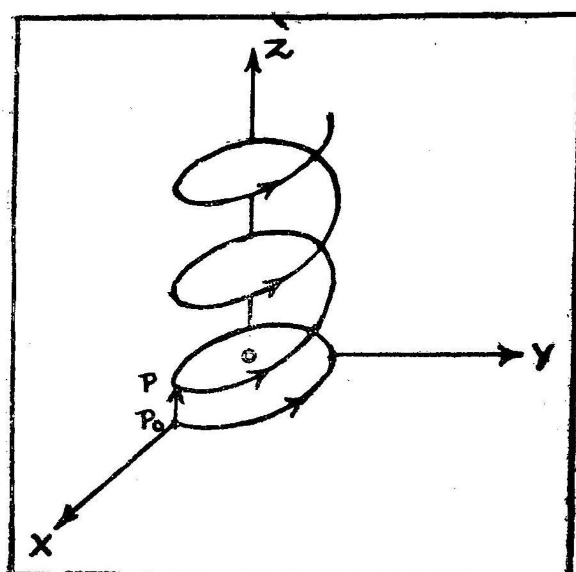
$$\therefore \quad t = \frac{z}{u}$$

$$\therefore \quad x = a \cos\left(w \frac{z}{u}\right); \quad y = a \sin\left(\frac{wz}{u}\right)$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 = a^2; \quad t = \frac{z}{u} \text{ ஆகும்.}$$

$a = 3 \quad w = 2 \quad u = 1$ என்றால்

$x = 3 \cos 2z; \quad y = 3 \sin 2z \quad z = \pi$ ஆகும்.



படம் 1.7

$P\,(x = 3 \cos 2z, \;\; y = 3 \sin 2z, \;\; z = \pi)$ என்னும் புள்ளி படம் (1.7)-ல் காட்டியவாறு ஒரு வட்ட விரிப்புச் சுருளியை (Spiral) வரையறுக்கும்.

$t = \pi$ என்றுள்ளபோது $x=3 \cos 2\pi=3$, $y=3 \sin 2\pi=0$ $z=\pi$ ஆகும். அதாவது $x = 3$, $y = 0$, $z = \pi$ என்னும் அச்சுத் தொலைவுகளையுடைய P என்னும் புள்ளியில் படம் (1.7)-ல் காட்டியுள்ளவாறு, துகள் உள்ளது.

1·7 பயிற்சி

1·7-1. துகள் ஒன்று இயங்கும் பாதையை $\underline{r}(t) = (t^2 + 4)\underline{i} + 2t\,\underline{j}$ என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுப்பதாகில் பாதையின் சமன்பாட்டையும், நேரம் $t = 2$ வி என்றுள்ளபோது பாதையில் துகள் இருக்குமிடத்தையும் வரையறுக்க.

[விடை : $y^2 = 4(x-4)$; $t = 2$, துகள் (8, 4) செ.மீ. என்னும் புள்ளியில் இருக்கும்]

1·7-2. பின்வரும் நிலைத்திசையிகளைக் கொண்ட புள்ளிகளின் இயங்கு வரைகளைக் காண்க :

(i) $\underline{r}(t) = t^2\,\underline{i} + (t - 2t^2)\,\underline{j}$

[விடை : $4x^2 + y^2 + 4xy - x = 0$]

(ii) $\underline{r}(t) = (2 + 2\cos t)\,\underline{i} + (3 + \sqrt{3}\sin t)\,\underline{j}$

[விடை : $3x^2 + 4y^2 - 2x - 24y + 36 = 0$]

(iii) $\underline{r}(t) = 2t^2\,\underline{i} + 4t\,\underline{j} + 8\,\underline{k}$ [விடை : $y^2=4x, z=8$]

(iv) $\underline{r}(t) = 4\sin t\,\underline{i} + 4\cos t\,\underline{j} + t^2\,\underline{k}$

(நேரம் t வினாடியாக உள்ளபோது நெடுக்கை, கிடக்கைகளில் t என்பதை ஆரையனாகக் கொள்க)

(விடை : $x = y\tan\sqrt{z}$)

(v) $\underline{r}(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j} + t\,\underline{k}$ (விடை : $y=x\tan z$)

(vi) $\underline{r}(t) = 4t^2\,\underline{i} + 6t\,\underline{j}$ (விடை : $y^2 = 9x$)

1·7-3. துகள் இயங்கும் பாதையை $\underline{r}(t) = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j} + z(t)\,\underline{k}$ என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கிறது. பின்வரும் நிலைமைகளில் துகளின் பாதையையும், நேரம் $t = 3$ வி உள்ளபோது துகளின் இருப்பிடத்தையும் காண்க. தொலைவு செ.மீ.-ல் அளவிடப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்க.

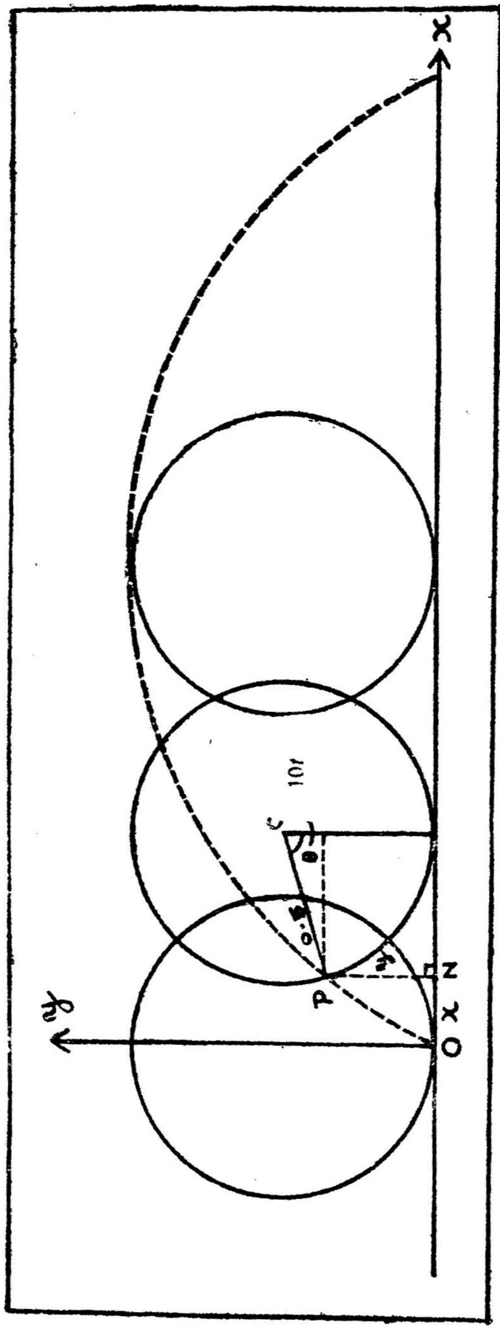
உட்பிரிவு	$x(t)$	$y(t)$	$z(t)$	விடை
(i)	$5t^2+4$	$2t^3+3$	0	$2x-5y+7=0$; (49, 21, 0) செ.மீ.
(ii)	$3t^2-1{\cdot}5t$	$2t^2-t$	0	$2x-3y=0$; (22·5, 15, 0) செ.மீ.
(iii)	$2\cos t^2$	0	$3\sin t^2$	$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{3}\right)^2=1$; (−1·83, 0, 1·24) செ.மீ.
(iv)	0	$\sin t$	$\cos 2t$	$z=1{\cdot}2y^2$; (0, 0·1401, 0·9603) செ.மீ.
(v)	$3+2t$	$2+t$	$1+3t$	$\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{3}=t$; (3, 5, 10) செ.மீ.
(vi)	$2+4\cos 2t$	$4\sin 2t$	0	$(x-2)^2+y^2=16$; (6·84, 1·116, 0)
(vii)	0	$4+3\cos 2t$	$5+2\sin 3t$	$\frac{(y-4)^2}{9}+\frac{(z-5)^2}{4}=1$.

1·7-4. (1·7-3)-வது கணக்கில் எந்தெந்த உட்பிரிவுகள் காலவட்ட ஒழுங்குடைய இயக்கங்களைப் பெற்றுள்ளன எனக் காண்க. இயக்கங்களுக்கு உரிய காலவட்ட நேரத்தையும் காண்க.

(விடை : உட்பிரிவுகள் (vi), (vii); $T = 3{\cdot}1416$ வி; $T = 2{\cdot}0942$ வி)

1·7-5. அளவு திட்டத்திற்குகந்தவாறு $\underline{r}(t) = 2\cos 2t\,\underline{i} + 3\sin t\,\underline{j}$ என்னும் நிலைத்திசையியுடைய துகள் இயங்கும் பாதையைக் காண்க. துகள் y அச்சைக் கடக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

(விடை : $4y^2 + 9x - 18 = 0$; $\frac{\pi}{4}$ வி)



படம் 18

1·7-6 படம் (1·8)-ல் காட்டியுள்ளவாறு 1 மீ விட்டமுள்ள நீராவி இயந்திரச் சக்கரத்தின் பரிதியிலுள்ள P என்னும் புள்ளி இயங்கும் பாதையை, நீராவி இயந்திரம் 5மீ/வி என்னும் வேகத்தில் செல்வதாகவும், $t = 0$ என்னும் நேரத்தில் P என்னும் புள்ளி ஆதிப்புள்ளியில் (Origin) இருப்பதாகவும் கொண்டு, வரையறுக்க.

விடை : $x = (5t - 0.5 \sin 10\, t)$ மீ,

$y = (0.5 - 0.5 \cos 10t)$ மீ.

1·7-7. 400 மீ உயரத்தில் பரந்து செல்லும் விமானத்திலிருந்து எறியப்பட்ட குண்டு ஒன்று, $\underline{r}\,(t) = 100t\,\underline{i} + 8t^2\,\underline{j}$ மீ என்னும் பாதையில் இயங்குகிறது. குண்டு எறியப்பட்ட புள்ளியைத் துவக்கப் புள்ளியாகவும், y அச்சைக் கீழ்நோக்கியத் திசையிலெடுத்தும்,

(i) குண்டின் இயங்கு வழிப்பாதை,

(ii) குண்டு நிலத்தை அடைவதற்கு உரியநேரம்,

(iii) குண்டு கிடையாகக் கடக்கும் தொலைவு, ஆகியவற்றைக் காண்க.

விடை : (i) $y = \dfrac{x^2}{1250}$; (ii) 81·17 வி; (iii) 8117 மீ.)

2. திசையி நுண்கணித மூலக்கூறுகள்

(Elements of vector calculus)

2·1. நேரத்தைக் குறித்து திசையியை வகையிடல் (Differentiation of vector with respect to time)

எண் கணியங்களனைத்தும் மாறும் இயல்பைப் பெற்ற எண் மதிப்பு அளவுகளாகும். ஆனால் திசையுடன் கூடிய எண் கணியங்களே திசையிகளாகும்.

எண்கணியங்களைப் பொருத்த மட்டில் நேரத்தைச் சார்ந்து ஏதேனும் அளவிடும் தன்மை ஒவ்வொன்றிலும் அவை மாறும் இயல்பைப் பெற்றுள்ளன. எனவே அவ்வித அளவிடும் தன்மையைப்பெற்ற கணியத்தை நேரத்தின் சார்பலனாகக் கருதலாம். எடுத்துக் காட்டாக $f(t)$ என்பது t என்னும் தொடர்மாறியின் சார்பலனைக் குறிக்கட்டும் t யின் வேறுபாட்டுக்கு ஏற்றவாறு சார்பலன் $f(t)$-யிலும் மாறுபாடுகள் நிகழக் கூடுமாதலால், நேரத்தைத் தழுவி, $f(t)$ என்னும் எண் கணியத்தின் வகைக்கெழுவை (Derivative) வரையறுக்க முடியும். வகைக்கெழு வரையறையின் படி,

$$\frac{d\,f(t)}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \text{ ஆகும்.}$$

$\frac{d\,f(t)}{dt}$ யும், t யில் மற்றொரு சார்பலனாக இருக்குமாதலால் இதற்கும் மற்றொரு முறை வகையீடு காணமுடியும். இவ்விதச் செய்கையை தொடர்ந்து செய்வோமாயின் t-ஐக்குறித்து, $f(t)$-யின் அடுத்தடுத்த வகைக்கெழுக்களைத் தீர்மானிக்க முடியும்.

ஆனால் திசையி என்பது ''எண்மதிப்பு'', ''திசை'' என்னும் இரண்டையும் பெற்றுள்ளதால், நேரமாறுபாடு, திசையி எண் எண்மதிப்பில் அல்லது திசையில் அல்லது இவ்விரண்டில் மாறு

பாட்டை உண்டு பண்ணக்கூடும். இவ்வித மாறும் இயல்பைப் பெற்ற திசையியை $\underline{F}(t)$ என்னும் சார்பலன் தெரிவிக்கட்டும். நேரத்தைக் குறித்து $\underline{F}(t)$ என்னும் திசையியின் வகைக்கெழு மரபு வழிவரையறையின்படி எண்கணியத்தின் வகைக்கெழுவுக்கு ஒத்துள்ள அமைப்பைப் பின்வருமாறு பெறக்கூடும்.

$$\frac{d\underline{F}}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{\underline{F}(t+\Delta t) - \underline{F}(t)}{\Delta t} \right]$$

Δt என்னும் அளவுள்ள இடைவெளி நேரத்தில், திசையி $\underline{F}$-ன் திசையில் மாறுபாடு இல்லை எனில் திசையி-இன் வகைக்கெழு அதன் எண்கணியத்தின் வகைக்கெழுவிற்கு சமனாகும். ஆனால் $\underline{F}$-ன் "எண் மதிப்பு" "திசை" ஆகியவற்றில் நேரத்தைக் குறித்து மாறுபாடுகள் நிகழும்போது t-ஐக் குறித்து, $\underline{F}$ன் வகைக்கெழு மற்றொரு திசையியாக அமைகிறது. எனவே. திசை மாறுபாட்டால் திசையி-இன் வகைக்கெழு எண் கணியத்தின் வகைக்கெழுவிற்கு வேறுபட்டிருக்கிறது என்பது தெளிவாகும்.

மேலும் $\frac{d\underline{F}}{dt}$ என்பதும் t-ஐச்சார்ந்துள்ள திசையியாவதால் $\frac{d\underline{F}}{dt}$யின் வகைக்கெழுவையும் வரையறுக்க முடியும். அவ்வித இரண்டாவது வகைக்கெழு உள்ளதானால் அது $\frac{d^2\underline{F}}{dt^2}$ என்று குறிக்கப்படும். அவ்வாறே திசையி-இன் அடுத்தடுத்த வகைக் கெழுக்களையும் வரையறுக்கமுடியும்.

2·2 திசையிகளுக்குரிய வகையிடல் விதிகள் (Differentiation rules for vectors)

2·2-1. $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ என்பவை t என்னும் மாறியைச் சார்ந்த இரு திசையிகளானால், அவற்றின் கூடுதலுக்குரிய வகைக்கெழுவைப் பின்வருமாறு அடையலாம்.

$$\frac{d}{dt}(\underline{F}_1 + \underline{F}_2)$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{\underline{F}_1(t+\Delta t) + \underline{F}_2(t+\Delta t) - \underline{F}_1(t) - \underline{F}_2(t)}{\Delta t} \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{F_1}(t+\Delta t) - \underline{F_1}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{F_2}(t+\Delta t) - \underline{F_2}(t)}{\Delta t}$$

(இங்கு "எல்லை" = lim)

$$= \frac{d\underline{F_1}}{dt} + \frac{d\underline{F_2}}{dt}$$

அவ்வாறே,

$$\frac{d}{dt}\left[\underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3} + \dots \dots \underline{F_n}\right] = \frac{d\underline{F_1}}{dt} + \frac{d\underline{F_2}}{dt} + \frac{d\underline{F_3}}{dt} + \dots \frac{d\underline{F_n}}{dt}$$

அதாவது,

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{Fi}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\underline{Fi}}{dt}$$

திசையி வகைக்கெழுவின் பகிர்வுகள்

$\underline{F}(t)$ என்பது t மாறிசார்ந்த ஒரு திசையிச் சார்பலனுக்க. $\underline{i}$ $\underline{j}$, $\underline{k}$ என்பவை குறிப்பிட்ட x, y, z அச்சுக்களில் மாறுத ஓரலகுத் திசையிகளைக் குறிக்கட்டும். $\underline{F}(t)$ யின் பகிர்வுகளை $\underline{Fx}$, $\underline{Fy}$, $\underline{Fz}$ எனக் கொள்க.

அப்போது $\underline{F} = \underline{Fx} + \underline{Fy} + Fz$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{d\underline{F}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\underline{i}(Fx+\Delta Fx) + \underline{j}(Fy+\Delta Fy) + k(Fz+\Delta Fz) - \underline{i}\,Fx - \underline{i}\,Fy - \underline{i}\,Fz}{\Delta t}\right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\underline{i}\frac{\Delta Fx}{\Delta t} + \underline{j}\frac{\Delta Fy}{\Delta t} + \underline{k}\frac{\Delta Fz}{\Delta t}\right]$$

$$= \underline{i}\frac{dFx}{dt} + \underline{j}\frac{dFy}{dt} + \underline{k}\frac{dFz}{dt}$$

2·2-2. $f(t)$, $F(t)$ என்பவை முறையே t-மாறி சார்ந்த எண் கணியம், திசையி ஆகியவற்றைக் குறிக்கட்டும். இங்கு t என்பது ஓர் எண்ணி (Scalar) ஆகும்.

f, $\underline{F}$ ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனின் வகைக்கெழுவைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

$$\frac{d}{dt}(f\underline{F}) = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{(f+\Delta f)(\underline{F}+\Delta \underline{F}) - f\underline{F}}{\Delta t}\right]$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{\Delta f}{\Delta t}\underline{F} + f\frac{\Delta \underline{F}}{\Delta t} + \frac{\Delta f}{\Delta t}\frac{\Delta \underline{F}}{\Delta t}\Delta t\right]$$

$$= \frac{df}{dt}\underline{F} + f\frac{d\underline{F}}{dt} + \frac{df}{dt}\frac{d\underline{F}}{dt} \times 0$$

$$= \frac{df}{dt}\underline{F} + f\frac{d\underline{F}}{dt}$$

2·2-3. இரு திசையிகளின் எண்ணிப்பெருக்கி, திசையிப்பெருக்கி (புள்ளிப்பெருக்கி, குறுக்குப்பெருக்கி) ஆகியவற்றின் வகைக்கெழுவைக் காணுதல்.

$\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ என்பவை t மாறி சார்ந்த இரு திசையிகளைக் குறிக்குமெனில்,

(i) $\dfrac{d}{dt}(\underline{F}_1 \cdot \underline{F}_2)$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{(\underline{F}_1 + \Delta \underline{F}_1)\cdot(\underline{F}_2 + \Delta \underline{F}_2) - \underline{F}_1 \cdot \underline{F}_2}{\Delta t}\right]$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \left[\underline{F}_1 \cdot \frac{\Delta \underline{F}_2}{\Delta t} + \frac{\Delta \underline{F}_1}{\Delta t}\cdot \underline{F}_2 - \frac{\Delta \underline{F}_1}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta \underline{F}_2}{\Delta t}\cdot \Delta t\right]$$

$$= \underline{F}_1 \cdot \frac{d\underline{F}_2}{dt} + \frac{d\underline{F}_1}{dt}\cdot \underline{F}_2 + \frac{d\underline{F}_1}{dt}\cdot\frac{d\underline{F}_2}{dt}(0)$$

$$= \underline{F}_1 \cdot \frac{d\underline{F}_2}{dt} + \frac{d\underline{F}_1}{dt}\cdot \underline{F}_2$$

ஆகும்.

(ii) $\dfrac{d}{dt}(\underline{F}_1 \wedge \underline{F}_2)$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{(\underline{F}_1 + \Delta \underline{F}_1)\wedge(\underline{F}_2 + \Delta \underline{F}_2) - (\underline{F}_1 \wedge \underline{F}_2)}{\Delta t}\right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\underline{F}_1 \wedge \frac{\Delta \underline{F}_2}{\Delta t} + \frac{\Delta \underline{F}_1}{\Delta t} \wedge \underline{F}_2 + \frac{\Delta \underline{F}_1}{\Delta t} \wedge \frac{\Delta \underline{F}_2}{\Delta t} \Delta t \right]$$

(இங்கு $\lim$ என்பது மூலத்தில் "எல்லை" என அச்சிடப்பட்டுள்ளது.)

$$= \underline{F}_1 \wedge \frac{d\underline{F}_2}{dt} + \frac{d\underline{F}_1}{dt} \wedge \underline{F}_2 + \frac{d\underline{F}_1}{dt} \wedge \frac{d\underline{F}_2}{dt}(0)$$

$$= \underline{F}_1 \wedge \frac{d\underline{F}_2}{dt} + \frac{d\underline{F}_1}{dt} \wedge \underline{F}_2$$

ஆகும்.

2·2-4. எண்ணி முப்பெருக்கி, திசையி முப்பெருக்கி ஆகியவற்றின்வகைக்கெழுவைக் காணுதல்.

$\underline{F}_1, \underline{F}_2, \underline{F}_3$ என்பவை t மாறி சார்ந்த திசையிகளாகுக.

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{F}_1 \cdot (\underline{F}_2 \wedge \underline{F}_3)\right) = \underline{F}_1 \cdot \frac{d}{dt}\left(\underline{F}_2 \wedge \underline{F}_3\right) + \frac{d\underline{F}_1}{dt} \cdot \left(\underline{F}_2 \wedge \underline{F}_3\right)$$

$$= \underline{F}_1 \cdot \left(\frac{d\underline{F}_2}{dt} \wedge \underline{F}_3 + \underline{F}_2 \wedge \frac{d\underline{F}_3}{dt}\right) + \frac{d\underline{F}_1}{dt} \cdot \left(\underline{F}_2 \wedge \underline{F}_3\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{F}_1 \wedge (\underline{F}_2 \wedge \underline{F}_3)\right) = \frac{d\underline{F}_1}{dt} \wedge \left(\underline{F}_2 \wedge \underline{F}_3\right) + \underline{F}_1 \wedge \frac{d}{dt}\left(\underline{F}_2 \wedge \underline{F}_3\right)$$

$$= \frac{d\underline{F}_1}{dt} \wedge \left(\underline{F}_2 \wedge \underline{F}_3\right) + \underline{F}_1 \wedge \left(\frac{d\underline{F}_2}{dt} \wedge \underline{F}_3 + \underline{F}_2 \wedge \frac{d\underline{F}_3}{dt}\right)$$

$$= \frac{d\underline{F}_1}{dt} \wedge \left(\underline{F}_2 \wedge \underline{F}_3\right) + \left(\underline{F}_1 \wedge \frac{d\underline{F}_2}{dt} \wedge \underline{F}_3\right) + \left(\underline{F}_1 \wedge \underline{F}_2 \wedge \frac{d\underline{F}_3}{dt}\right)$$

எனவே திசையிகளின் பெருக்கற்பலன்களின் வகைக்கெழுக்கள், சாதாரண நுண்கணிதமுறையைக் கணியங்களுக்குப் பயன் படுத்தப்படும் வகைக்கு ஒத்துள்ளது. ஆனால் திசையிப் பெருக்கிகளில் உள்ள காரணிகளின் வரிசை முறையை மாற்றாமல் பேண வேண்டுமென்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

2·3. முக்கிய முடிவுகள் (Special Conclusions)

திசையி-க்கு எண்மதிப்பும் திசையும் உண்டு. இப்பகுதியின் புதிய கருத்துக்களை விளக்கிட திசையி வகைக்கெழுவின் இயல்புகளைக் கீழ்க்காணும் வகைகளில் நோக்கலாம்.

(1) திசைமாறாதிருக்கும் திசையி

(2) எண்மதிப்பு மாறாதிருக்கும் திசையி

(1) ஒரேதிசையை நோக்கியமைந்தும் மாறும் இயல்பைப் பெற்ற ஒரு திசையியை $\underline{F} = f\,\underline{e}$ என $\underline{e}$ என்றும் மாறாத ஓரலகுத்திசையி இன் வாயிலாக அறிவிக்கலாம்.

$$\therefore \quad \Delta \underline{F} = \Delta (f\underline{e}) = (f + \Delta t)\underline{e} - f\underline{e} = \Delta t\,\underline{e}$$

$$\therefore \quad \frac{d\underline{F}}{dt} = \frac{df}{dt}\underline{e}$$

எனவே $\underline{F}$ என்னும் திசையி ஒரே திசையை நோக்கி அமையுமெனில் $\frac{d\underline{F}}{dt}$ ஆனது F க்கு இணையாக இருக்கத்தக்கது.

(2) எண்மதிப்பு மாறாத திசையி ஒன்றை

$$\underline{R} = a\,\underline{L}$$

என அறிவிக்கலாம். இங்கு a என்பது ஒரு மாறிலி. $\underline{L}$ என்பது மாறும் திசையைப் பெற்ற ஓரலகுத் திசையியாகும்.

a என்பது மாறிலியாதலால்

$$\frac{d}{dt}(\underline{R} \cdot R) = \frac{d}{dt}\,(a\,\underline{L} \cdot a\,\underline{L}) = \frac{d}{dt}\,(a^2) = 0$$

ஆகும். மேலும்,

$$\frac{d}{dt}\,(\underline{R} \cdot \underline{R}) = \frac{d\underline{R}}{dt} \cdot R + \underline{R} \cdot \frac{d\underline{R}}{dt} = 2\frac{d\underline{R}}{dt} \cdot R$$

(எண்ணிப்பெருக்கி மாற்று விதியைக் கடைபிடிப்பதால்)

எனவே இவ்விரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\frac{d\underline{R}}{dt}\cdot\underline{R} = 0$$

என்பது புலனாகும்.

அதாவது எண்மதிப்பு மாறிலியாகவுள்ள $\underline{R}$ என்னும் திசையியும் அதன் வகைக்கெழுவான $\frac{d\underline{R}}{dt}$ என்னும் திசையியும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும்.

[குறிப்பு: $\underline{R} = a\,\underline{L}$ என்றுவதால் $\underline{R}$ என்னும் திசையி-இன் நுனிப்புள்ளி a ஆரையுள்ள கோளத்தின் மேற்பரப்பில் அமையும். $\underline{L}$-திசை மாறக் கூடியதாகையால், $\underline{R}$-ன் நுனிப்புள்ளி கோளத்தின் மேற்பரப்பில் ஒரு வளைவுப்பாதையில் இயங்கக்கூடும். எனவே பாதையில் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு அப்புள்ளி வழியே செல்லும் கோணத்தின் ஆரைக்குச் செங்குத்தாக அமையும். அதாவது $\underline{R}$, $\frac{d\underline{R}}{dt}$ என்னும் திசையிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைகின்றன.]

2·4 மாதிரிக் கணக்குகள்

2·4-1. $10t^2\,\underline{i} - 16t\,\underline{j} + 16\,\underline{k}$ என்பது $\underline{F}(t)$ என்னும் திசையியைக் குறிப்பதாகில், $20t^2\,\underline{F}(t)$ என்னும் திசையின் t மாறியைக் குறித்து, வகைக்கெழுவை இருவகைகளில் கணித்துச் சரி பார்க்க.

முதல் வகை :—

$$A = 20t^2\,\underline{F}(t) \text{ ஆகுக}$$

$$\therefore\ \frac{dA}{dt} = 20\,\frac{d}{dt}\left(t^2\,\underline{F}(t)\right)$$

$$= 20\left[\frac{d}{dt}(At^2)\,\underline{F}(t) + t^2\frac{d}{dt}\left(\underline{F}(t)\right)\right]$$

$$= 20\,[2t\,(10t^2\,\underline{i} - 16t\,j + 16\,\underline{k})$$

$$+\ t^2\frac{d}{dt}\,(10t^2\,\underline{i} - 16t\,\underline{j} + 16\,\underline{k})]$$

$$= 20\,[20t^3\,\underline{i} - 32t^2\,\underline{j} + 32t\,\underline{k})$$
$$+ t^2\,(20t^2\,\underline{i} - 16\,\underline{i})$$
$$= 20\,[40t^3\,\underline{i} - 48t^2\,\underline{j} + 32t\,\underline{k}]$$

இரண்டாவது வகை :—

$$\underline{A} = 20t^2\,F(t)$$
$$= 20t^2\,(10t^2\,\underline{i} - 16t\,\underline{j} + 16\,\underline{k})$$
$$= 20\,(10t^4\,\underline{i} - 16t^3\,\underline{j} + 16t\,\underline{k})$$
$$\frac{d\underline{A}}{dt} = 20\,[40t^3\,\underline{i} - 48t^2\,\underline{j} + 32t\,\underline{k}]$$

எனவே இருவகைகளிலும் வகைக்கெழுவின் மதிப்புக்கள் சமமாக உள்ளன.

2·4-2. $\underline{A} = 10t^2\,\underline{i} - 16t\,\underline{j} + 16\,\underline{k}$

$\underline{B} = 8\,\underline{i} + 6\,\underline{j}$

ஆனால்,

$\frac{d}{dt}(\underline{A}\,.\,\underline{B})$, $\frac{d}{dt}(\underline{A} \wedge \underline{B})$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$\frac{d}{dt}(\underline{A}\,.\,\underline{B}) = \frac{d\underline{A}}{dt}\,.\,\underline{B} + \underline{A}\,.\,\frac{d\underline{B}}{dt}$$
$$= \frac{d}{dt}(10t^2\,\underline{i} - 16t\,\underline{j} + 16\underline{k})\,.\,(8\,\underline{i} + 6\,\underline{j})$$
$$+ (10t^2\,\underline{i} - 16t\,\underline{j} + 16\,\underline{k})\,.\,\frac{d}{dt}(8\,\underline{i} + 6\,\underline{j})$$
$$= (20t\,\underline{i} - 16\,\underline{j})\,.\,(8\,\underline{i} + 6\,\underline{j}) + 0$$
$$= 60t - 96$$

மேலும்,

$$\underline{A}\,.\,\underline{B} = (10t^2\,\underline{i} - 16t\,\underline{j} - 16\,\underline{k})\ (8\,\underline{i} + 6\,\underline{j})$$
$$= 30t^2 - 96t$$
$$\therefore\ \frac{d}{dt}(\underline{A}\,.\,\underline{B}) = \frac{d}{dt}(30t^2 - 96)$$
$$= 60t - 96$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{A} \wedge \underline{B}) = \frac{d\underline{A}}{dt} \wedge \underline{B} + \underline{A} \wedge \frac{d\underline{B}}{dt}$$

$$= (20t\,\underline{i} - 16\,\underline{j}) \wedge (3\,\underline{i} + 6\,\underline{j})$$

$$+ \underline{A} \wedge \frac{d}{dt}(3\,\underline{i} + 6\,\underline{j})$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 20t & -16 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (120t + 48)\,\underline{k}$$

அல்லது $\underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 10t^2 & -16t & 16 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

$$= -96\,\underline{i} + 48\,\underline{j} + (60t^2 + 48t)\,\underline{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{A} \wedge \underline{B}) = (120t + 48)\,\underline{k}$$

2.4-3. கீழ்க்காணும் திசையிகள் நேரத்தைச் சார்ந்தவை.

$$\underline{A}(t) = (2t^3 + 5)\,\underline{i} - 10t\,\underline{j}$$

$$\underline{B}(t) = 5t\,\underline{i} + 3t^2\,\underline{k}$$

(i) இவ்விரு திசையிகளின் கூடுதலுக்குரிய வகைக்கெழு யாது?

(ii) இவ்விரு திசையிகளின் எண்ணிப்பெருக்கி, திசையிப் பெருக்கி ஆகியவற்றின் வகைக்கெழுக்களையும் காண்க.

$$\underline{A} = (2t^3 + 5t)\,\underline{i} - 10t\,\underline{j}$$

$$\underline{B} = 5t\,\underline{i} + 3t^2\,\underline{k}$$

$$\underline{A} + \underline{B} = (2t^3 + 10t)\,\underline{i} - 10t\,\underline{j} + 3t^2\,\underline{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{A} + \underline{B}) = (6t^2 + 10)\,\underline{i} - 10\,\underline{j} + 6t\,\underline{k}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (2t^3 + 5t)\,5t = 5\,(2t^4 + 5t^2)$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{A} \cdot \underline{B}) = 5\,(8t^3 + 10t) = 10t\,(4t^2 + 5)$$

$$\underline{A} \wedge \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2t^3+5t & -10t & 0 \\ 5t & 0 & 3t^2 \end{vmatrix}$$

$$= 30t^3\, i + (60t^5 + 16t^3)\underline{j} + 50t^2\, \underline{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{A} \wedge \underline{B}) = 90t^2\, \underline{i} + (300t^4 + 45t^2)\, \underline{j} + 100t\, \underline{k}$$

2.4.4 L, M என்பவை (x, y)-தளத்தில்

$L = 1 \mid \underline{\theta}$, $M = 1 \mid \underline{\theta} + \frac{\pi}{2}$ என்று வரையறுக்கப்பட்ட ஓரலகுத்திசையிகள். ஒவ்வொன்றையும் $\underline{i}$, $\underline{j}$ ஓரலகுத்திசையிகளின் பகிர்வுகளாக அமைத்து, $\frac{dL}{dt} = \dot{\theta}\, M$ எனவும், $\frac{dM}{dt} = -\dot{\theta}\, \underline{L}$ எனவும் நிறுவுக.

(இங்கு $\dot{\theta}$ என்பது கோண வீதமாகும்)

$$\underline{L} = 1 \mid \underline{\theta} = 1 \cdot \cos\theta\, \underline{i} + 1 \cdot \sin\theta\, \underline{j}$$

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = -\sin\theta\ \dot{\theta}\, \underline{i} + \cos\dot{\theta}\, \underline{i}$$

$$= \dot{\theta}\, (-\sin\theta\, \underline{i} + \cos\theta\, \underline{j})$$

$$= \dot{\theta}\ \underline{M}$$

$$\underline{M} = 1 \mid \underline{\theta} + \frac{\pi}{2}$$

$$= \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\underline{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\, \underline{j}\right)$$

$$= -\sin\theta\, \underline{i} + \cos\theta\, \underline{j}$$

$$\frac{dM}{dt} = -\cos\dot{\theta}\, \underline{i} - \sin\theta\ \dot{\theta}\, \underline{j}$$

$$= -\dot{\theta}\ (\cos\theta\, \underline{i} + \sin\theta\, \underline{j})$$

$$= -\dot{\theta}\ \underline{L}$$

2·5 பயிற்சிகள்

2·5-1. $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$-அமைப்பில் கீழ்க்காணும் திசையிச்சார்பலன்களின், t என்னும் மாறிக்குரிய, வகைக்கெழுக்களைக் காண்க.

(i) $\underline{F} = (t\,\underline{j}) \cdot t^3 (\underline{i} + \underline{j})$ [விடை : $4t^3$]

(ii) $\underline{F} = (\sin t\,\underline{i}) \cdot (\cos t\,\underline{j})$ [விடை : 0]

(iii) $\underline{F} = (2t\,\underline{j} - t^3\,\underline{k}) \cdot (t^2\,\underline{i} + 2t\,\underline{f})$ [விடை: $8t$]

2·5-2. $\underline{P} = 5t^2\,\underline{i} + t\,\underline{j} - t^3\,\underline{k}$, $\underline{Q} = \sin t\,\underline{i} - \cos t\,\underline{j}$ எனில் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $\dfrac{d}{dt}(\underline{P} \cdot \underline{Q})$

(ii) $\dfrac{d}{dt}(\underline{P} \wedge \underline{Q})$

2·5-3. $\underline{P} = -t\,\underline{i} - t\,\underline{j} + (2t + 1)\,\underline{k}$; $\underline{Q} = (2t - 3)\,\underline{i} + \underline{j} - t\,\underline{k}$ எனின்,

(i) $\dfrac{d}{dt}(\underline{P} \,.\, \underline{Q})$; (ii) $\dfrac{d}{dt}(\underline{P} \wedge \underline{Q})$ என்பவைகளின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

2·5-4. $\underline{w} = 2t\,\underline{i} - t^2\,\underline{j} + (2t + 4)\,\underline{k}$; $\underline{r} = (t^2 + 1)\,\underline{i} - 6t\,\underline{j} + 4t^3\,\underline{k}$ எனில்,

(i) $\left.\dfrac{d}{dt}(\underline{w} \wedge \underline{r})\right|_{t=1}$ (ii) $\left[\left(\dfrac{d}{dt}|\underline{r}|\right)\underline{i_r} + \underline{w} \wedge \underline{r}\right]_{t=1}$

(iii) $\left[\dfrac{d^2|\underline{r}|}{dt^2}\,\underline{i_r} + 2\dfrac{d|\underline{r}|}{dt}\,\underline{w} \wedge \underline{i_r}) + \underline{w} \wedge \underline{r} + \underline{w} \wedge (\underline{w} \wedge \underline{r})\right]_{t=1}$

ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க (இங்கு $\underline{i_r}$ என்பது $\underline{r}$ என்னும் திசையி செயற்படும் திசையில் ஓரலகுத் திசையியாகும்)

2·5-5. $\underline{L} = 1 \,|\, \underline{\theta}$; $M = 1 \left|\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right.$ என்பவை, (x, y) தளத்திலமையும் ஓரலகுத்திசையிகளாகும். θ-வை t-ன் சார்பலனாகவும், $\dot{\theta} = w$ என்பதை ஒரு மாறிலியாகவும் கொண்டு கீழ் வருவனவற்றை நிறுவுக.

$$\underline{L} \cdot \underline{i} = \cos\theta, \qquad \underline{L} \cdot \underline{j} = \sin\theta$$

$$\dot{\underline{L}} = \dot{\theta}\, \underline{M} \qquad \underline{M} = -\dot{\theta}\, \underline{L}$$

$$\ddot{\underline{L}} = -w^2 \underline{L} \qquad \ddot{\underline{M}} = -w^2 \underline{M}$$

2·5-6. $\underline{A}(t) = 3t^2\, \underline{i} - (t + 4)\, \underline{j} + (t^2 - 2t)\, \underline{k}$

$\underline{B}(t) = \sin t\;\; i + 3e^{-t}\;\; \underline{j} - 3 \cos t\;\; \underline{k}$ எனின்

$\frac{d^2}{dt^2} [\underline{A} \wedge \underline{B}]_{t=0}$ என்பதின் மதிப்பைக் காண்க.

3. இயக்க இயல்

(துகளுக்கான வளைகோடு, நேர்கோட்டியக்க இயல்)

3·1. வேகம் (Speed)

இயங்குகின்ற ஓர் புள்ளியின் வேகம் அது தன் பாதையை வரைகின்ற வீதமாகும்.

3·1-1. சீரான வேகம் (Uniform speed)

சீரான வேகம் என்பது எத்துணைச் சிறிய நேரங்களாயினும் சமநேரங்களிலே இயங்குகின்ற புள்ளியானது தன் இயங்கும் திசையிலேயே சமதொலைவுகளைக் கடப்பதாகும்.

வேகம் சீரானதாகவுள்ளபோது துகளின் வேகம், அது ஓரலகு நேரத்தில் செல்லுகின்ற தொலைவால் அளவிடப்படும்.

3·1-2. சராசரி வேகம் (Average speed)

இயங்குகின்ற புள்ளியின் வேகம் சீரானதாக இல்லாவிடில் புள்ளி கடந்த தொலைவை அது எடுத்துக்கொண்ட கால இடைவெளியால் வகுத்து உண்டாகும் மதிப்பளவே சராசரி வேகமாகும்.

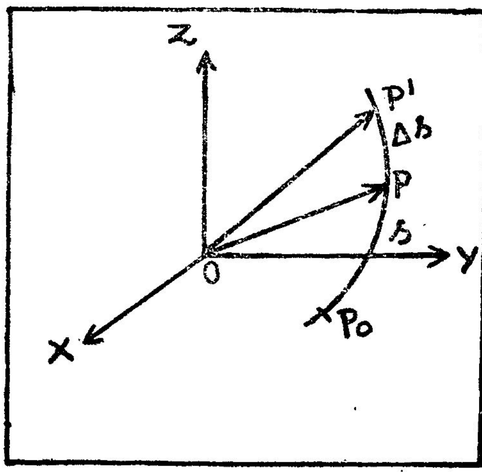
சராசரி வேகம் என்பது ஒரு கணத்தில் புள்ளி பொதுவாகக் கடக்கக்கூடிய தொலைவைக் குறிக்கிறது. எனவே,

$$\text{சராசரி வேகம்} = \frac{\text{புள்ளி கடந்த மொத்தத் தொலைவு}}{\text{எடுத்துக் கொண்ட கால இடைவெளி}}$$

3·1-3. ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் புள்ளியின் வேகம் (Instantaneous speed)

வேகம் சீரானதாக இல்லாதபோது, ஒரு குறிப்பிட்ட நொடிப் பொழுதில் புள்ளியின் வேகத்தை வகை நுண்கணித (Differential calculus) வாயிலாகப் பெறுதல் வேண்டும்.

இயங்கும் புள்ளி t என்னும் நேரத்தில் அது செல்லும் பாதையில், P_0 என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து s தொலைவைக் கடந்து படம் (3·1)-ல் காட்டியுள்ளவாறு P என்னும் புள்ளியில் இருப்பதாகக் கொள்க.



படம் 3·1

t என்னும் நேரத்தை அடுத்து Δt என்னும் மிகக் குறுகிய கால அளவில் புள்ளி Δt தொலைவைக் கடந்து P' என்னும் இடத்தை அடைவதாகில். புள்ளியின் சராசரி வேகம் $= \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ஆகும். எனவே Δt என்னும் நேரத்தைச் சிறிதாக்கிக் கொண்டே சென்று இறுதியாக Δt பூச்சியத்தை அணுகும்போது t என்னும் குறிப்பிட்ட நேரத்தில்,

$$\text{புள்ளியின் வேகம்} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \quad \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$= \frac{ds}{dt}$$

ஆகும். பொதுவாக குறிப்பிட்ட t என்னும் நேரத்தில் செயல்படும் வேகம் v என்னும் எழுத்தால் குறிப்பிடப்படும்.

எனவே, $v = \frac{ds}{dt}$

வேகம் ஓர் திசையிலி (Speed is a scalar)

வேகத்தின் வரையறையில் திசையைப்பற்றிக் கூறப்படவில்லை யாதலால் வேகத்திற்கு எண்மதிப்பு மட்டுமே உள்ளது எனவே வேகம் ஓர் எண்ணி அல்லது திசையிலி ஆகும்.

3·1-4. வேகத்தின் அலகுகள் (Units of speed)

மெட்ரிக் "*C. G. S.*" முறையில் வேகத்தின் அலகு செ மீ./வி.

மெட்ரிக் "*M. K. S.*" முறையில் வேகத்தின் அலகு மீ./வி.

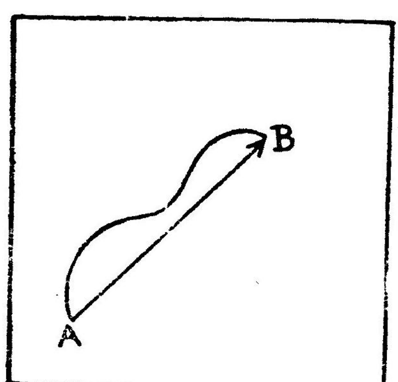
பிரிட்டன் "*F. P. S.*" முறையில் வேகத்தின் அலகு அ./வி. ஆகும்.

நடைமுறையில் வேகத்தை மணிக்கு இத்தனை மைல்கள் அல்லது மணிக்கு இத்தனை கிலோமீட்டர்கள் எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

3·2· இடப்பெயர்ச்சி (Displacement)

இடப்பெயர்ச்சி என்பது இயங்குகின்ற புள்ளியின் நிலை மாற்றமாகும்

இது இயங்கும் புள்ளியின் இரு நிலைகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகளைச் சேர்த்து உண்டாகும் நேர் கோட்டின் திசையையும் நீளத்



படம் 3·2

தையும் சார்ந்துள்ளது. எனவே இடப்பெயர்ச்சி ஒரு திசையி யாகும். படம் (3.2)ல் *A*, *B* என்பவை துகளின் இரு நிலைகளைக் குறிப்பதாகில், துகளின் இடப்பெயர்ச்சி $\overline{AB}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

3·3. திசைவேகம் (Velocity)

ஓர் இயங்குகின்ற புள்ளியின் திசைவேகம் அதன் இடப் பெயர்ச்சியின் வீதமாகும்.

ஓர் இயங்கும் புள்ளி, ஒரு விநாடியில் பெற்றிடும் இடப் பெயர்ச்சியே புள்ளியின் திசைவேகமாகும்.

திசைவேகம், "எண்மதிப்பு", "திசை" என்னும் இரண்டையும் பெற்றுள்ளதால், அது ஒரு திசையியாகும். எனவே திசை வேகம் ஓர் அம்பு நேர்கோட்டால் குறிக்கப்படும்.

3·3-1. சீரான திசை வேகம் (Uniform velocity)

இயங்கும் புள்ளியானது ஒரே திசையில் எத்துணைச் சிறியதான சமநேரங்களில் சமத்தொலைவுகளைக் கடப்பதாகில் அது சீரான திசைவேகத்துடன் இயங்குவதாகக் கொள்ளப்படும்.

அப்போது அப்புள்ளி ஓரலகு நேரத்தில் பெற்றிடும் இடப் பெயர்ச்சியே அதன் திசை வேகமாகிறது.

இதற்கு மாறாக சமகால அளவுகளில் புள்ளியானது கடக்கும் தொலைவோ அல்லது இயக்கத்தின் திசையோ மாறுபட்டால் புள்ளியின் திசைவேகமும் மாறுபடுகிறது.

எனவே திசைவேகம் மாறுபடும்போது ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் புள்ளியின் சராசரி திசைவேகம் அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் அதன்திசைவேகம் ஆகியவற்றைக் காண வேண்டியதாகிறது.

3·3-2. சராசரி திசைவேகம் (Average velocity)

ஒரு புள்ளி ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் நிகழ்த்திடும் மொத்த இடப்பெயர்ச்சிக்கும் அக்கால இடைவெளி அளவிற்கும் உள்ள விகிதமே அப்புள்ளியின் சராசரி திசைவேகமாகும். இது மொத்த இடப்பெயர்ச்சியின் திசையைப் பெற்றிருக்கும்.

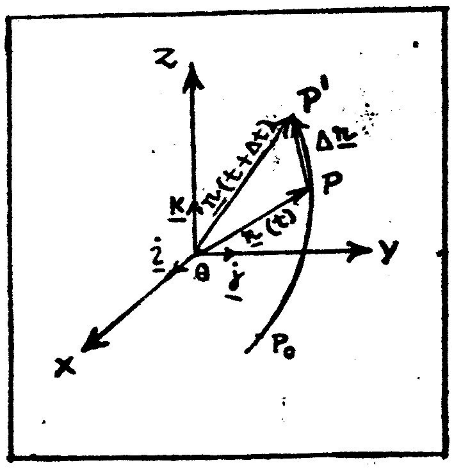
3·3-3. நொடிப்பொழுதில் புள்ளியின் திசைவேகம் (Instantaneous velocity)

பரந்தவெளியில் துகள் இயங்கும் AB என்னும் வளைவுப் பாதையில், t என்னும் நேரத்தில், துகள் $P(x, y, z)$ என்னுமிடத்தில், படம் (3.3)-ல் காட்டியவாறு உள்ளதாகக் கொள்க.

அதன் இருப்பிடத்தை,

$$\underline{OP} = \underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$$

என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கிறது.



படம் 3·3

தொடக்க நேரத்தில் ($t = 0$) துகள் பாதையில் P_0 என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து, t-என்னும் நேரத்தில், $\underline{P}$ என்னும் புள்ளியை அடையும்போது, துகள் பாதையில் கடந்த தொலைவை $\widehat{P_0P} = s = s(t)$ என்னும் வில் அளவிடுகிறது.

அடுத்து வரும் Δt என்னும் மிகச்சிறிய நேரத்தில், துகள் பாதையில் P-க்கு அருகிலுள்ள P' $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ என்னுமிடத்தில் அமைவதாகில்

$$\underline{OP'} = \underline{r}\,(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)\underline{i} + y(t+\Delta t)\underline{j} + z(t+\Delta t)\underline{k}$$
$$= (x+\Delta x)\underline{i} + (y+\Delta y)\underline{j} + (z+\Delta z)\underline{k}$$

ஆகும்.

இங்கு $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$

$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$

$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$ என எடுக்கப்படும்.

மேலும் $\Delta s = \widehat{PP'} = \widehat{P_0P'} - \widehat{P_0P}$

$= s(t + \Delta t) - s(t)$ ஆகும்.

$\underline{PP'} = \Delta \underline{r}$ எனக்கொண்டால் திசையி முக்கோண விதிப்படி படம் (3·3)லிருந்து

$$
\begin{aligned}
\underline{PP'} &= \underline{OP'} - \underline{OP} \\
&= \underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t) \\
&= x(t-\Delta t)\underline{i} + y(t+\Delta t)\underline{j} + z(t+\Delta t)\underline{k} \\
&\qquad - x(t)\underline{i} - y(t)\underline{j} - z(t)\underline{k} \\
&= \{x(t+\Delta t)-x(t)\}\underline{i} + \{y(t+\Delta t-y(t)\}\underline{j} \\
&\qquad + \{z(t+\Delta t)-z(t)\}\underline{k} \\
&= \Delta x\underline{i} + \Delta y\underline{j} + \Delta z\underline{k}
\end{aligned}
$$

ஆகும்.

PP' என்னும் நாணின் நீளம் $\Delta \underline{r}$ என்னும் திசையி-இன் எண் மதிப்பாகும். அதன் எண்மதிப்பை Δr எனக்கொள்க.

$\Delta \underline{r}(t)$ என்பது Δt எனும் நேரத்தில் துகள் பெற்ற இடப் பெயர்ச்சியாதலின், அது திசையி $\underline{r}$ ன் எண்மதிப்பு மாற்றத்தாலோ அல்லது $\underline{r}$ ன் திசைமாற்றத்தாலோ அல்லது இவ்விரண்டின் மாற்றத்தாலோ நிகழக்கூடும். ஆகவே,

Δt எனும் மிகக் குறுகிய காலத்தில் நிகழ்ந்த இடப் பெயர்ச்சி $\Big\} = \Delta \underline{r}$

ஓரலகு நேரத்தில் அல்லது ஒரு வினாடியில் நிகழ்ந்த இடப் பெயர்ச்சி $\Big\} = \dfrac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$

இதுவே துகளின் சராசரி திசை வேகமாகும்.

அதாவது துகளின் சராசரி திசைவேகம் $= \dfrac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$

இங்கு $\Delta \underline{r}$ என்பது ஒரு திசையியாகவும் Δt என்பது ஓர் எண்ணியாகவும் உள்ளதால் சராசரி திசைவேகம் ஒரு திசையியாகும். மேலும் $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ என்பது துகளின் சராசரி வேகம் என முன்னமே கூறப்பட்டது. இங்கு Δs, Δt என்பவை எண்ணிகளாதலால் $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ என்பது ஒரு திசையிலியாகும்.

Δt என்னும் நேரத்தைச் சிறிதாக்கிக் கொண்டே சென்றால் இறுதியாக Δt பூச்சியத்தை அணுகும்போது வகைநுண்கணித வரையறைப்படி, குறிப்பிட்ட t என்னும் நேரத்தில், பாதையில் P என்னுமிடத்தில் துகளின் திசைவேகம் $= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$

$$= \frac{d\underline{r}}{dt}$$

பொதுவாக துகளின் திசைவேகம் $\underline{v}$ என்னும் திசையியால் குறிக்கப்படும். எனவே,

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}$$

$\Delta r \simeq \Delta s$ ஆனதால், $\frac{\Delta \underline{r}}{\Delta s}$-ன் எண் மதிப்பு ஒன்றாகும்.

$\underline{P'}$ என்னும் புள்ளி $\underline{P}$ஐ அணுகும்போது, PP' என்னும் நாண், $\underline{P}$யில் இயங்கும் பாதைக்குத் தொடுகோடாக அமையும். எனவே $\frac{\Delta \underline{r}}{\Delta s}$ என்பது இறுதியாக தொடுகோட்டில் அமையும், ஓரலகுத் திசையியாகும் (unit tangent vector) t என்பது $\underline{P}$ என்னுமிடத்தில், இயங்கும் பாதைக்கு வரையும் தொடுகோட்டில் ஓரலகுத் திசையி எனில்,

$$\lim_{\Delta t \to 0} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta s} = t \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $\frac{d\underline{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta s} \times \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\right) \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta s}\right)$$

$$= \frac{ds}{dt}\, t$$

$$\therefore \quad \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\, \underline{t}$$

$\frac{d\underline{r}}{dt}$, $\frac{ds}{dt}$ என்பவை முறையே, t என்னும் குறிப்பிட்ட கணத்தில் துகளின் "திசைவேகம்" "வேகம்" ஆகியவற்றை வரையறுக்கின்றன. மேலும் திசைவேகத்தின் எண்மதிப்பே துகளின் வேகமாவதால் $\frac{d\underline{r}}{dt}$, $\frac{ds}{dt}$ என்பவைகளை முறையே $\underline{v}$, v எனக் குறிப்போமாகில்,

$$\underline{v} = v\,\underline{t}$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும். மேலும், திசைவேகம், t என்னும் நேரத்தில், பாதைக்கு வரையும் தொடுகோட்டில் அமைவதையும் அறிதல் வேண்டும்.

3·4. தேக்காட்டின் ஆயக்கூறுகளில் துகள் ஒன்றில் வேகம், திசைவேகம் ஆகியவற்றைக் காணுதல்.

t என்னும் கணத்தில் P என்னுமிடத்திலமையும் துகளின் திசைவேகம் வரையறையின்படி,

$$\underline{v} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta x\,\underline{i} + \Delta y\,\underline{j} + \Delta z\,\underline{k}}{\Delta t}$$

$$= \frac{dx}{dt}\,\underline{i} + \frac{dy}{dt}\,\underline{j} + \frac{dz}{dt}\,\underline{k}$$

$$= v_x\,\underline{i} + v_y\,\underline{j} + v_z\,\underline{k}$$

ஆகும். $\underline{v_x} = v_x\,\underline{i}$; $\underline{v_y} = v_y\,\underline{j}$; $\underline{v_z} = v_z\,\underline{k}$ என்பவை x, y, z அச்சுக்களில் திசைவேகத்தின் திசையிப்பகிர்வுகளாகும்.

$v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$; $v_z = \frac{dz}{at}$ என்பவை துகளின் வேகத்தின் பகிர்வுகளாகும்.

v_x, v_y, v_z தெரியும்போது துகளின் திசைவேகத்தின் "எண் மதிப்பு" "திசை" ஆகியவற்றைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

$$v^2 = \underline{v}\,.\,\underline{v}$$

$$= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$\therefore\ v = +\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

திசைவேகம் செயல்படும் கோடு. x, y, z அச்சுக்களுடன் θ_x, θ_y, θ_z என்னும் கோணங்களைத் தாங்குமெனில்

$$\cos\theta_x = \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

$$\cos\theta_y = \frac{v_y}{v} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{v_z}{v} = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

என்னும் திசைக்கிடக்கைகளைக் காணமுடியும்.

எனவே திசைவேகத்தின் "எண்மதிப்பு," "திசை" ஆகியவற்றைக் காணமுடியும்.

[குறிப்பு :—(i) $\underline{v} = \underline{v(t)} = v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k}$ என்றுவதால்,

$$\underline{t} = \frac{v_x}{v}\underline{i} + \frac{v_y}{v}\underline{j} + \frac{v_z}{v}\underline{k}$$

$$= \cos\theta_x \underline{i} + \cos\theta_y \underline{j} + \cos\theta_z \underline{k}$$

ஆகும்.

(ii) துகளின் வேகம் (v ஆனது) தெரியுமெனில் துகள் பாதையில், t நேரத்தில் கடக்கும் தொலைவைக் காணமுடியும்.

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$s = \int v\,dt + c$$

c யின் மதிப்பை தொடக்க நிபந்தனைகளின் வாயிலாக காணலாம்.

(iii) t என்னும் நேரத்தில் துகளின் திசைவேகம் $(\underline{v})$ தெரியுமெனில், அப்பொழுது அத்துகளின் இருப்பிடத்தை வரையறுக்க முடியும்.

$\underline{v} = v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k}$ என்பது தெரியுமாதலால்

$$\frac{dx}{dt} = v_x\,; \quad \frac{dy}{dt} = v_y\,; \quad \frac{dz}{dt} = v_z \qquad \text{ஆகும்}$$

$$\therefore \quad x = \int v_x dt + c_1\,; \quad y = \int v_y dt + c_2\,; \quad z = \int v_z dt + c_3$$

c_1, c_2, c_3 என்னும் மாறிலிகளின் மதிப்புக்களைத் தொடக்க நிபந்தனைகளின் வாயிலாக வரையறுக்க முடியும்.

(iv) துகள் ஒரு நேர் கோட்டியக்கத்தைப் பெற்றிருக்குமெனில் அதன் வேகமும், திசைவேகமும் சமமாகும். துகளின் இயக்கம் நேர் கோட்டியக்கத்தைத் தவிர்த்து வேறெந்தப்பாதையாக அமைந்தாலும் வேகமும், திசைவேகமும் ஒன்றுகா. எடுத்துக் காட்டாக ஒரு துகள் வட்டமொன்றை ஒரு சீராக வரைவதாகக் கொள்க. அதன் இயக்கத்தின் திசை அதாவது வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் திசை பரிதியிலுள்ள புள்ளிக்குப் புள்ளி மாறுபடும். [ஆகவே அத்துகளின் வேகம் மாறுதிருப்பினும் திசைவேகம் மாறிக் கொண்டேயிருக்கும்.]

3·5. திசைவேகங்களின் தொகுப்பு (Composition of velocities)

பொருள் ஒன்று ஒரே நேரத்தில் இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட திசைவேகங்களைப் பெற்றிருக்குமெனின் அவற்றால் ஏற் படக்கூடிய பலனைத் தனியே விளைவிக்கக்கூடிய திசைவேகமானது பல்வேறு திசைவேகங்களின் தொகுபயன் அல்லது விளைவு (Resultant) எனப்படும். அவ்வித விளைவைக் காண்பது திசை வேகங்களின் தொகுப்பு எனப்படும்

ஒரு பொருள் ஒரே திசையில் $\underline{u_1}$, $\underline{u_2}$ என்னும் இரு திசை வேகங்களை ஒருங்கே பெற்றிருப்பின், அவற்றின் விளைவு $\underline{R} = \underline{u_1} + \underline{u_2}$ ஆகும். இவ்விளைவுத்திசைவேகம் அவ்விரு திசைவேகங்களின் திசையிலேயே அமையும்.

ஒரு பொருள் எதிர்த்திசைகளில் $\underline{u_1}$, $\underline{u_2}$ $(\underline{u_1} > \underline{u_2})$ என்னும் இரு திசை வேகங்களைப் பெற்றிருப்பின் அவற்றின் விளைவு $\underline{R} = \underline{u_1} - \underline{u_2}$ ஆகும். இது இவ்விரு திசைவேகங்களுள் பெரியதன் திசையில் செயல்படும்.

எனவே ஒரே நேர்கோட்டில் செயல்படும் திசைவேகங்களின் விளைவு அத்திசைவேகங்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகையால் வரையறுக்கப்படும்.

துகள் ஒன்றின் மீது ஒன்றுக்கொன்று சாய்ந்த நிலையிலுள்ள இரு திசைவேகங்கள் செயல்பட்டால் அவற்றின் விளைவைத் **"திசை வேகங்களின் இணைகர விதி"**யால் பெறலாம்.

திசைவேகம் ஒரு திசையியாவதால், திசையிகளின் இணைகர விதி, முக்கோணவிதி, பல்கோணவிதிகள் ஆகியவற்றைப் பயன் படுத்தி திசைவேகங்களின் தொகுபயனைக் காணலாம்.

மேலும் ஒரு துகளுக்குப் பரந்தவெளியில் பல்வேறு திசைகளில் திசைவேகங்கள் ஒருங்கே உண்டெனின் அவற்றின் விளைவை, $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ என்னும் குறிப்பிட்டச்சு அமைப்பில், திசை வேகங்கள் ஒவ்வொன்றையும் அதன் ஆக்கக்கூறுகளாக $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ என்னும் ஓரலகுத் திசையிகள் வரையறுக்கும் திசைகளில் பிரித்து, அத் திசைகளில் செயல்படும் திசைவேகப் பகிர்வுகளின் குறியில் கூட்டுத் தொகைகளால் வரையறுக்கலாம்.

குறிப்பாக, துகள் ஒன்றில் செயல்படும் v_p, $p = 1, 2, \ldots n$ என்னும் திசைவேகங்களின் ஆக்கக்கூறுகள் $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ திசை களில் முறையே $\underline{i}\, v_{px}$, $\underline{j}\, v_{py}$, $\underline{k}\, v_{pz}$ எனின், அத்திசை வேகங் களின் விளைவுத்திசைவேகம் (Resultant velocity)

$$R = \sqrt{\sum_{p=1}^{n} v^2_{px} + \sum_{p=1}^{n} v^2_{py} + \sum_{p=1}^{n} v^2_{pz}}$$

என்ற எண்மதிப்பாலும், அது செயல்படும் திசை

$$\cos\theta_x = \frac{\sum_{p=1}^{n} v_{px}}{R}; \quad \cos\theta_y = \frac{\sum_{p=1}^{n} v_{by}}{R}; \quad \cos\theta_z = \frac{\sum_{p=1}^{n} v_{pz}}{R}$$

என்னும் திசைக் கிடைக்கைகளாலும் வரையறுக்கப்படும்.

3·6. சார்பியக்கம் (Relattve motion)

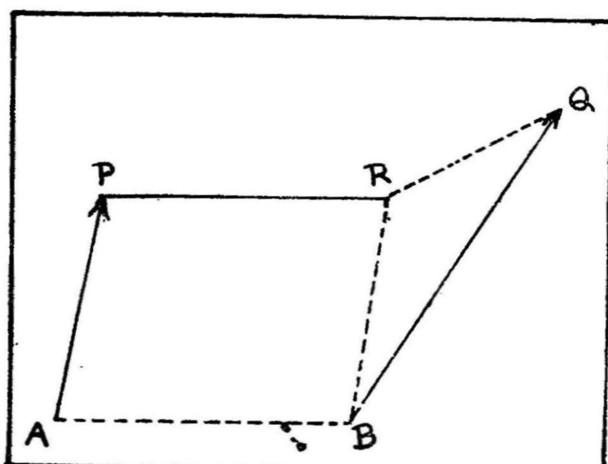
ஓய்வு, இயக்கம் என்பவை சார்பை உணர்த்தும் சொற்க ளாகும். தனி இயக்கமோ அல்லது சார்பிலாத் திசைவேகமோ யாதென்று காண்பது இயலாத காரியம். எனவே நடைமுறையில் நிலையானதெனக் கருதப்படும் ஒரு சுட்டமைப்பைப் பொறுத்துத் தான் ஒரு பொருள் ஓய்வாயுள்ளதா அல்லது இயங்குகின்றதா என அறிய முடியும். அவ்வாறே பொருள் ஒன்றினது திசைவேக மானது அச்சுட்டமைப்பைச் சார்ந்த திசைவேகம் அல்லது சார் திசைவேகம் எனக் கூறப்படும்.

3·6-1. சார்திசை வேகம் (Relative velocity) **வரையறை.**

திசையிலாயினும், அளவிலாயினும் அல்லது இவ்விரண்டிலாயினும் இரு புள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள தொலைவு மாறினுல், இரு புள்ளிகளுக்கும் ஒன்றுக்கொன்றுன சாரியக்கம் உண்டு.

A என்னும் புள்ளியைக் குறித்து, மற்ருெரு B என்னும் புள்ளியின் சார்திசை வேகமானது, Bயின் திசைவேகத்துடன் Aயின் திசைவேகத்திற்குச் சமனுமெதிரியுமாயுள்ள திசைவேகத்தைச் சேர்த்து உண்டாகும் திசையிக் கூடுதலாற் பெறப்படும்

இதை விளக்க, A, B-என்னும் புள்ளிகளுடைய திசை வேகங்களை $\underline{V_A}$, $\underline{V_B}$ எனக்கொள்க. அவைகளை படம் (3.4)-ல் காட்டிய வாறு $\underline{AP}$, $\underline{BQ}$ என்னும் அம்புக்கோடுகள் குறிக்கட்டும். ஒரு



படம் 3·4

விஞடியில் அப்புள்ளிகளுடைய நிலைகள் A, B என்னுமிடத்திலிருந்து முறையே P, Q என்னுமிடங்களுக்குச் செல்லட்டும். $APRB$ என்னும் இணைகரத்தை பூர்த்தி செய்து RQ ஐச் சேர்க்கவும்.

திசையி முக்கோண விதிப்படி.

$$\underline{BR} + \underline{RQ} = \underline{BQ}$$

$$\underline{RQ} = \underline{BQ} - \underline{BR}$$

$$= \underline{BQ} - \underline{AP}$$

$$= \underline{V_B} - \underline{V_A} = \underline{V_B} + (-\underline{V_A})$$

எனவே, A ஐச்சார்ந்த Bயின் திசைவேகமானது, $\underline{RQ}$-ஆல் குறிக்கப்படும். அது Bயின் திசைவேகம், Aயின் திசைவேகத்திற்குச் சமனுமெதிருமாயுமுள்ள ஒரு திசைவேகம், ஆகியவற்றின் விளைவாகும்.

அதாவது, A-ஐக்குறித்து B-யின் சார்த்திசை வேகமானது Bயின் உண்மையான திசைவேகத்துடன் Aயின் திசைவேகத்திற்கு சமனுமெதிருமாயுள்ள ஒரு திசைவேகத்தைக் கூட்டுவதால் கிடைக்கப்படும்.

எனவே,

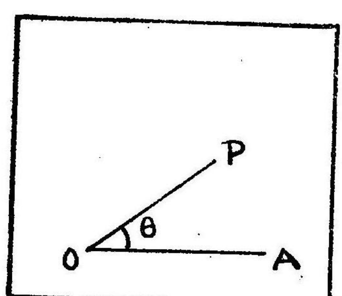
A-ஐக்குறித்து B-யின் சார்திசை வேகம் $= \underline{V_B} - \underline{V_A}$

அவ்வாறே,

B-ஐக்குறித்து A-யின் சார்திசை வேகம் $= \underline{VA} - \underline{VB}$
ஆகும்.

3·7. கோண வேகம் (Angular velocity)

தளமொன்றில் O என்பது ஏதேனுமொரு நிலையான புள்ளி யாகவும் OA என்பது O வழி வரைந்த நிலையான நேர்கோடாகவு



படம் 3·5

மிருந்தால், அத்தளத்திலியங்கும் P-என்னும் புள்ளி, படம் (3-5)-ல் காட்டியவாறு, Oவில் தாங்கும் $\hat{AOP}$ என்னும் கோணத்தின் அதிகரிக்கும் வீதமானது, O வைப் பற்றி, இயங்குகின்ற P-யின் கோணவேகம் எனப்படும்.

செயலுரிமை ((Liberty), நியாயம் (Equity) என்ற தத்துவங்களை அடிப்படையாகக்கொண்டு விளங்குவன கூட்டுறவும் சமதருமமும். கூட்டுறவும் சமதருமமும் ஒரே தன்மையான தத்துவங்கள் போன்று காணப்பட்ட காரணத்தால் அவையிரண்டும் ஒன்றே என்று கருதப்பட்டது. சில சமதருமவாதிகள் தமது கருத்திற்கிசைந்த அமைப்பு மாபெரும் கூட்டுறவு அமைப்பே என்று கூறினர்.

கூட்டுறவு, சமதரும அல்லது பொதுவுடைமை தத்துவங்கள் ஒன்றுபோல் காணப்படினும், உண்மையில் அவை வேறுபாடுகள் பல உள்ள தத்துவங்களாகும். தனி நபர் சொத்து என்பதே இருக்கக் கூடாது என்பது சமதருமத் தத்துவம். முதலாளிகளிடமிருந்து முதல் பறிக்கப்படவேண்டுமென்றும் சமதருமவாதிகள் கூறுகின்றனர். கூட்டுறவு முறையில் தனிநபர் சொத்துக்கு இடமுண்டு. மற்றும் கூட்டுறவில், முதல் கெடுதல் ஏதும் செய்யும் ஆற்றலில்லாமல் மனிதனின் பணியாளாகச் செயல்படுகிறது. கூட்டுறவு தனி மனிதனின் உரிமைகளை மதித்துச் செயல்படுகிறது. பொதுவுடைமை அல்லது சமதருமத் தத்துவத்தில் நாடு எல்லாவற்றிற்கும் உயர்ந்ததாகக் கருதப் படுகிறது. தனி மனிதன் நாட்டின் நலனுக்காக வாழவேண்டும் என்பது அத் தத்துவத்தின் அடிப்படைக் கொள்கை.

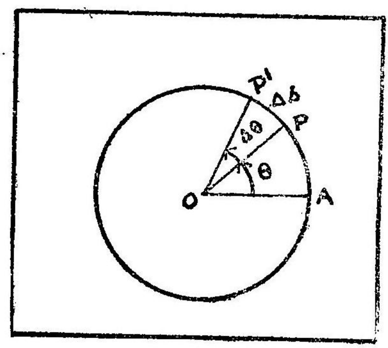
கூட்டுறவு, அரசியல்சார்பற்ற நெறியாகும். கூட்டுறவின் தத்துவங்களை ஆராய்ந்தபோது, அது அரசு, சமயச்சார்பற்ற இயக்கம் என்று கண்டோம். சமதரும அல்லது பொதுவுடைமை ஓர் அரசியல் தத்துவம்.

தன்னுதவியை நம்பிக் கூட்டுறவு இயக்கம் இயங்குகிறது. பெரும்பாலும் வெளியுதவி பெறுது இயங்கிவரும் நோக்கம் கூட்டுறவில் காணப்பட்டாலும், சில நேரத்தில் அரசினர் உதவியை ஏற்றுக்கொள்ளும் நிலை வருவதுண்டு. அப்படி ஏற்றுக் கொண்டாலும் தன் அகநிருவாகத்தில் அரசு தலையிடுவதைக் கூட்டுறவு ஏற்காது. பொதுவுடைமையில் அரசே எல்லாப் பொருளாதார நடவடிக்கைகளையும் மேற்கொள்ளுவதால் நிருவாகம் அரசின்வசம் இருக்கிறது. வன்முறை, வேலை நிறுத்தம்போன்ற செயல்களைக் கடைப்பிடித்துப் பொதுவுடைமையின் நோக்கத்தை அடைய முயல்வதுண்டு. அமைதி, ஒழுங்கு ஆகிய பண்புகள் கூட்டுறவில் முக்கிய இடம்பெறுகின்றன.

பொதுவுடைமை நாட்டனைத்துக்கும் நலந்தேடும் பண்பு வாய்ந்தது; கூட்டுறவு உறுப்பினர்களின் நலனிலும் அவர்களுக்குச் சேவை செய்வதிலும் ஈடுபாடு கொண்டுள்ளது.

3·8–1. இயங்கும் புள்ளி ஒன்று வட்டமொன்றைச் சீரான வேகத்துடன் வரைந்தால், அவ்வட்டமையம் பற்றி அதன் கோண வேகமானது, அதன் வேகத்தை அவ்வட்ட ஆரையால் வகுத்து வரும் ஈவுக்குச் சமமாகும்.

ஒரு துகள் O-ஐ மையமாகவும் r-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டமொன்றைப் படம் (3·6)-ல் காட்டியவாறு, V என்னும்



படம் 3·6

சீரான வேகத்துடன் வரையட்டும். t என்னும் நேரத்தில் துகளின் நிலை P ஆகவும், $A\hat{O}P = \theta$ ஆரை யனுமாகவும் $\widehat{AP} = s$ ஆகவும் இருக்கட்டும். அடுத்துவரும் Δt நேரத்தில், அத்துகள் $\widehat{P\theta} = \Delta s$ அளவுள்ள மிகச்சிறிய வட்டவில்லைக் கடப்பதாகக் கொள்க. $P\hat{O}P = \Delta\theta$ ஆகில் வட்டத்தில் $\Delta s = r\,\Delta\theta$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = r\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$V = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \; \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

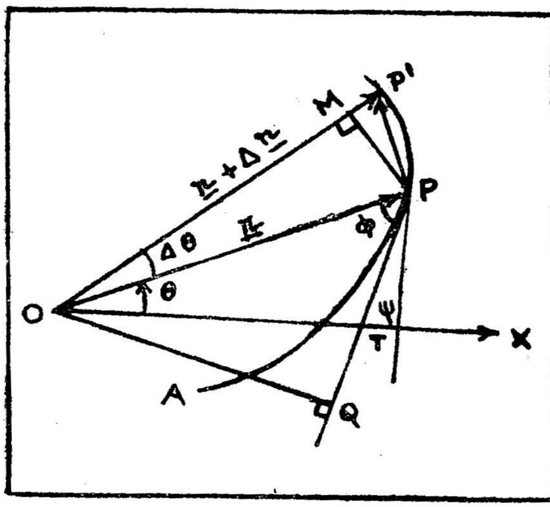
$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \; r\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= r\,\frac{d\theta}{dt} \qquad \therefore \quad \omega = \frac{V}{r} \text{ ஆகும்.}$$

$$= r\,\omega$$

3·8-2. ஒரு தளவளைகோட்டின் வழியே இயங்கும் துகளின் கோணவேகம் (Angular velocity of a particle moving along a plane curve)

குறிப்பிட்ட வளைகோடானது O என்னும் நிலையான புள்ளி, OX என்னும் நிலையான கோடு ஆகியவற்றால் வரையறுக்கப்படும் தளத்தில், படம் 3·1-ல் காட்டியவாறு அமையட்டும்.



படம் 3.7

t, $t+\Delta t$ என்னும் அடுத்தடுத்த நேரங்களில், துகள், இயங்கு வரையில் $\underline{P}$, $\underline{P^1}$ என்னுமிடங்களில் இருப்பதாகக் கொள்க. வளை கோட்டில் A என்பது ஒரு நிலையான புள்ளியாகுக.

$$OP = r, \quad OP' = r + \Delta r, \quad X\hat{O}P = \theta, \quad P\hat{O}P' = \Delta\theta,$$

$$\widehat{AP} = s, \quad \underline{\widehat{PP'}} = \Delta s \qquad \text{எனக்கொள்க.}$$

P-யிலிருந்து OP'-க்கு PM என்ற செங்குத்துக்கோடு வரைக. Pயில் வளைகோட்டிற்கு PT என்னும் தொடு கோட்டையும் வரைக. $O\hat{P}T = \phi$ எனக்கொள்க. Δt பூச்சியத்தை அணுகும்போது, P' என்பது P-ஐ அணுகும். அப்பொழுது $O\hat{P}P$ என்ற கோணம் OPT யின் நிலையை அடையும். எனவே $\triangle PMP'$ இல்,

$$\sin P\hat{P'}M = \frac{PM}{PP'} = \frac{r \sin \Delta \theta}{\Delta s}$$

$$\underset{P' \to P}{\text{எல்லை}} \sin P\hat{P'}M = \underset{\Delta s \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{r \sin \Delta \theta}{\Delta s}$$

$$\sin \phi = r \underset{\Delta s \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \quad (\because \quad \sin \Delta \theta \simeq \Delta \theta)$$

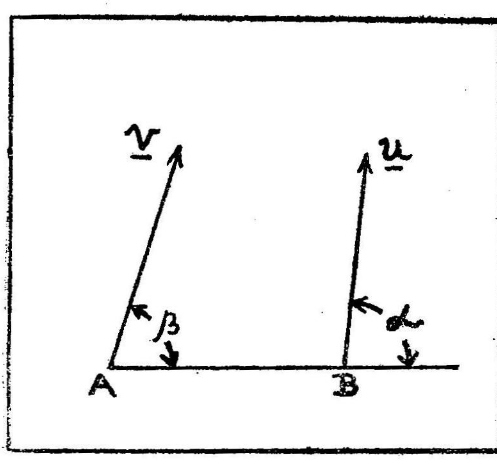
$$= r \frac{d\theta}{ds}$$

துகளின் கோணவேகம் $= W$

$$= \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{\sin \phi}{r} V = \frac{V \sin \phi}{r}$$

[குறிப்பு :—வளைவுப்பாதை ஒரு வட்டமாக அமையும்போது $\phi = 90°$ ஆகும். அப்போது $\omega = \frac{v}{r} \sin 90 = \frac{v}{r}$ ஆகும்]

3·9. இயங்கும் இருதுகள்களுக்கு இடையேயுள்ள சார்புக் கோணவேகம் (Relative angular velocity between two moving particles)



படம் 3·8

படம் 3·7-ல் காட்டியுள்ளவாறு, A, B என்னும் இரு துகள் முறையே, t என்னும் நேரத்தில், $\underline{v}$, $\underline{u}$ என்னும் திசைவேகங்

களுடன் AB என்னும் கோட்டுடன் முறையே α, β என்னும் கோணங்களை அமைத்தும் இயங்கட்டும். இரு துகள்களும் இயங்குவதால், ஒவ்வொன்றுக்கும் மற்றதைப் பொறுத்து கோணவேகம் உண்டு. $\underline{v}$, $\underline{u}$ என்னும் திசைவேகங்களை ABயின் திசையிலும் அதற்குச் செங்குத்தான திசையிலும் ஆக்கக் கூறுகளாகப் பிரிக்கவும். ABயில் ஒரு வித சுழற்றலையும் உண்டுபண்ணு. ஆனால் ABக்கு செங்குத்தான திசையில் உள்ள பகிர்வுகள், AB-ஐச் சுழற்றும்.

A-ஐப் பற்றி, Bயின் கணநேரச் சார்புத்திசைவேகம்

$$= u \sin \alpha - v \sin \beta$$

ஆகவே,

B-ஐப் பற்றி, Bயின் கணநேரக் கோணவேகம்

$$= \frac{u \sin \alpha - v \sin \beta}{AB}$$

[குறிப்பு:—(1) A என்னும் துகள் நிலையானதாகில்

$$A\text{-ஐப்பற்றி } B\text{யின் கோண வேகம்} = \frac{u \sin \alpha}{AB}$$

(2) $u \sin \alpha = v \sin \beta$ ஆகில், A-ஐப்பற்றி B-யின் கோண வேகம் பூச்சியமாகும். எனவே AB யானது, தனக்கு இணையாகவே நகரும்.

(3) AB-யின் நீளமும், AB-யின் திசையும் மாறும்போது AB-க்கு செங்குத்தான திசைவேகப்பகிர்வுகளும் மாறுவதால், $\dfrac{u \sin \alpha - v \sin \beta}{AB}$ என்பது AB-யின் கணநேரக்கோண வேகத்தையே குறித்திருக்கிறது.]

3·10. திசைவேக மாற்றம் (Change of velocity)

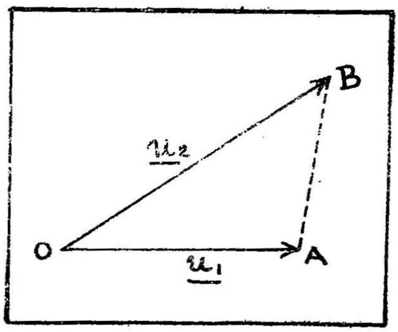
ஒரு துகளின் திசைவேகம் அதன் எண்மதிப்பு அளவிலோ அல்லது திசையிலோ அல்லது இரண்டிலுமோ மாறுபடுமாகில், அது திசைவேக மாற்றத்தைப் பெற்றுள்ளதாகும்.

ஒரு துகளானது யாதேனும் t_1, t_2 என்னும் நேரத்தில் முறையே $\underline{u_1}$, $\underline{u_2}$ என்னும் திசைவேகத்துடன் இயங்கட்டும். அத்திசைவேகங்களை படம் (3.9)-ல் காட்டியவாறு $\underline{OA}$, $\underline{OB}$ என்னும் அம்புக்கோடுகள் வரையறுப்பதாகக் கொள்க.

$\underline{AB}$-ஐச் சேர்க்க திசையி முக்கோண விதிப்படி,

$$\underline{AB} = \underline{OB} - \underline{OA}$$
$$= \underline{u_2} - \underline{u_1}$$

ஆகும். எனவே $(t_2 - t_1)$ நேரத்தில் ஏற்பட்ட திசைவேக மாற்றத்தை அளவிலும், திசையிலும் $\underline{AB}$ என்னும் திசையி அறிவிக்கிறது.



படம் 3·9

$\underline{OA} = \underline{OB}$ எனின் வேகம் இரு நேரங்களிலும் ஒன்றுகவே இருக்கிறது. ஆயினும் இவ்விரு திசைவேகங்களும் செயல்படுகிற திசைகளில் மாறுபடுகின்ற காரணத்தால் அவற்றின் திசைவேக மாற்றத்தை $\underline{AB}$ என்னும் திசையி அளவிலும் திசையிலும் குறிக்கிறது.

3.10-1. வரையறை : முடுக்கம் (வேகவளர்ச்சித்தகவு) (Acceleration)

இயங்குகின்ற ஒரு துகளின் திசைவேக மாறுபாட்டின் வீதம் அத்துகளின் "முடுக்கம்" அல்லது "வேக வளர்ச்சித்தகவு" எனப்படும்.

திசைவேகமாற்றம் ஒரு திசையியாவதால் அதன் வீதமும் ஒரு திசையியாகும். ஆகவே முடுக்கம் ஒரு திசையியாகிறது.

புள்ளி இயங்கும் திசைக்கு எதிராக முடுக்கம் இருக்குமெனில் அதை "எதிர்முடுக்கம்" (Deceleration) எனக் கூறுவது வழக்கம்.

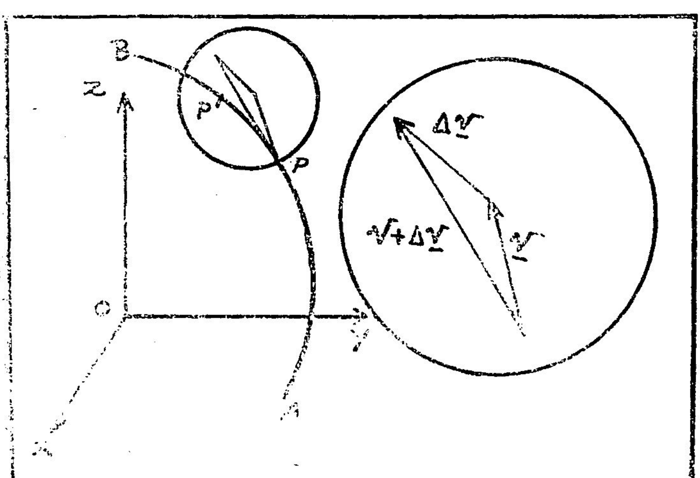
3.10-2. சீரானமுடுக்கம் (Uniform acceleration)

இயங்கும் புள்ளி ஒன்றின் திசைவேகத்தில் எத்துணைச் சிறிய தான சமநேரங்களில், சமவேகமாற்றம் ஒரே திசையில் ஏற்படுமாயின், அப்புள்ளி சீரான முடுக்கத்தைப் பெற்றுள்ளது எனப்படும்.

முடுக்கம் சீரானதாக உள்ளபோது, முடுக்கமானது ஓரலகு நேரத்தில் புள்ளியின் திசைவேகத்தில் ஏற்படும் வேகமாற்றத்தால் அளவிடப்படும்

3.10-3. ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் துகளின் முடுக்கம் (Instantaneous acceleration of a particle)

ஒரு துகளின் திசைவேகம் சமகால அளவுகளில் சமவேக மாற்றம் ஏற்படாவிடினும் அல்லது வேகமாற்றம் ஒரே திசையில் திகழாவிடினும், முடுக்கம் மாறுபடக்கூடியது. ஆகவே முடுக்கம் மாறுபடும்போது, ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில், அதன் முடுக்கத்தை வகைநுண்கணிதத்தைப் (Differential calculus) பயன்படுத்திக் காணலாம்.



படம் 3·10

படம் (3.10)-ல் காட்டியவாறு t என்னும் நேரத்தில், பரந்த வெளியில், AB என்னும் பாதையில் இயங்கும் துகள், P என்னுமிடத்தில் இருக்கட்டும். $\underline{v}$ என்னும் அதன் திசைவேகம் P-யில் பாதைக்கு வரையும் தொடு கோட்டில் அமையும்.

$\underline{v} = \underline{v}(t)$ என்பது t மாறி சார்ந்த திசையிச்சார்பலனாதலால், நேரம் மாறுவதற்கேற்றவாறு, அது எண்மதிப்பிலும் திசையிலும் மாறுபடக்கூடியது.

எனவே $(t+\triangle t)$ என்னும் நேரத்தில், துகள் P' என்னுமிடத்தில் இருக்கும்போது, அதன் திசைவேகத்தை $\underline{v}\,(t+\triangle t)$ எனக் கொள்க.

திசைவேகமாற்றத்தை, படம் (3·10)-ல் காட்டியவாறு ஒரு திசைவேக முக்கோணம் வரைந்து காணலாம். திசைவேக முக்கோண விதிப்படி,

$$\triangle \underline{v} = \underline{v}(t+\triangle t) - \underline{v}(t)$$

இதுவே $\triangle t$ கணத்தில் நிகழ்ந்த திசைவேகமாற்றமாகும். $\triangle t$-யின் மதிப்பை சிறிதாக்கிக்கொண்டே சென்று, இறுதியாக அதன் மதிப்பு பூச்சியத்தை அணுகும்போது, $\triangle \underline{v}$க்கும், $\triangle t$க்குமுள்ள விகிதத்தின் எல்லையே, t என்னும் கணத்தில், $\underline{P}$யின் முடுக்கமாகும்.

முடுக்கத்தை $\underline{a}$ எனக் குறித்தால்,

$$\underline{a} = \underset{\triangle t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\triangle v}{\triangle t}$$

$$= \frac{d\underline{v}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2}$$

ஆகும். முடுக்கத்தின் திசையானது, திசைவேகம், துகளின் நிலைத்திசையி ஆகியவை செயல்படும் திசைகளுக்கு வேறுபட்டிருக்கும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

3.10-4. முடுக்கத்தின் $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ திசைகளில் பகிர்வுகளைக் காணுதல் (Components of acceleration along $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ directions)

t என்னும் நேரத்தில்,

$$\underline{r}(t) = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j} + z(t)\,\underline{k}$$

இந்தச் சூழ்நிலையில் அந் நாளைய அரசு, வட்டித் தொழிலரின் ஆதிக்கத்தைக் குறைத்து, குறைந்த வட்டிக்கு விவசாய உற்பத்திக்குத் தாமே கடன் கொடுத்து உதவ சில சட்டங்களை இயற்றிற்று. நிலச்சீர்திருத்தக் கடன்கள் சட்டம் 1883ஆம் ஆண்டிலும், விவசாயிகள் கடன்கள் சட்டம் 1884ஆம் ஆண்டிலும் இயற்றப்பெற்றன. கடனைத் தீர்க்கமுடியாத நிலையில் அடைமானம் வைத்திருந்த நிலத்தை வட்டித் தொழிலருக்கு விற்றுவிடுவதைத் தடை செய்து 1879ஆம் ஆண்டில் தக்காண விவசாயிகள் நிவாரணச் சட்டம் இயற்றப்பட்டது.

அந் நாளைய சென்னை அரசாங்கம் சர் பிரடரிக் நிக்கல்சன் என்னும் அதிகாரியை ஐரோப்பாவிற்கு அனுப்பி அங்குக் கூட்டுறவு இயக்கம் நடந்துவரும் முறையினைக் கண்டுவருமாறு பணித்தது. அந்த அடிப்படையில், நம் நாட்டில் விவசாய வங்கிகள் ஏற்படுத்தக்கூடிய வாய்ப்பையும் ஆராய்ந்து பரிந்துரைகள் செய்யுமாறும் அவரைப் பணித்தது. அவர் 1897இல் தமது அறிக்கையைச் சென்னை அரசுக்குப் பணிந்தளித்தார். இதற்கிடையில் நாட்டில் சில பகுதிகளில் கடன் வழங்கு நிலையங்கள் துவங்கப்பெற்றன. ஐக்கிய மாகாணங்களில் கூட்டுறவுச் சங்கங்களும், சென்னை மாகாணத்தில் நிதிகளும் (Nidhis) இயங்கி வந்தன. நிக்கல்சன், அக் காலத்தில் பிரஷ்யா (Prussia) நாட்டில் இயங்கிவந்த வரையறுப் பொறுப்புக் (unlimited liability) கொண்ட கூட்டுறவு நாணயச் சங்கங்கள் போன்ற சங்கங்கள் இந்தியாவில் நிறுவப்பட வேண்டுமென்று பரிந்துரைத்தார். அவரது அறிக்கையில் இறுதியில் 'ரய்பீசனைக் கண்டுபிடி' (Find Raiffeisen) என்ற செய்தியை இந்தியாவுக்கு விடுத்தார். 1901ஆம் ஆண்டு இந்தியப் பஞ்சக் குழு (Indian Famine Commission) வினர் நிக்கல்சனின் பரிந்துரைகளை ஏற்றுப் பரஸ்பர நாணயச் சங்கங்கள் (Mutual Credit Associations) நிறுவப்படலாமென்று பரிந்துரைத்தனர்.

இந்திய அரசு 1901ஆம் ஆண்டு சர் எட்வர்ட் லா (Sir Edward Law) தலைமையில் கூட்டுறவுச் சங்கங்கள் துவங்குவது பற்றி ஆராய ஒரு குழுவை நியமித்தது. இக் குழுவினரும் ரய்பீசன் வகைக் கூட்டுறவுச் சங்கங்கள் இந்தியாவில் துவங்கப்படலாமென்று பரிந்துரைத்தனர். இதே நேரத்தில் இந்திய நாட்டு நிர்வாகப் பணி (Indian Civil Service)யினைச் சேர்ந்த உள்ளார்வமிக்க சில அலுவலர்கள் தத்தம் ஆட்சி எல்லைக்குள் சில கூட்டுறவுச் சங்கங்களை அமைத்திட முனைந்தனர். வங்காளத்தில் திரு. மாக்லகன் என்பார் இதற்கான முன்னோடிப் பணிகளை நாட்டின் வடகிழக்குப் பகுதிகளில் செய்து வந்தார். இங்ஙனமாகப்

$$\therefore \quad a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$$

$$a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$

ஆகும். இவைகளே x, y, z அச்சுக்களில் முடுக்கத்தின் எண்ணிப் பகிர்வுகள் ஆகும்.

3·10-5. முடுக்கத்தின் எண்மதிப்பு, செயல்படும் திசை ஆகியவற்றை வரையறுத்தல்.

$$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$$

$$\therefore \quad a^2 = \underline{a} \cdot \underline{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

எனவே $a = + \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

முடுக்கம் செயல்படும் கோடு, x, y, z அச்சுக்களுடன், முறையே θ_x, θ_y, θ_z என்னும் கோணங்களைத் தாங்கினுல் அக்கோட்டின் திசைக் கிடக்கைகள்,

$$\cos \theta_x = \frac{ax}{a}\,; \ \cos \theta_y = \frac{ay}{a}\,; \ \cos \theta_z = \frac{az}{a}$$

என்னும் சமன்பாடுகளால் வரையறுக்கப்படும்.

[குறிப்பு (1) t என்னும் கணத்தில், முடுக்கத்தின் திசை, துகள் இயங்கும் பாதையில், P என்னும் புள்ளிக்கு உரிய நிலையித் திசையின் போக்கிலோ அல்லது $\underline{P}$ யில் இயங்கும் பாதைக்கு வரையும் தொடுகோட்டு திசையிலோ இருக்கவேண்டியதில்லை.

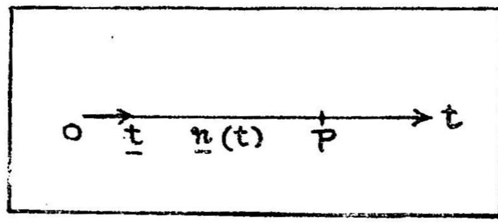
(2) ஆனுல் நேர்கோட்டியக்கத்தைப் பெற்றுள்ள துகள் ஒன்றின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவை துகளின் நேர் கோட்டுப் பாதையை வரையறுக்கும் $\underline{t}$ என்னும் நிலையான ஓரலகுத்திசையின் இன திசையிலேயே அமையும். ஏனெனில், t என்னும் நேரத்தில்,

$$\underline{r} = r\,\underline{t} \quad \text{எனில்,}$$

$$\underline{v} = \frac{d\,\underline{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\underline{t} \quad \text{என்றுகும்.}$$

மேலும் $$\underline{a} = \frac{d\,\underline{\dot{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{dr}{dt}\underline{t}\right\} = \frac{d^2r}{dt^2}\underline{t} \quad \text{ஆகும்.}$$

ஆகவே திசைவேகம், முடுக்கம்-ஆகியவை துகளின் நேர் கோட்டுப் பாதையிலேயே அமைகின்றன.



படம் 3·12

(3) துகளின் முடுக்கம் தெரியுமெனில், அதன் திசைவேகம் தொகையீடு செய்வதால் வரையறுக்கப்படும்.

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x \qquad \therefore \quad v_x = \int a_x \, dt + c_1$$

$$\frac{dv_y}{dt} = a_y \qquad \therefore \quad v_y = \int a_z \, ds + c_2$$

$$\frac{dv_z}{dt} = a_z \qquad \therefore \quad v_z = \int a_z \, dt + c_6$$

c_1, c_2, c_3 என்னும் தொகையீட்டு மாறிலிகள் (Constants of integration) தொடக்க நிபந்தனைகளால் தீர்மானிக்கப்படும்.

மேலும்,

$$\frac{dx}{dt} = v_x \qquad \therefore \quad x = \int v_x \, dt + c_4$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \qquad y = \int v_y \, dt + c_5$$

$$\frac{dz}{dt} = v \qquad z = \int v_z \, dt + c_6$$

$$\frac{ds}{at} = v \qquad s = \int v \, dt + c_7$$

ஆகவே துகளின் நிலைக்குரிய அச்சுத் தொலைவுகளும், அது பாதையில் கடந்த தொலைவையும் வரையறுக்க முடிகிறது.

(4) நேர்கோட்டியக்கத்தைப் பெற்ற துகள் ஒன்றின் முடுக்கம் மாறிலியாக இருக்குமெனில், துகளின் இருப்பிடத்தை எளிதில் வரையறுக்க முடியும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x = \text{ஒரு மாறிலி}$$

$$\therefore \quad v_x = \int a_x \, dt + c_1 = a_x t + c_1$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\therefore \quad x = \int v_x \, dt + c_2$$

$$= \int (a_x t + c_1) \, dt + c_2$$

$$= a_x \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

3·11. மாதிரிக் கணக்குகள்

3·11-1. t என்னும் நேரத்தில் துகள் இருக்கும் இடத்திற்கு உரிய நிலைத்திசையி $\underline{r}(t) = 2 \sin 5t \, \underline{j} + (5 + 2 \cos 5t) \, \underline{i}$ மீ எனில்

(i) $t = 3$ வினாடியாக இருக்கும்போது துகளின் திசை வேகத்தையும்,

(ii) $t = 0$ விலிருந்து $t = 3$ வினாடி வரை துகள் கடந்த தொலைவையும் காண்க.

(i) $\underline{r}(t) = 2 \sin 5t \, \underline{j} + (5 + 2 \cos 5t) \, \underline{i}$ மீட்டர்

$$\underline{v} = \frac{d}{dt} \{ \underline{r}(t) \} = -10 \sin 5t \, \underline{i} + 10 \cos 5t \, \underline{j} \text{ மீ/வி}$$

எனவே $v_x = -10 \sin 5t$; $v_y = 10 \cos 5t$

ஆதலால் $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-10 \sin 5t)^2 + (10 \cos 5t)^2}$
$= 10$ மீ/வி

$t = 0$ வி. உள்ளபோது

$$\underline{r}(t) = (5 + 2 \cos 0) \, \underline{i} + (2 \sin 0) \, \underline{j} = 7 \, \underline{i} + 0 \, \underline{j}$$

$t = 3$ விநாடியாக உள்ளபோது

$$\underline{v} = (-10 \sin 15)\underline{i} + (10 \cos 15)\underline{j}$$

$$= -(10\sin 15 \times 57{\cdot}3^\circ)\underline{i} + (10\cos 15 \times 57{\cdot}3^\circ)\underline{j}$$

$$= -10 \sin 140^\circ i + 10 \cos 140^\circ \underline{j}$$

$$= -6{\cdot}43\, \underline{i} \neq 7{\cdot}66\, j \text{ மீ/வி}$$

$$v_x = -6{\cdot}43\,; \quad v_y = -7\ 66 \text{ மீ/வி}$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{10 \cos 140}{10 \sin 140}$$

$$= -\cot 140^\circ = \cot 40^\circ = \tan 50^\circ$$

$$\therefore \quad \theta = 50^\circ$$

(ii) $s = \int v dt + c$

$$= \int 10\, dt + c$$

$$s = 10t + c$$

$t = 0$ என்னும் நேரத்தில் $s = 0$ என்பதால்

$$0 = 0 + c \qquad \therefore \quad c = 0$$

$$\therefore \quad s = 10t$$

$\therefore \quad t = 3$ விநாடியாக உள்ளபோது $s = 30$ மீ.

3·11-2. t என்னும் விநாடியில் துகள் ஒன்றின் இருப்பிடத்திற்குஉரிய நிலைத்திசையி

$\underline{r}(t) = (4t-t^3)\, i + (3-2t)\, j - 3t^2\, \underline{k}$ செ மீ. எனில், நேரம் 1 விநாடியாக உள்ளபோது துகளின் இருப்பிடத்தையும், அப்பொழுது அதன் திசைவேகத்தையும் காண்க.

இங்கு $x(t) = 4t-t^3\,;\ y(t) = 3-2t\,;\ z(t) = -3t^2$.

$t = 1$ என்றால், $x = 3;\ y = 1;\ z = -3$

$$|\,\underline{OP}\,| = |\,\underline{r}(t)\,| = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19} \text{ செ.மீ.}$$

அப்பொழுது $\underline{OP}$ யின் திசைக்கிடக்கைகள்

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{19}}; \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{19}}; \cos \gamma = -\frac{3}{\sqrt{19}}$$ ஆகும்.

துகளின் திசைவேகம் $\underline{v} = \frac{d\,\underline{r}}{dt} = -\ \{(4-3t^2)\underline{i}$

$-2\underline{j} - 6t\underline{k}\}$ செ.மீ./வி.

$$\underline{v}\,\Big|_{t=1} = \underline{i} - 2\underline{j} - 6\underline{k}$$ செ.மீ./வி.

$$\underline{v} = \sqrt{1^2+2^2+6^2} = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}$$ செ.மீ./வி.

திசைவேகம் செயல்படும் கோட்டின் திசைக்கிடக்கைகள் முறையே

$$\cos \theta_x = \frac{1}{\sqrt{41}}; \quad \cos \theta_y = \frac{-2}{\sqrt{41}}; \quad \cos \theta_z = \frac{-6}{\sqrt{41}}$$ ஆகும்.

3·11-3. கீழ்க்காணும் நிலைத்திசையிகளையுடைய புள்ளிகளின் திசைவேகங்கள், முடுக்கங்கள் ஆகியவற்றை நேரம் $t = 1$ வி· உள்ளபோது காண்க.

(நேரம் t வினாடியையும், நெடுக்கை, கிடக்கைகளில் t ஆனது ஆரையன்களையும் குறிக்கிறது).

(i) $\underline{r}(t) = 4\cos t\,\underline{i} + 4\sin t\,\underline{j} + t^2\,\underline{k}$

(ii) $\underline{r}(t) = (t-\sin t)\underline{i} + (1-\cos t)\underline{j} + 4\sin\frac{t}{2}\underline{k}$

(iii) $\underline{r}(t) = 4t\,\underline{i} + 8\,\underline{j} + 2t^2\,\underline{k}$

(i) $\underline{r}(t) = 4\cos t\,\underline{i} + 4\sin t\,\underline{j} + t^2\,\underline{k}$

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = -4\sin t\,\underline{i} + 4\cos t\,\underline{j} + 2t\,\underline{k}$$

$$v = |\,\underline{v}\,| = \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 4t^2}$$

$$= \sqrt{16 + 4t^2}$$

$$v\,\Big|_{t=1} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$ செ. மீ./வி.

$$\underline{a} = \ddot{\underline{r}} = -4\cos t\,\underline{i} - \sin t\,\underline{j} + 2\,\underline{k}$$

$$|\,a\,| = \sqrt{16\cos^2 t + 16\sin^2 t + 4}$$

$$|\,a\,|\,\Big|_{t=1} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$ செ.மீ./வி².

(ii) $\underline{r}(t) = (t - \sin t)\underline{i} + (1 - \cos t)\underline{j} + 4\sin\frac{t}{2}\underline{k}$

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = (1 - \cos t)\underline{i} + \sin t\,\underline{j} + 4\cos\frac{t}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\underline{k}$$

$$= (1 - \cos t)\underline{i} + \sin t\,\underline{j} + 2\cos\frac{t}{2}\underline{k}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{1 + \cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t + 4\cos^2\frac{t}{2}}$$

$$= \sqrt{2(1 - \cos t) + 4\cos^2\frac{t}{2}}$$

$|\underline{v}|_{t=1} = 2$ செ.மீ./வி

$$\underline{a} = \ddot{\underline{r}} = \sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j} - \sin\frac{t}{2}\underline{k}$$

$$|a| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2\frac{t}{2}} = \sqrt{1 + \sin^2\frac{t}{2}}$$ செ மீ./வி^{2}

$|a|_{t=1} = 1{\cdot}109$ செ.மீ./(விநாடி)^2

(iii) $\underline{r}(t) = 4t\,\underline{i} + 8\,\underline{j} + 2t^2\,\underline{k}$

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = 4\,\underline{i} + 4t\,\underline{k}$$

$$\underline{a} = \ddot{\underline{r}} = 4\,k$$

$|\underline{v}| = \sqrt{16 + 16t^2} = 4\sqrt{1 + t^2}$ செ.மீ./வி.

$v|_{t=1} = 4\sqrt{2}$ செ.மீ./வி.

$|\underline{a}| = \sqrt{4^2} = 4$ செ.மீ./வி^{2}

3·11-4. $\underline{v_0} = v_0\,\underline{|\theta}$ என்னும் முகப்பு திசைவேகத்தை (Initial velocity) யுடைய எறிபொருள் (Projectile) ஒன்றின் இயங்குவரை

$$\underline{r}(t) = \{v_0 t\cos\theta\,\underline{i} + (v_0 t\sin\theta - 4{\cdot}9t^2)\,j\}\text{ மீ.}$$

எனக்கொண்டு $v_0 = \frac{4000}{3}$ மீ /வி., $\theta = 30^{\circ}$ எனில், எறி

பொருளின் வேகம், செல்லும் திசை ஆகியவற்றை, நேரம் 1 வி. என்றுள்ளபோது காண்க.

$$r(t) = v_0 t \cos\theta \, \underline{i} + (v_0 t \sin\theta - 4{\cdot}9t^2)\, \underline{j}$$

$$\underline{v} = \dot{r} = v_0 \cos\theta \, \underline{i} + (v_0 \sin\theta - 9{\cdot}8t)\, \underline{j}$$

$$\underline{v} = \left(\frac{4000}{3}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\underline{i} + \left(\frac{4000}{3}\ \frac{1}{2} - 9{\cdot}8\right) j$$

$$\dot{\theta} = 30$$

$$t = 1 \quad = \frac{2000}{\sqrt{3}}\, \underline{i} + \frac{1970{\cdot}6}{3}\, \underline{j}$$

$$|\, \underline{v} \,| = \sqrt{\left(\frac{2000}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1970{\cdot}6}{3}\right)^2} = 1179 \text{ மீ./வி.}$$

3·11-5. நேரம் t வினாடியாக உள்ளபோது, பரந்தவெளியில், இயங்கும் துகள் ஒன்று இருக்குமிடத்தின் அச்சுத் தொலைவுகள் முறையே,

$$x = 48t;\ \ y = \frac{1}{64}(4 - t^2)^2;\ \ z = 4t^2 \text{ செ. மீ.}$$

எனில், $t = 8$ வினாடியாக உள்ளபோது அதன் வேகத்தையும், அது இயங்கும் திசையை வரையறுக்கும் ஓரலகுத்திசையியையும் காண்க.

$$r(t) = 48t\, \underline{i} + \frac{1}{64}(4 - t^2)^2\, \underline{j} + 4t^2\, \underline{k} \text{ செ. மீ.}$$

$$\underline{v} = \dot{r} = 48\, \underline{i} - \frac{1}{64} t(4 - t^2)\, \underline{j} + 8t\, \underline{k}$$

$$v \,\Big|_{t=8} = \sqrt{48\, \underline{i} + 30\, \underline{j} + 64\, \underline{k}}$$

$$|\, \underline{v} \,|_{t=8} = \sqrt{48^2 + 30^2 + 64^2} = 85{\cdot}44 \text{ செ.மீ./வி.}$$

$$\underline{v} = |\, \underline{v} \,|\, \underline{t}$$

$$= 85{\cdot}44 \left[\frac{48}{85{\cdot}44}\, i + \frac{30}{85{\cdot}44}\, j + \frac{64}{85{\cdot}44}\, \underline{k}\right]$$

செ.மீ./வி.

எனவே நேரம் 3 வினடியாக உள்ளபோது துகள் இயங்கும் திசையில் அமையும் ஓரலகுத்திசையியானது

$$\underline{t} = \frac{48}{85\cdot44}\underline{i} + \frac{30}{85\cdot44}\underline{j} + \frac{64}{85\cdot44}\underline{k} \quad \text{ஆகும்.}$$

3·11-6. உருள்வளை (Cycloid) பாதையில் செல்லும் துகள் ஒன்று t நேரத்தில்,

$$\underline{r} = 5\left(t - \frac{1}{3}\sin 3t\right)\underline{i} + 5\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos 3t\right)\underline{j} \text{ மீ.}$$

என்னும் நிலைத்திசையியைப் பெற்றுள்ளது. $\underline{t}$ என்பது பாதையின் தொடுகோட்டிலமையும் ஓரலகுத்திசையியாகுமெனில், எச்சமயங்களில் $\underline{t} = \underline{i}$ என்றிருக்குமெனக் காண்க. அந்த நேரங்களில் $\underline{v}$-ன் மதிப்புக்களையும் காண்க.

$$\underline{r}(t) = 5\left(t - \frac{1}{3}\sin 3t\right)\underline{i} + 5\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos 3t\right)\underline{j}$$

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = 5(1 - \cos 3t)\underline{i} + 5\sin 3t\,\underline{j}$$

$$= 10\sin^2\frac{3t}{2}\underline{i} + 10\sin\frac{3t}{2}\cos\frac{3t}{2}\underline{j}$$

$$= 10\sin\frac{3t}{2}\left(\sin\frac{3t}{2}\underline{i} + \cos\frac{3t}{2}\underline{j}\right)$$

$$= 10\sin\frac{3t}{2}\underline{j}$$

$$\underline{t} = \sin\frac{3t}{2}\underline{i} + \cos\frac{3t}{2}\underline{j}$$

$\underline{i} = \underline{t}$ என்றிருக்க வேண்டுமாகில்,

$$\sin\frac{3t}{2} = 1 \text{ அல்லது } \frac{3t}{2} = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad k=0, 1, 2 \ldots$$

$$\therefore \quad t = \frac{2}{3}\pi\left(2k + \frac{1}{2}\right) = (4k+1)\frac{\pi}{3}, \quad k=0, 1, 2 \ldots$$

$$t = \frac{\pi}{3} \text{ என்றால் } \underline{v} = 10\sin\frac{\pi}{2}(\underline{i} + 0\,\underline{j})$$

$$= 10\,\underline{i} \text{ மீ./வி}$$

3·12 பயிற்சி

3·12-1. (x, y) - தளத்தியங்கும் ஒரு துகள் t என்னும் நேரத்தில் $x = 4t^2$; $y = 6t$ என்னுமிடத்திலமையுமெனில், $t = 1$ விநாடியாக உள்ளபோது, அதன் திசைவேகத்தைக் காண்க.

[விடை : $10 \,|\, \underline{36 \cdot 9^\circ}$]

3·12-2. இயங்கு துகள் ஒன்றின் இருப்பிடம் (t விநாடி நேரத்தில்)

$\underline{r} = 1 \cdot 36t^3 \, \underline{i} + 3 \cdot 62t \, \underline{j} + 2 \cdot 37t^2 \, \underline{k}$ மீ. எனில், நேரம் $t = 0.5$ விநாடியாக உள்ளபோது துகளின் வேகத்தையும், அதன் இயங்கும் திசையை வரையறுக்கும் ஓரலகுத்தொடுகோடு திசையியை $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ முறையில் காண்க.

[விடை : வேகம் = $4 \cdot 44$ மீ./வி.

$\underline{t} = - 0 \cdot 228 \, \underline{i} + 0 \cdot 815 \, \underline{j} + 0 \cdot 533 \, \underline{k}$]

3·12-3. ஒரு நேர்கோட்டியக்கத்தைப் பெற்ற துகள் ஒன்றின் இருப்பிடத்தை $\underline{r}(t) = 0 \cdot 5t^2 \, \underline{i} + 5 \, \underline{j}$ என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கிறது. நேரம் $t = 0, 1, 4$ என்னும் விநாடிகளில் $\underline{r}, \underline{v}, \underline{a}$ ஆகியவற்றை வரைபடம் மூலம் விளக்கிக் காட்டுக.

3·12-4. துகள் இயங்கும் பாதையில், t என்னும் விநாடி நேரத்தில் அதன் நிலையை

$$\underline{r}(t) = (2t^2 - 4t) \, \underline{i} + 2 \{ (t-1)^2 + 4(t-1) \, \underline{j} \text{ மீ.}$$

என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கிறது. துகளின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றை $t = 1$ விநாடி, $t = 3$ விநாடியாக உள்ள போது காண்க.

$$\underline{v}\Big|_{t=1} = 8 \,|\, \underline{90^\circ} \text{ மீ/விநாடி}$$

$$\underline{a}\Big|_{t=1} = 4\sqrt{2} \,|\, \underline{45^\circ} \text{ மீ/விநாடி}^2$$

[விடை : $\underline{v}\Big|_{t=3} = 4\sqrt{5} \,|\, \underline{63 \cdot 43^\circ}$ மீ./வி

$$\underline{a}\Big|_{t=3} = 4\sqrt{2} \,|\, \underline{45^\circ} \text{ மீ/.வி}^2$$]

3·12-5. முந்திய கணக்கில் (3·12·4-வது கணக்கில்) துகளின் சிறும வேக மதிப்பையும் அது ஏற்படும் நேரம், இடம், செயல்படும் திசை ஆகியவற்றையும் காண்க.

[குறிப்பு : $v^2 = 16(5 - 6t + 2t^2)$

சிறும வேகம் $= 2\sqrt{2}$ மீ./வி. இவ்வேகம், நேரம் $t = 3/2$ விநாடியாக உள்ளபோது, $r = -\frac{3}{2}\left(\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}\right)$ மீ. என்னும் நிலையில், $\left(-\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}\right)$ என்னும் ஓரலகுத் திசையியை நோக்கிச் செயல்படுகிறது.]

3·12-6. t என்னும் நேரத்தில் (விநாடியில்) இயங்கும் துகளின் நிலையை $\underline{r} = \{(t+1)^2\,\underline{i} + (t+1)^{-2}\,\underline{j}\}$ மீ. என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுப்பதாகில், அதன் இயங்கு வரை ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவு (Rectangular hyperbola) எனக் காண்க. நேரம் $t = 0$ விநாடி, $t = \frac{1}{2}$ விநாடி என்றுள்ள சமயங்களில், துகளின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றையும் காண்க.

[விடை : $xy = 1$,

$$t = 0 \quad \underline{v} = 2\sqrt{2}\left(\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}\right) \text{ மீ./வி.};$$

$$\underline{a} = 2\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\,\underline{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\,\underline{j}\right) \text{ மீ./வி}^2.$$

$$t = 0{\cdot}5 \text{ வி.} \quad \underline{v} = 3{\cdot}065\left(\frac{81}{82{\cdot}50}\,\underline{i} - \frac{16}{82{\cdot}50}\,\underline{j}\right) \text{ மீ./வி.};$$

$$\underline{a} = 2{\cdot}325\,(0{\cdot}8602\,\underline{i} + 0{\cdot}5097\,\underline{j}) \text{ மீ./வி}^2.$$

3·12·7. இயங்கும் துகள் ஒன்றின் பாதையை, t விநாடி நேரத்தில் $x = 10(1 - e^{-t})$ செ.மீ.; $y = \frac{10t}{1+t}$ செ.மீ. என்னும் சமன்பாடுகள் வரையறுக்குமெனில் அதன் நிலை, திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றை $t = 0$, $t = 1$ வி. யாக உள்ளபோது காண்க.

[விடை : $t = 0$ என்னும் நேரத்தில்

$\underline{r} = 0$; $\underline{v} = 10\sqrt{2}\ |\underline{315^\circ}$ மீ./வி.;

$\underline{a} = 10\sqrt{5}\ |\underline{153{\cdot}8^\circ}$ மீ./வி^{2}; $t = 1$ வி. நேரத்தில்

$\underline{r} = 6{\cdot}321\,\underline{i} + 5\,\underline{j}$ மீ.

$\underline{v} = 4{\cdot}45\ |\underline{124{\cdot}2^\circ}$ மீ./வி.

$\underline{a} = 4{\cdot}45\ |\underline{304{\cdot}2^\circ}$ மீ./வி^{2}.]

3·12-8. பரந்தவெளியில் t வினுடியில் துகளின் இயங்கு வரை நிலையை

$$\underline{r}(t) = ct\,\underline{i} + R\sin pt\,\underline{j} + R\cos pt\,\underline{k} \text{ செ.மீ.}$$

என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுப்பதானுல் அதன் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் எண்மதிப்பைக் காண்க.

[விடை : $v = \sqrt{c^2 + R^2p^2}$ செ.மீ./வி.; $a = Rp^2$ செ.மீ./வி^{2}]

3·12-9. விரிப்பரப்புச்சுருளி (Parabolic spiral) ஒன்றிலி யங்கும் துகளின் நிலையை, t என்னும் நேரத்தில் (வினுடியில்)

$$\underline{r} = 4\cos t\,\underline{i} + 4\sin t\,\underline{j} + 3t\,\underline{k} \text{ மீ.}$$

என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கிறது. துகளின் வேகம் சீராக உள்ளதென நிறுவுக. அதன் மதிப்பையும் காண்க.

[விடை : $v = 5$ மீ./வி.]

3·12-10. $\underline{r} = 0{\cdot}9t\,\underline{i} - 0{\cdot}075t^4\,\underline{j} + 0{\cdot}6t^2\,\underline{k}$ மீ.

என்னும் நிலைத்திசையியைக் கொண்ட இயங்கும் துகளின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றை, நேரம் $t = 1$ வினுடியாக உள்ள போது காண்க.

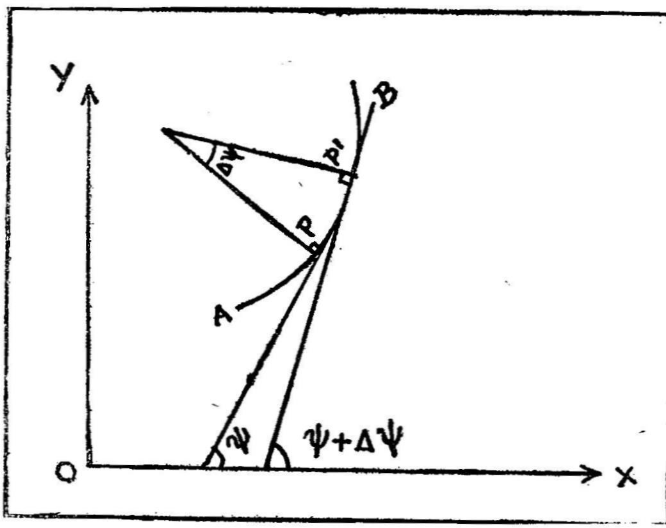
[விடை : $\underline{v} = 1{\cdot}53\,(0{\cdot}488\,\underline{i} - 0{\cdot}196\,\underline{j} + 0{\cdot}8\,\underline{k})$ மீ./வி.

$\underline{a} = 1{\cdot}5\,(0{\cdot}6\,\underline{j} + 0{\cdot}8\,\underline{k})$ மீ./வி^{2}.]

3·13 ஒரு தளத்து வளைகோட்டிலியங்கும் துகளின் முடுக்கத்தைத் தொடுவரை திசையிலும் செங்குத்துத் திசையிலும் காணல் : (To find expression for the acceleration of a particle moving in a plane curve along the tangential and normal directions)

பரந்த வெளியில் துகளின் இயக்கம் வளைகோட்டிலமையுமாகில் திசைவேம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் கூறுகள் (components)

ஏதேனும் மூன்று நிலையானதும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும் ($\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$) என்னும் திசைகளில் பெறப்பட்டன. சில சமயங்களில், குறிப்பாக, துகளின் பாதை ஒரு தளத்திலமையும் போது, இயங்கும் துகளின் முடுக்கத்தைத் தொடுவரை திசையிலும் காணுதல், கணிப்பு முறையை எளிதாக்கக் கூடும்.



படம் 3·13

(x, y)-தளத்தில் படம் (3·13)-ல் காட்டியுள்ளவாறு, AB என்னும் வளைவுப் பாதையில், துகள் ஒன்று இயங்கட்டும். t என்னும் நேரத்தில், துகள் ABயில் P என்னுமிடத்தில் இருப்பதாகக் கொள்க. வளைவுப் பாதையின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடுவரை திசையையும், அதற்குச் செங்குத்தான திசையையும் இணைக்கலாம். எனவே, P என்னுமிடத்தில் வளைவுப்பாதைக்கு வரையும் தொடுவரை திசையில் $\underline{t}$ என்னும் ஓரலகுத்திசையியையும், அதற்கு செங்குத்தான திசையில் n ஒன்னும் ஓரலகுச் செங்குத்துத் திசையியையும் குறிக்க. தொடுவரை, செங்குத்துத் திசைகள், பாதையிலமையும் புள்ளிகளின் இருப்பிடத்திற்கு ஏற்றவாறு மாறத் தக்கவை.

$(t + \Delta t)$ என்னும் நேரத்தில், துகள் Pக்கு அருகிலுள்ள P' என்னும் புள்ளியில் இருப்பதாகக் கொள்க. அங்கு தொடுவரை, செங்குத்துத் திசைகளில் வரையப்படும் ஓரலகுத்திசையிகளான

$\underline{t'}$, $\underline{n'}$ என்பவை முன்னரே எடுத்த $\underline{t}$, n என்பவை செயல்படும் திசைகளுக்கு மாறுபட்டுள்ளன. அதாவது, இவ்விதத் திசையிகள் எண்மதிப்பால் நிலையான ஒற்றைமதிப்பைப் பெற்ற மாறிலிகளாக இருந்தபோதிலும், அவற்றின் திசைகள் மாறுவதால், $\underline{t}$, $\underline{n}$ என்பவை திசைமாறிகளாகும். ஆதலால் $\frac{d\underline{t}}{dt}$, $\frac{d\underline{n}}{dt}$ என்னும் அவற்றின் வகைக்கெழுக்கள் இருக்கின்றன.

துகள் $t=0$ என்னும் தொடக்கநேரத்தில், P_0 என்னுமிடத்திலிருந்து இயங்குமெனில், அது பாதையில் t கணத்தில், P-ஐ அடையும்போது $\widehat{P_0P} = s$ என்னும் தொலைவைக் கடந்ததாகவும், $(t+\triangle t)$ என்னும் கணத்தில், P க்கு அருகில், பாதையில் $\widehat{PP'} = \triangle s$ என்னும் தொலைவில் $\underline{P'}$ என்னும் புள்ளியில் அமைவதாகக் கொள்க.

அப்பொழுது, $\triangle t$ என்னும் மிகச் சிறிய நேரத்தில், துகள் பாதையில் கடந்த தொலைவு $\triangle s$ ஆகும். P என்னுமிடத்தில், துகள் $\underline{V}$ என்னும் திசைவேகத்தில் செல்வதாகில், அது பாதைக்கு $\underline{P}$யில் வரையும் தொடுகோட்டில் அமையும். எனவே $\underline{V} = V\underline{t}$ ஆகும்.

அதுபோலவே துகள் $\underline{P'}$ என்னுமிடத்தை எய்தும்போது, அதன் திசைவேகத்தை $\underline{V} + \triangle \underline{V}$ எனக்கொண்டால், அதுவும் P'ல் வரையும் தொடுகோட்டில் செயல்படும். ஆதலால் $\underline{V} + \triangle \underline{V} = (V + \triangle V)\underline{t'}$ ஆகும்.

P, P' என்னும் புள்ளிகளில், பாதைக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் x அச்சுடன் ψ, $\psi + \triangle\psi$ என்னும் கோணங்களை அமைப்பதானால், $(\underline{t}, \underline{t'})$ என்னும் திசையிகளுக்கிடையிலமையும் கோணம் $\triangle\psi$ ஆகும். மேலும் $\underline{n}$, $\underline{n}$ திசையிகளை நீட்டுக. அவைகள் C என்னும் இடத்தில் வெட்டிக்கொள்ளட்டும். C யில் $\underline{n}$, $\underline{n'}$ என்பவைகளும் $\triangle\psi$ என்னும் கோணத்தை அமைக்கும். C என்னும் புள்ளியானது வளைவுமையம் (centre of curvature) எனப்படும். C, P-களுக்கு இடையிலமையும் தொலைவு வளையாரம் (Radius of curvature) எனப்படும். அது ρ என்னும் கிரேக்க எழுத்தால் குறிக்கப்படும். படம் 3·14 லிருந்த $\triangle s = \rho\triangle\psi$ என அறியலாம்.

$$\therefore \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta \psi}{\Delta t}$$

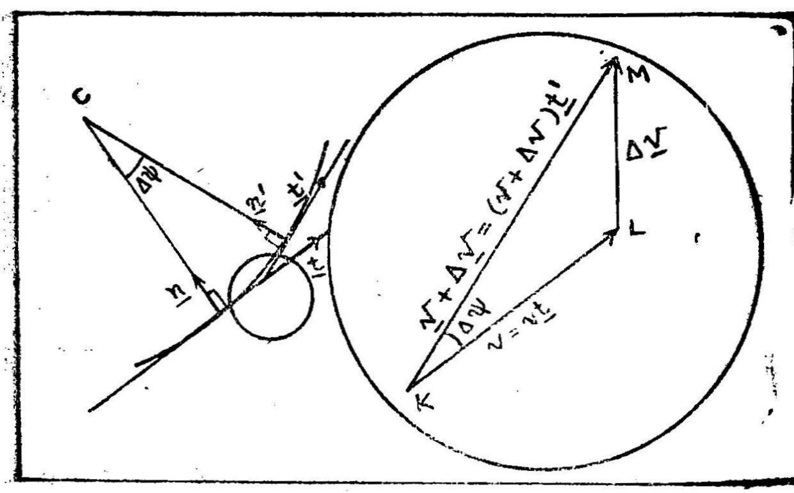
துகளின் வேகமானது

$$v = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$= \rho \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta \psi}{\Delta t}$$

$$= \rho \frac{\Delta \psi}{dt}$$

$$\underline{v} = v\,\underline{t} = \rho \frac{d\psi}{dt}\,\underline{t}$$



படம் 3 14

படம் (3·14)-ல் காட்டியுள்ளபடி Δt நேரத்தில், $\Delta \underline{v}$ என்னும் திசை வேகத்தின் மாற்றம், P என்னும் புள்ளியில் செயல்படும் $\underline{v}$ என்னும் திசை வேகத்தின் ''எண்மதிப்பு'' மிகுதிப்பாட்டினாலும் (Increase in the magnitude of the velocity at P) அதன் திசையின் மாற்றத்தாலும் ஏற்பட்டு இருப்பதால், அது ஒரு திசையி ஆகும். எனவே $\underline{v} + \Delta \underline{v}$ என்னும் திசைவேகம், P' என்னுமிடத்தில் வரையப்படும் தொடுகோட்டு திசையில் செயல்படும். எனவே $\underline{v} + \Delta \underline{v} = (v + \Delta v)\,\underline{t'}$ ஆகும். இங்கு $\Delta \underline{v}$ என்பது, துகள் P யிலிருந்து P' என்னும் புள்ளியை அடையும்போது ஏற்பட்ட

திசைவேகத்தின் மாற்றத்தை அறிவிக்கின்றதால், $\underline{v} = v\,\underline{t}$. $\underline{v} + \triangle \underline{v} = (v + \triangle v)\,\underline{t'}$. $\triangle \underline{v}$ என்னும் திசையிகளை, படம் 3·14-ல் காட்டியவாறு KLM என்னும் முக்கோணத்தின் பக்கங்களான KL, KM, LM என்பவை குறிப்பதாகக் கொள்க.

முடுக்கத்தின் வரையறையின்படி

$$\underline{a} = \underset{\triangle t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\triangle \underline{v}}{\triangle t}$$

$$= \underset{\triangle t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{(v + \triangle v)\,\underline{t'} - v\,\underline{t}}{\triangle t}$$

$$= \underset{\triangle t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{(v+\triangle v)\cos\triangle\psi\ \underline{t} + (v+\triangle v)\sin\triangle\psi\ \underline{n} - v\ \underline{t}}{\triangle t}$$

$$= \underset{\triangle t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{(v+\triangle v)\,\underline{t} + (v+\triangle v)\,\triangle\psi\ \underline{n} - v\,\underline{t}}{\triangle t}$$

$$= \underset{\triangle t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\triangle v}{\triangle t}\underline{t} + v\frac{\triangle\psi}{\triangle t}\underline{n}$$

$$= \frac{dv}{dt}\underline{t} + v\,\frac{d\psi}{dt}\underline{n}$$

$$= \frac{dv}{dt}\underline{t} + v \cdot \frac{v}{\rho}\underline{n}$$

$$= \frac{dv}{dt}\underline{t} + \frac{v^2}{\rho}\underline{n}$$

ஆகும். ($\triangle\psi$ என்பது சிறியதொரு ஆரையனளவைக் குறிப்பதால், நுண் எண்ணியின் முதல் வரிசைக் கோவைகளுக்குத் திருத்தமாக $\cos\triangle\psi = 1$, $\sin\triangle\psi = \triangle\psi$ எனக் கொள்ளப் பட்டன).

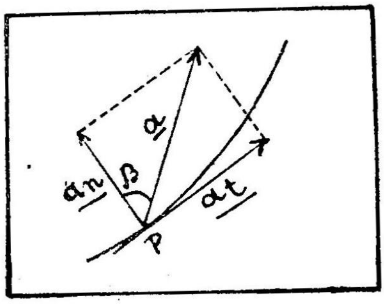
$\underline{a} = \underline{a_t} + \underline{a_n} = a_t\,\underline{t} + a_n\,\underline{n}$ எனக்கொண்டால் வளை கோட்டியியங்கும், துகளின் முடுக்கத்தின் கூறுகள் தொடுவரை திசையிலும், அத்திசைக்குச் செங்குத்துத் திசையிலும், முறையே

$$\underline{a_t} = \frac{dv}{dt}\,\underline{t}$$

$$\underline{a_n} = \frac{v^2}{\rho}\,\underline{n}$$

ஆகும். இவை படம் (3·15)-ல் காட்டப்பட்டுள்ளன.

[குறிப்பு : (1) வளைவுப் பாதையில் இயங்கும் துகளின் முடுக்கம் பாதையின் தொடுகோட்டில் செயல்படுவதில்லை. அதன் $\underline{a_t}$ என்னும் ஒரு பகுதியே தொடுகோட்டில் அமைகிறது.



படம் 3 15

(2) $\underline{a_n}$ என்னும் பகிர்வு, வளைவுமையத்தை நோக்கியே செயல்படும்.

(3) திசையி நுண்கணித முறைப்படியும், a யின் தொடுகோடு, செங்குத்துக்கோட்டுப் பகிர்வுகளை வரையறுக்க முடியும்.

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\,(v\,\underline{t})$$

$$= \frac{dv}{dt}\,\underline{t} + v\,\frac{d\underline{t}}{dt}$$

$\underline{t}$, $\underline{t'}$ என்பவைகளின் ஒன்ருவதாலும் அவைகளுக்கு இடையிலமையும் கோணம் $\Delta\psi$ ஆனதாலும், $\underline{t}$, $\underline{t'}$ களுக்குமுள்ள மாற்றத்தை அறிவதற்கு படம் (3·16)-ல் காட்டியவாறு $\underline{t}$, $\underline{t'}$ என்னும் ஓரலகுத்திசையிகளை, ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பக்கங்களாகக்கொள்க. $\Delta\underline{t}$ என்பது $\underline{t}$, $\underline{t'}$ களின் மாற்றத்தைக் குறிப்பதாகில், திசையி முக்கோண விதிப்படி

$$\Delta\underline{t} = \underline{t'} - \underline{t}$$

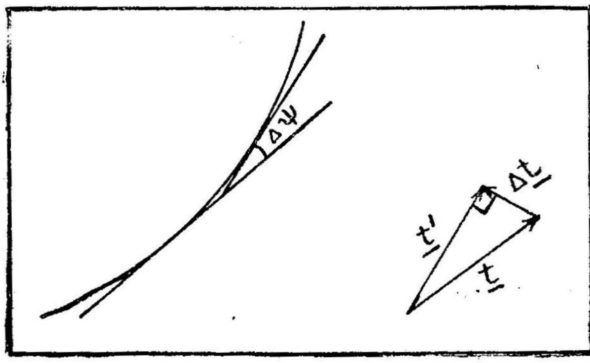
$$|\,\Delta\underline{t}\,| = 2\sin\frac{\Delta\psi}{2}$$

மேலும் $$\underset{\Delta t\to 0}{\text{எல்லை}} \left|\frac{\Delta t}{\Delta\psi}\right| = \underset{\frac{\Delta\psi}{2}\to 0}{\text{எல்லை}} \left(\frac{\sin\frac{\Delta\psi}{2}}{\frac{\Delta\psi}{2}}\right) = 1$$ ஆகும்.

$\Delta\psi$ பூச்சியத்தை அணுகும்போது, $\Delta\underline{t}$ செயல்படும்திசை, $\underline{t}$ யின் திசைக்கு செங்குத்தாக அமையும். அத்திசையை, $\underline{n}$ என்னும் ஓரலகுத்திசையி குறிப்பதானுல்

$$\frac{d\underline{t}}{d\psi} = \underset{\Delta\psi \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta \underline{t}}{\Delta\psi} = 1\ (\underline{n})$$ ஆகும்.

எனவே $\frac{d\underline{t}}{d\psi}$ என்பது, $\underline{t}$ சுழலும் திசையில், $\underline{t}$ க்குச் செங்குத்



படம் 3·16

தாக உள்ள ஓரலகுத்திசையியாகிறது. இதுவே வளைவுப் பாதையில் செங்குத்துத்திசையிலமையும் $\underline{n}$ என்னும் தலையாய செங்குத்து ஓரலகுத்திசையியாகும் (Unit principal normal)

$$\frac{d\underline{t}}{dt} = \frac{d\underline{t}}{d\psi}\frac{d\psi}{dt}$$

$$= \frac{d\psi}{dt}\underline{n}$$

$$= \frac{v}{\rho}\underline{n}$$

$$\underline{a} = \left(\frac{dv}{dt}\right)\underline{t} + v\left(\frac{v}{\rho}\right)\underline{n}$$

$$= \frac{dv}{dt}\underline{t} + \frac{v^2}{\rho}\underline{n}$$ ஆகும்.

(4) $\underline{b}$ என்னும் ஓரலகு இருமைச் செங்கோட்டு திசையியானது (Unit bi normal) $\underline{t}, \underline{n}$ களுக்குச் செங்குத்தாகவும், அதன் போக்கு $\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$ என்பவை ஒரு வலப்புற குறிப்பிட்டச்சு முறையை ஏற்பதாகவும் எடுக்கப்படும். அப்பொழுது $\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$ என்னும் மற்றொரு சுட்டமைப்பு முறையும் கிடைக்கும்.

(5) $\underline{a_t}$, $\underline{a_n}$ என்பவற்றின் தொகுபயன் (விளைவு) முடுக்கம் $\underline{a}$ ஆகும். $\underline{a}$ ஆனது, $\underline{a_n}$ உடன் β என்னும் கோணத்தைத் தாங்குவதாகில், $\underline{a}$ ன் "எண்மதிப்பு", "செயல் படும் திசை" ஆகியவற்றை

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}\ ; \quad \tan\beta = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{v^2}{\rho}}$$

என்னும் சமன்பாடுகள் வரையறுக்கின்றன.

(6) துகள் ஒரு நேர்கோட்டியக்கத்தைப் பெற்றுள்ளபோது $\Delta\psi = 0$ ஆகும். எனவே $\frac{v}{\rho} = \frac{d\psi}{dt} = 0$.

அதாவது, $\rho \rightarrow \infty$ ஆகும்.

$$\therefore\ \underline{a_n} = \frac{v^2}{\rho}\underline{n} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

ஆதலால்
$$\underline{a} = \underline{a_t} + \underline{a_n}$$
$$= \underline{a_t} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே நேர் கோட்டியக்கத்தைப் பெற்றுள்ள துகளின் முடுக்கம் மட்டுமே அதன் நேர்கோட்டுப் பாதையிலேயே அமைகிறது.

(6a) ஒருதுகள் தளத்திலியங்குவதாகில் அதன் தேக்காட்டின் முடுக்கக் கூறுகளுக்கும், தொடுவரை, செங்குத்துத்திசை முடுக்கக் கூறுகளுக்கும் உள்ள தொடர்புகளை பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

a_x, a_y என்பவை x, y திசைகளில் முடுக்கத்தின் பகிர்வுகள். a_t, a_n என்பவை தொடுவரை, செங்கோட்டு திசைகளில் முடுக்கத்தின் பிரிவுகளாகும். t என்னும் நேரத்தில், ஒரு தள வளைவுப் பாதையிலியங்கும் துகளின் முடுக்கத்தின் இவ்வித பகிர்வுகள், படம் (3·17)-ல் காட்டியவாறு அமையட்டும். அப்போது

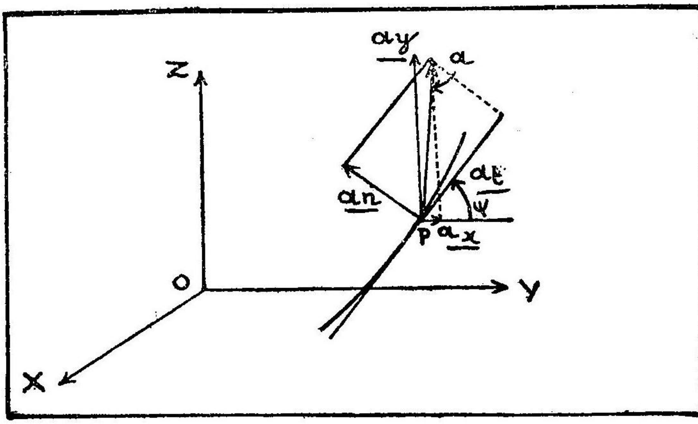
$$a_x = a_t \cos\psi - a_n \sin\psi$$

$$a_y = a_t \sin\psi + a_n \cos\psi, \qquad \tan\psi = \frac{dy}{dx}$$

$$a_t = a_x \cos \psi + a_y \sin \psi$$

$$a_n = a_y \cos \psi - a_t \sin \psi$$

ஆகும்.



படம் 3·17

(7) துகள் ஒன்று வட்டத்திலியங்குவதாகில், அதன் முடுக்கத்தைத் தொடுவரை, மையத்தை நோக்கிய திசைகளில் கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

இங்கு $s = r\theta$ என்பதால்

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \underline{a_t} = \frac{dv}{dt}\,\underline{t}$$

$$= \frac{d}{dt}\,(r\dot{\theta})\,\underline{t}$$

$$= r\ddot{\theta}\,\underline{t}$$

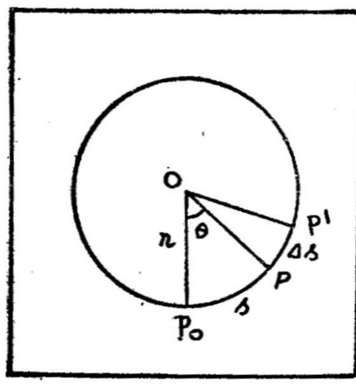
$$\underline{a_n} = \frac{v^2}{\rho}\,\underline{n}$$

$$= \frac{r^2\dot{\theta}^2}{r}\,\underline{n}$$

$$= r\dot{\theta}^2\,\underline{n}$$

$$\therefore \quad \underline{a} = \underline{a_t} + \underline{a_n} \;=\; r\ddot{\theta}\,\underline{t} + r\dot{\theta}^2\,\underline{n}$$

எனவே தொடு வரைத்திசையில் முடுக்கத்தின் எண்மதிப்பு $= r\ddot{\theta}$ என்றும், வட்டமையத்தை நோக்கிய திசையில் முடுக்கத்தின் எண்மதிப்பு $= r\dot{\theta}^2$ என்றும் ஆகும்.



படம் 3·18

(8) துகள் சீரான வேகத்துடன் வட்டத்தை வரைந்தால் v மாறுது. எனவே $\frac{dv}{dt} = 0$ ஆகும். அப்பொழுது தொடுவரை முடுக்கம் பூச்சியமாகிறது. துகள் வட்டமையத்தை நோக்கிய திசையில் மட்டும்தான் முடுக்கத்தைப் பெற்றுள்ளது. எனவே ஒரு துகளானது ஆரை r என்றுடைய வட்டம் ஒன்றை மாறுத v என்னும் வேகத்துடன் வரைந்தால் எந்நேரத்திலும் அதன் முடுக்கம் வட்டமையத்தை நோக்கியே, $\frac{v^2}{r}$ என்னும் அளவில் இருக்கும்.

3·14 மாதிரிக் கணக்குகள்

3·14-1. இயங்கும் துகள் t என்னும் நேரத்தில், வளை வரையில் இருக்குமிடத்தை $\underline{r} = 6t^2\,\underline{i} - 4t\,\underline{j} + 3\,\underline{k}$ மீ. என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கிறது. $\underline{v}$, $\underline{t}$, $\underline{a_t}$, $\underline{a_n}$, ρ ஆகியவற்றை $t = 0{\cdot}25$ விநாடியாக உள்ளபோது காண்க.

$$\underline{r} = 6t^2\,\underline{i} - 4t\,\underline{j} + 3\,\underline{k}$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = 12t\,\underline{i} - 4\,\underline{j}$$

$$\underline{v}\Big|_{t=0{\cdot}25} = 3\,\underline{i} - 4\,\underline{j}$$

$$\underline{v}\;_{=0{\cdot}25} = \sqrt{9+16} = 5 \text{ மீ./வி.}$$

$$\underline{t} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = 0{\cdot}6\,\underline{i} - 0{\cdot}8\,\underline{j}$$

$$\underline{a} = \underline{\ddot{r}} = 12\,\underline{i}$$

$$a_t = \underline{a}\cdot\underline{t} = 12\,\underline{i}\cdot({\cdot}6\,\underline{i} - {\cdot}8\,\underline{j}) = 7{\cdot}2 \text{ மீ/வி}^2$$

$$\underline{a_t} = 7{\cdot}2\,\underline{t} = 7{\cdot}2\,(0{\cdot}6\,\underline{i} - 0{\cdot}8\,\underline{j})$$

$$= 4{\cdot}32\,\underline{i} - 5{\cdot}76\,\underline{j}$$

$$\underline{a_n} = \underline{a} - \underline{a_t} = 12\,\underline{i} - (4{\cdot}32\,\underline{i} - 5{\cdot}76\,\underline{j})$$

$$= 7{\cdot}68\,\underline{i} + 5{\cdot}76\,\underline{j}$$

$$|\underline{a_n}| = \sqrt{7{\cdot}68^2 + 5{\cdot}76^2} = 9{\cdot}8 \text{ மீ./வி}^2.$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{25}{9{\cdot}8} = 2.6 \text{ மீ.}$$

3·14-2. விரிப்பரப்புச்சுருளி ஒன்றின் பாதையில் இயங்கும் துகள், t நேரத்தில், $\underline{r} = 4\cos 2t\,\underline{i} + 4\sin 2t\,\underline{j} + 6t\,\underline{k}$ என்னும் நிலைத்திசையியைப் பெற்றிருக்குமெனில், நேரம் 1·57 வி. என்றுள்ள போது $\underline{v}$, $\underline{t}$, a_t, a_n, ρ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$r = 4\cos 2t\,\underline{i} + 4\sin 2t\,\underline{j} + 6t\,\underline{k} \text{ மீ.}$$

$$\underline{\dot{r}} = -8\sin 2t\,\underline{i} + 8\cos 2t\,\underline{j} + 6\,\underline{k} \text{ மீ./வி.}$$

$$\underline{\ddot{r}} = -16\cos 2t\,\underline{i} - 16\sin 2t\,\underline{j} \quad \text{மீ./வி.}^2$$

$$\underline{v}\Big|_{t=1{\cdot}57} = -(8\sin 3{\cdot}14)\,\underline{i} + (8\cos 3{\cdot}14)\,\underline{j} + 6\,\underline{k}$$

$$= 8\,\underline{j} + 6\,\underline{k}$$

$$|\underline{v}|_{t=1{\cdot}57} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ மீ./வி.}$$

$$\underline{t} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = 0{\cdot}8\,\underline{j} + 0{\cdot}6\,\underline{k}$$

$$\underline{a}\Big|_{t=1\cdot57} = \ddot{\underline{r}}\Big|_{t=1\cdot57} = -16\,\underline{i} \text{ மீ./வி}^2.$$

$$\underline{a_t} = \underline{a}\cdot\underline{t}\ (-16\,\underline{i})\cdot(0\cdot8\,\underline{j} + 0\cdot6\,\underline{k}) = 0$$

$$\underline{a_n} = \underline{a} - \underline{a_t} = -16\,\underline{i} - 0 = -16\,\underline{i}$$

$$|\,a_n\,| = 16 \text{ மீ./வி}^2.$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{100}{16} = 6\cdot25 \text{ மீ.}$$

3·14-3. ஒரு துகள் ஓய்வியிலிருந்து துவங்கி 10 செ.மீ. ஆரையுள்ள வட்டத்தில், நேரத்தின் நேர் விகிதத்தைப் பெற்ற வேகத்தில் இயங்குகிறது. அது வட்டத்தை ஒரு முறை சுற்ற, 2 விநாடிகள் எடுத்துக்கொள்வதானால் மூன்றுவது விநாடிக்குப் பிறகு அத்துகளின் தொடுவரை முடுக்கம், மையம் நோக்கிய முடுக்கம், ஆகியவற்றின் எண்மதிப்புக்களைக் காண்க.

$$v = kt$$

$\underline{v} = kt\,\underline{I}$, $\underline{I}$ என்பது தொடுவரைத்திசையை வரையறுக்கும் ஓரலகுத்திசையியாகும்.

$$a_t = \frac{dv}{dt} = k$$

$$s = \int kt\,dt = \frac{k}{2}t^2 + c,\quad t = 0 \text{ என்றுள்ளபோது,}$$

$$s = 0. \quad \therefore \quad c = 0 \text{ எனவே } s = \frac{k}{2}\,t^2$$

நேரம் 2 விநாடியாக உள்ளபோது, $s - 2\pi \times 10$

$$= \frac{k}{2} \times 4 \quad \therefore \quad k = 10\pi$$

$$\therefore \quad v = 10\pi t \text{ செ.மீ./வி.}$$

$$\therefore \quad a_t = k = 10\pi = 31\cdot4 \text{ செ.மீ./வி}^2. = 0\cdot314. \text{ மீ/வி}^2.$$

$$a_n\Big|_{t=} = \frac{n^2}{\rho} = \frac{100\pi^2 \times 4}{10} = 40\pi^2 = 0\cdot887 \text{ மீ./வி}^2.$$

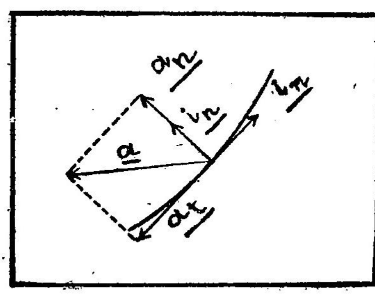
3·14-4. புகைவண்டி ஒன்று வளைவுப்பாதையில் வளைவாரை 1000 மீ. உள்ள இடத்தில் மணிக்கு 144 கி.மீ. வேகத்தில் சென்றுகொண்டிருக்கும் நேரத்தில், திடீரென பிரேக்குகள் போடப்

பட்டு புகைவண்டியானது சீரான வீதத்தில் மெல்ல இயங்குகிறது. 6 விநாடிகளுக்குப் பிறகு புகைவண்டியின் வேகமானது, மணிக்கு 96 கி. மீ. ஆகக் குறைந்தால் பிரேக்குகள் போடப்பட்ட தருணத்தில் புகைவண்டியின் முடுக்கத்தைக் காண்க.

வேகம் மணிக்கு 144 கி.மீ. எனில், விநாடிக்கு வேகம் 40 மீ. ஆகும். அதுபோலவே வேகம் மணிக்கு 96 கி.மீ. எனில், விநாடிக்கு $\frac{80}{3}$ மீ. ஆகும். புகைவண்டி சீரான வீதத்தில் (Constant rate) மெள்ளச் செல்வதால்

$$a_t = \text{சராசரி முடுக்கம்} = \frac{\triangle v}{\triangle t} = \frac{\frac{80}{3} - 40}{6} = -2\cdot2 \text{ மீ./வி}^2.$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{40 \times 40}{1000} = 1\cdot6 \text{ மீ /வி}^2.$$



படம் 3·19

தொடுவரை முடுக்கம், துகள் இயங்கும் திசைக்கு எதிர்திசையில் செயல்படுவதால், படத்தில் (3·19)-ல் காட்டியவாறு, a_n, a_t என்பவைகள் a என்னும் விளைவு முடுக்கத்தை வரையறுக்கும். விளைவு முடுக்கம் செங்குத்து (Normal) திசையுடன் β என்னும் கோணத்தை அமைத்தால்

$$\tan\beta = \left|\frac{a_t}{a_n}\right| = \frac{2\cdot2}{1\cdot6} = 1\cdot375$$

எனவே $\beta = 53°58'$ ஆகும்.

$$a = \frac{a_n}{\cos\beta} = \frac{1\cdot6}{\cos 53°58'} = \frac{1\cdot6}{0\cdot5901} = 2\cdot27 \text{ மீ/வி}^2$$

எனவே புகைவண்டியின் விளைவு முடுக்கத்தின் எண்மதிப்பு 2·27 மீ./வி². ஆகும். அது செங்குத்துத் திசையுடன் 53°58′ என்னும் கோணத்தை அமைத்த வண்ணம் படம் 3·19-ல் காட்டிய திசையில் செயல்படும்.

14-5. நெடுஞ்சாலை ஒன்று வளையுமிடத்தில், மணிக்கு 1‌08 கி.மீ. வேகத்தில் செல்லும் ஓர் உந்து வண்டியின் மைய நோக்கிய முடுக்கம் 3 மீ./வி². என்ற அளவுக்கு மிகுதிப்படாமலிருக்க ஏற்றதான மிகச் சிறிய வளை ஆரையின் நீளத்தைக் காண்க.

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{108 \times 108 \times 10^3 \times 10^3}{60 \times 60 \times 60 \times 60 \times 3} = 300 \text{ மீ.}$$

3·14-6. நெடுஞ்சாலை ஒன்று வளையுமிடம் 200 மீ. நீளமுள்ள வளையாரையைப் பெற்றுள்ளது. அவ்விடத்தின் வழியே ஒரு பேருந்து வண்டி மணிக்கு 72 கி மீ. வேகத்தில் சென்றால் உந்து வண்டியின் மையநோக்கிய முடுக்கத்தைக் காண்க. அதைப்போல் இருமடங்குள்ள முடுக்கத்தை உந்து வண்டி மைய நோக்கிய திசையில் பெறவேண்டுமாகில் அதன் வேகம் எவ்வளவு இருக்கவேண்டுமென்பதையும் காண்க.

இங்கு $\rho = 200$ மீ. $v = \frac{72 \times 1000}{60 \times 60} = 20$ மீ./வி.

எனவே $a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{20 \times 20}{200} = 2$ மீ./வி².

$A_n = 2a_n = 4$ மீ./வி². எனில்,

$v^2 = \rho \cdot A_n = 200 \times 4 = 800$

$\therefore \quad v = 20\sqrt{2}$ மீ./வி. அல்லது $72\sqrt{2}$ கி மீ./மணி.

3·14-7. ஆகாயவிமானம் ஒன்றைப் பரிசோதனைக்குட்படுத்தும்போது, அதன் மைய நோக்கிய முடுக்கம் $8g$ மீ./வி². ($g = 9{\cdot}8$ மீ./வி.²) என்றிருக்க விரும்பப்பட்டது. விமானி மணிக்கு 2520 கி.மீ. வேகத்தில் செல்லுவதாகில், விமானம் இயங்கும் வட்டப்பாதையின் வளைவாரையைக் காண்க.

இங்கு $v = \frac{2520 \times 1000}{60 \times 60} = 700$ மீ/வி

$a_n = 8g = 8 \times 9{\cdot}8 = 78{\cdot}4$ மீ/வி²

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{700 \times 700}{78{\cdot}4} = 6250 \text{ மீ.}$$

3·15 பயிற்சி

3·15-1. 2 மீ. ஆரையுள்ள வட்டமொன்றில் இயங்கும் துகள் ஒன்று t என்னும் நேரத்தில், கோண அளவு $\theta = 3t^2$ ஆரையன்கள் உள்ளவாறு, வட்டமையத்தைப்பற்றி இயங்குமெனில், நேரம் $t = 0{\cdot}5$ விஞடியாக உள்ளபோது தொடுகோடுவரை, செங்குத்து கோடு திசைகளில் முடுக்கக் கூறுகளையும், துகளின் மொத்த முடுக்கத்தையும் காண்க.

[விடை : $a_t = 12$ மீ/(விஞடி)^2 ; $a_n = 18$ மீ/(விஞடி)^2 ; $a = 21{\cdot}63$ மீ/(விஞடி)^2]

3·15-2. ஒரு வளையமானது (Ring) விஞடிக்கு $\frac{1}{2}$ ஆரையன் அளவில் சீராகச் சுழலும் சக்கரத்தின் ஆரைக்கால் (Spoke) ஒன்றில் t விஞடி நேரத்தில் மையத்திலிருந்து $r = 18+12\cos t$ செ.மீ. தொலைவிலுள்ளது. அவ்வளையத்தின் உச்சவேக மதிப்பு யாது ?

(குறிப்பு: $v^2 = 117+108\cos t+108\sin^2 t$, $t = \frac{\pi}{3}$ யாக உள்ளபோது உச்சவேகத்தில் வளை இயங்கும். உச்சவேகம் 15·87 செ.மீ./வி)

3·15-3. தெப்பம் (Barge) ஒன்று 6மீ. உயரத்திலமைந்துள்ள துறை (Wharf) ஒன்றிற்கு விஞடிக்கு 1·5 மீ. வேகத்தில் சுற்றப்படும் கயிற்றில் பிணைக்கப்பட்டு துறையை நோக்கி இழுக்கப்படுகிறது. துறையிலிருந்து தெப்பம் 12 மீ. கிடைத்தொலைவிலுள்ளபோது, அதன் வேகத்தைக் காண்க.

(விடை : 1·677 மீ./வி.)

3·15-4. 100 செ.மீ. ஆரையுள்ள வட்டமொன்றின் நிலையான புள்ளியிலிருந்து வில் நீளங்கள் (Arcual lengths) அளக்கப்பட்டு s எனக் குறிக்கப்படுகின்றன. வட்டத்தின் மேல் இயங்கும் புள்ளியானது $v = 0{\cdot}125\ (100s - s^2)$ செ.மீ /வி. என்னும் வேகத்தையும் $s = 40$ செ.மீ. என்னும் தொலைவையும் பெற்றுஉள்ளபோது தொடுவரை, செங்குத்துத் திசைகளில் முடுக்கத்தின் எண்ணிப் பகிர்வுகளைக் காண்க.

[விடை : $a_t = 6000$ செ.மீ./வி^{2} ; $a_n = 3600$ செ.மீ./வி^{2}]

3·15-5. (x, y) தளத்தில் துகள் ஒன்று 0·6 ஆரையுள்ள வட்டத்தில் இயங்குகின்றது. அது x அச்சைக் கடக்கும்போது,

அதன் இயங்கு திசையிலேயே விஞடிக்கு 1·5 மீ. முடுக்கத்தையும், y அச்சுக்கு எதிர்திசையில் விஞடிக்கு 6 மீ. வேகத்தையும் பெற்றுள்ளதாகில், துகளின் மொத்த முடுக்கத்தைக் காண்க,

[விடை : $a = (-60i - 1{\cdot}5j)$ மீ/வி^{2}]

3·15-6. நெடுஞ்சாலை ஒன்று வளையுமிடம் 320 மீ நீளமுள்ள வளைவாரையைப் பெற்றுள்ளது. அவ்விடத்தின் வழியே பேருந்து வண்டி மணிக்கு 96 கி.மீ. வேகத்தில் சென்றால் உந்துவண்டியின் முடுக்கத்தைக் காண்க.

(விடை : 2·22 மீ/வி^{2})

3·15-7. ஒரு தளத்தில் துகள் ஒன்று $\underline{a} = 4\,\underline{i}$ மீ/வி^{2} என்னும் சீரான முடுக்கத்தைப் பெற்று இயங்குகிறது. நேரம் $t=0$ விஞடியாக உள்ளபோது துகளின் திசைவேகம் $\underline{v_0} = 2\,\underline{i} + 2\sqrt{3}\,\underline{j}$ மீ/வி என்ருல், நேரம் $t = 1$ வி.-ஆக உள்ளபோது பாதையின் வளைவாரை, துகளின் தொடுவாரை, செங்குத்துத் திசைகளில் முடுக்கத்தின் எண்ணிப்பிரிவுகளைக் காண்க.

[விடை : $\rho = 24$ மீ ; $a_t = 2\sqrt{3}$ மீ/வி^{2} ; $a_n = 2$ மீ/வி^{2} ;

(குறிப்பு : $\underline{v} = \underline{v_0} + 4t\,\underline{i}$)]

3·15-8. மோட்டார்வண்டி, பாதையில் அமைந்துள்ள ஒரு பள்ளத்தின் வழியே செல்கிறது. அப்பள்ளத்தின் வளைவரையை $x^2 = 400y$ என்னும் சமன்பாடு வரையறுக்கிறது. மோட்டார் வண்டி மணிக்கு 144 கி.மீ. என்னும் சீரான வேகத்துடன் இயங்குகிறதெனில், அது பள்ளத்தில் மிகவும் ஆழமான இடத்தை அடையும்போது அதன் முடுக்கத்தைக் காண்க. அவ்விடத்தில் பாதையின் வளைவரையையும் காண்க.

[குறிப்பு : $a_t = 0$; $a_n = a$; $\rho = \dfrac{\left\{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$

விடை : $\rho = 200$ மீ, $a = 8$ மீ/வி^{2}]

3·15-9. ஊசலாடும் துகள் ஒன்றின் நிலைத்திசையி

$$\underline{r} = 0{\cdot}6t\,\underline{i} - \frac{0{\cdot}9}{\pi}\sin \pi t\,\underline{j} \text{ (மீ.விஞடி)}$$

எனில் நேரம் $t=0.333$ வி. என்றுள்ளபோது துகளின் தொடு வரை செங்குத்துத்திசைகளில் முடுக்கத்தின் எண்மதிப்புக்களைக் காண்க.

(விடை : $a_t = -0.92828\,\pi$ மீ/வி^{2}

$a_n = 0.69\,\pi$ மீ/வி^{2}]

3·15-10. 12 செ. மீ. ஆரமுள்ள வட்டமொன்றில், Q என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து வட்டவில்லின் நீளமானது அளவிடப்பட்டு s எனக் குறிக்கப்படுகிறது. P என்னும் துகளானது வட்டத்தின் மேல், வேகம் s^2-க்கு நேர்விகிதத்திலுள்ள வாறு இயங்குகிறது. நேரம் $t = 0.2$ வி. ஆக உள்ளபோது P ஆனது Q விலிருந்து 18 செ.மீ. தொலைவையும் வினாடிக்கு 40·5 செ.மீ. வேகத்தையும் பெற்றுள்ளதாகில்,

(அ) $t=0$ என்னும் நேரத்தில் a_n, a_t, a-க்களைக் காண்க.

(ஆ) P ஆனது Q-வை அடைவதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் யாது?

(விடை : $a_n = 136.687$ செ.மீ./வி^{2}
$a_t = 182.225$ செ.மீ./வி^{2} (ஆ) $t=0.805$ வி)
$a = 228$ செ.மீ /வி^{2}

(குறிப்பு : $v=ks^2$; $\frac{1}{s} = 18-kt, k=0.125, \quad v=0.125s^2$)

3·15-11. t என்னும் நேரத்தில் இயங்கும் துகளின் நிலையை

$$\underline{r} = 0.45\,\underline{i} - 0.3t\,\underline{j} + 0.225t^2\,\underline{k} \text{ மீ.}$$

என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கிறது. நேரம் $t=0.5$ வினாடியாக உள்ளபோது, பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(a) வேகம் ;
(b) ஓரலகுத்தொடுவரைத் திசையி ($\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ அமைப்பில்);
(c) தொடுவரைத்திசையில் முகட்டின் எண்ணிப்பகிர்வு;
(d) செங்குத்துத்திசையில் முகட்டின் எண்ணிப்பகிர்வு;
(e) வளையாரை ρ.

[விடை : (a) $v=0.375$ மீ/வி (b) $\underline{t} = -0.24\,\underline{j} + 0.18\,\underline{k}$
(c) $a_t=0.27$ மீ/வி^{2} (d) $a_n = 0.36$ மீ/வி^{2}
(e) $\rho=0.39$ மீ.]

3·15-12. ஒரு தளத்திலியங்கும் துகளின் நிலையை, t என்னும் நேரத்தில், $\underline{r} = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j}$ என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கிறது. வளைவாரையை வரையறுக்கும் $\rho = \frac{v^2}{a_n}$ என்னும் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி தேக்காட்டின் ஆயக்கூறுகளில் (Cartesian Coordinates) அதன் மதிப்பு

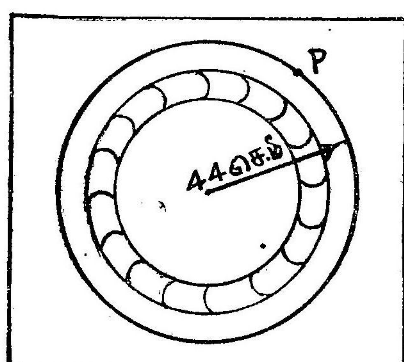
$$\rho = (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}} \Big/ \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}$$ என நிறுவுக.

[குறிப்பு : $v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$ $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$

$a = (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$ $a_n = \sqrt{a^2 - at^2}$)

3·15-13. 44 செ.மீ. ஆரையுள்ள பொறி உருளை வட்டத் தகடு விளிம்பு எல்லைக்கோட்டின் வேகம் விநாடிக்கு 264 மீ. எனில், படம் (3·20)-ல் காட்டியவாறு விளிம்பில் அமையும் P என்னும் புள்ளியின் மைய நோக்கிய முடுக்கம் யாது?

(விடை : $a_n = 1584$ மீ/வி^{2})



படம் 3·20

3·15-14. பேருந்துவண்டி ஓட்டுனர் பாதையில் வளை ஆரை 150 மீ. உள்ள இடத்தில் மணிக்கு 72 கி.மீ. வேகத்தில் செல்லும் போது, பிரேக்குகளைப் பயன்படுத்தி, வேகத்தை விநாடிக்கு 1·25 மீ. அளவில் சீராகக் குறைத்துக்கொண்டுவந்தார். உந்து வண்டியின் வேகம் மணிக்கு 54 கி.மீ. என்றுள்ளபோது வண்டியின் விளைவு முடுக்கத்தின் மதிப்பு யாது?

(விடை : $a = 1{\cdot}9525$ மீ/வி². அது இயங்கும் திசைக்கு எதிர் திசையிலமையும் தொடுகோட்டுடன் $50{\cdot}2^\circ$ கோணத்தை அமைக்கும்)

3·15-15. மோட்டார் கார் ஒன்று ஓய்விலிருந்து பாதையில் வளைஆரை 120 மீ நீளத்தைப் பெற்ற புள்ளியிலிருந்து புறப்பட்டு 0·9 மீ/வி² என்னும் சீரான முடுக்கத்துடன் ஓடுகிறது. முடுக்கத்தின் மொத்த மதிப்பு 1·8 மீ/வி² என்றுள்ளபோது அது ஓடிய தூரமென்ன?

(விடை : 51·96 மீ)

3·15-16. மோட்டார் கார் ஒன்று வளைவுப்பாதையில் 145 மீ வளை ஆரத்தைப் பெற்ற புள்ளியில், மணிக்கு 72 கி.மீ. வேகத்திலிருந்து சீரான வேகவளர்ச்சியுடன் வளைவுப்பாதையில் 100 மீ தொலைவை எய்தும்போது, மணிக்கு 90 கி.மீ வேகத்தைப் பெறுகிறது. அது வளைவரையில் 80 மீ. தொலைவைக் கடக்கும் போது அதன் மொத்த முடுக்கத்தின் எண்மதிப்பு யாது?

(விடை : 4·155 /வி²)

3·15-17. t வினாடி நேரத்தில் $\underline{r} = t\,\underline{i} + t^2\,\underline{j} + t^3\,\underline{k}$ மீ. என்னும் நிலைத்திசையியைப் பெற்ற துகள் ஒன்று வளைவுப்பாதையிலியங்குகிறது. நேரம் $t=0$, $t=1$ வி என்றுள்ளபோது பாதையின் வளைவாரையைக் காண்க.

விடை : $P_{t=0} = \frac{1}{2}$ மீ ; $P_{t=1} = 6{\cdot}008$ மீ)

3·15-18. t என்னும் நேரத்தில் $\underline{r} = ct\,\underline{i} + R\sin pt\,\underline{j} + R\cos pt\,\underline{k}$ என்னும் நிலைத்திசையியுடைய துகள் ஒன்று இயங்கும். வளைவுப்பாதையின் வளை ஆரையைக் காண்.

(விடை : $v = \sqrt{c^2 + R^2 p^2}$; $a = Rp^2 = a_n$;

$$\rho = R + \frac{c^2}{Rp^2}\Bigg)$$

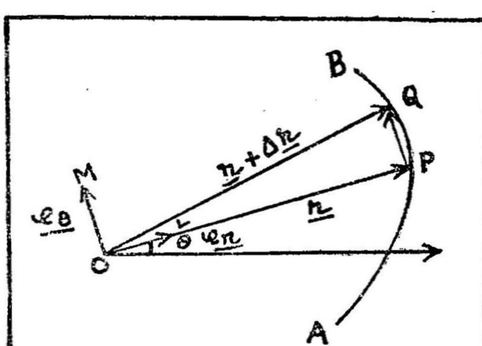
3·16. கோணதூர உறுப்புகளில் வளைவரையிலியங்கும், துகள் ஒன்றின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் ஆரை, குறுக்குக்கூறுகளைக் காணுதல். (To find the radial and transverse components of velocity and acceleration of a particle moving along a curve)

$(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{p})$ என்னும் குறிப்பிட்டச்சுக்களைப் பயன்படுத்தி, ஓர் இயங்கும் துகளின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றை எந்நேரத்திலும், எத்நிலையிலும் வரையறுத்துக்

கூறுவதாலே, இயக்க இயல் நிலைமைகளை அறிந்து கொள்ள முடியு மென்பது முன்னரே கூறப்பட்டது. இயக்கக் கொள்கைகளை ஆய்வுறும்போது, பாதையின் உருவம் அதில் நிகழும் இயக்கத்தின் போக்கு ஆகியவற்றைச் சார்ந்த $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{p})$ என்னும் சுட்டமைப்பு முறையே பெரிதும் பயன்படுத்தப்படும். எண்ணுக்கு உரிய வினுக்களுக்கு நடைமுறையில் தீர்வுகாண பதில் $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ என்னும் நிலையான சுட்டமைப்பு முறையே தேவைப்படும். ஆயினும் இன்னும் சில சந்தர்ப்பங்களில் நிலைத்திசையியின் போக்குக்கு ஏற்றதான ஓரலகுத்திசையிகளை ஒரு தளத்திலியங்கும் துகளுக்குத் தேவைப்படும். அச்சந்தர்ப்பங்களில் தேக்காட்டின் (Cartesian) கூறுகளுக்கு பதிலாக கோணதூரக் கூறுகளைப் (Polar Coordinates) பயன்படுத்த வேண்டி வரும்.

திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் கூறுகளைக் காண்பதில் கோணதூரக் கூறுகள் பெரிதும் துணை புரிகின்றன.

APB என்னும் ஒருதளத்து வளைவரையிலியங்கும் ஒரு துகள் t கால அளவில் P என்னும் நிலையை அடையட்டும். வளைவரையிலுள்ள புள்ளி A-யிலிருந்து, படம் $(3 \cdot 21)$-ல் காட்டியவாறு வில் தொலைவுகளை அளக்க $\widehat{AP}=s$ ஆகட்டும். O என்பது வளைவரையில் தளத்தில் உள்ள நிலையான புள்ளியைக் குறிக்கிறது.



படம் 3·21

O-ஐ முனையாகவும் (Pole) OX-ஐ தொடக்கக் கோடாகவும் (Initial line) கொள்க. P-யின் கோணத்தொலைவுக் கூறுகளை (r, θ) என்க.

$(t+\Delta t)$ என்னும் நேரத்தில், துகள் Q என்னும் புள்ளிக்குச் செல்லட்டும். Q-வின் கோணத்தொலைவுக் கூறுகளை $(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta)$ எனக் குறிக்கவும். மேலும் $\widehat{AQ} = s+\Delta s$ ஆகும். OP திசையிலும் OP-க்கு செங்குத்துத் திசையிலும் உள்ள ஓரலகுத் திசையிகளை $\underline{\varphi_r}$, $\underline{\varphi_\theta}$ எனக் குறிக்க. P ஆனது அதன் பாதையில் இயங்கும்போது $\underline{\varphi_r}$, $\underline{\varphi_\theta}$ என்பவையும் O-ஐ மையமாகக் கொண்டு ஓர் அலகு ஆரையுள்ள வட்டத்தில் இயங்குகின்றன. காலம் t என்னும்போது இவற்றின் நிலைகளைப் படம் (3·21)-ல் காட்டியவாறு L, M என்னும் புள்ளிகள் குறிக்கட்டும். L என்னும் புள்ளியின் திசைவேகம் OL-க்குச் செங்குத்தாக இருக்கிறது. அதாவது OM திசையிலுள்ளது. M என்னும் புள்ளியின் திசைவேகம் OM-க்கு செங்குத்தாக உள்ளது. எனவே அது $|\underline{\theta}$ திசையிலுள்ளது.

$$\frac{d\underline{\varphi_r}}{dt} = \frac{d\underline{\varphi_r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = 1.\ \frac{d\theta}{dt}\,\underline{\varphi_\theta}$$

$$\frac{d\underline{\varphi_\theta}}{dt} = \frac{d\underline{\varphi_\theta}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = 1.\ \frac{d\theta}{dt}(-\underline{\varphi_r}) = -\frac{d\theta}{dt}\,\underline{\varphi_r}$$

OP திசையிலுள்ள ஓரலகுத்திசையி $\underline{\varphi_r}$ ஆவதாலும், OP-யின் நீளம் r ஆகவும் உள்ளதால் $\underline{OP} = r\,\underline{\varphi_r}$ ஆகும். $\therefore$ P-யின் திசைவேகமானது

$$\underline{V} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\underline{\varphi_r})$$

$$= \frac{dr}{dt}\underline{\varphi_r} + \frac{d\underline{\varphi_r}}{dt}\,r$$

$$= \frac{dr}{dt}\underline{\varphi_r} + \underline{r}(\dot\theta\ \underline{\varphi_\theta})$$

$$= \dot r\,\underline{\varphi_r} + r\,\dot\theta\,\underline{\varphi_\theta}$$

ஆகும். அதாவது திசைவேகத்தை ஆரை, குறுக்கு திசைகளில் கூறுகளாகப் பிரித்தால்

ஆரைத்திசைவேகம் (Radial velocity) $= \dot r\,\underline{\varphi_r}$ என்றும்,

குறுக்குத் திசைவேகம் (Transverse velocity) $= r\,\dot\theta\,\underline{\varphi_\theta}$ என்றுமாகும்.

*P*யின் முடுக்கம் $\underline{a}$ எனில்,

$$\underline{a} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\underline{\varphi_r} + r\,\dot{\theta}\,\underline{\varphi_\theta}\right)$$

$$= \ddot{r}\,\underline{\varphi_r} + \ddot{r}\,\frac{d\,\underline{\varphi_r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\,\dot{\theta}\,\underline{\varphi_\theta} + r\,\ddot{\theta}\,\underline{\varphi_\theta} + r\,\dot{\theta}\,\frac{d\,\underline{\varphi_\theta}}{dt}$$

$$= \dot{r}\,\underline{\varphi_r} + \dot{r}\,(\dot{\theta}\,\underline{\varphi_\theta}) + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\underline{\varphi_\theta} + r\,\ddot{\theta}\,\underline{\varphi_\theta} - r\dot{\theta}\,\dot{\theta}\,\underline{\varphi_r}$$

$$= (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\underline{\varphi_r} + (2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\underline{\varphi_\theta}$$

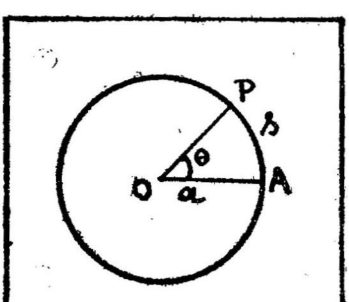
$$= (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\underline{\varphi_r} + \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\,\underline{\varphi_\theta}$$

ஆகவே *P*-யின் முடுக்கத்தை ஆரை, குறுக்குத் திசைகளில் பகிர்வீடு செய்தால் ஆரை முடுக்கம் (Radial Acceleration) $= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\underline{\gamma_r}$ என்றும் குறுக்கு முடுக்கம் (Transverse Acceleration) $= \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\,\underline{\varphi_\theta}$ என்றுமாகும்.

[குறிப்பு (1) *P*-யின் தொகுடயன் முடுக்கத்தின் எண் மதிப்பு

$$= \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + \left(\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\right)^2}$$

(2) துகள் O என்னும் துவக்கப்புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு a என்னும் ஆரையை உடைய வட்டத்திலியங்குமாகில், $r = a$, $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$ ஆகும். மேலும் நிலையான A என்னும் புள்ளியிலிருந்து t நேரத்தில் துகள் வட்டப்பாதையில் s என்னும் அளவுடைய வில்தொலைவு சென்றால் $s = a\theta$ ஆகும். $v = \dot{s} = a\dot{\theta}$ ஆகும். $\ddot{s} = a\ddot{\theta}$ ஆகும் ஆதலால்,



படம் 3.22

துகளின் ஆரைத்திசையில் வேகம் $= \dot{r} = 0$

வட்டத்தின் தொடு கோடு அல்லது குறுக்குத்திசையில் வேகம்

$$= r\dot{\theta} = a\dot{\theta}$$

ஆரைத்திசையில் முடுக்கம் $= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - a\dot{\theta}^2$

$$= a\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{a}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{தொடுகோடு அல்லது குறுக்குத்} \\ \text{திசையில் முடுக்கம்}\end{array}\right\} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = a\ddot{\theta} + 0$$

$$= a\ddot{\theta} = \ddot{s}$$

ஆகும்.

(3) ஒரு தளத்து வளைகோட்டியங்கும் துகளின் திசைவேகம், t என்னும் நேரத்தில், $(\underline{i}, \underline{j})$, $\underline{\varphi_r}$, $\underline{\varphi_\theta}$) அமைப்புக்களில் முறையே,

$$\underline{v} = \dot{x}\,\underline{i} + \dot{y}\,\underline{j} \text{ என்றும்}$$

$$\underline{v} = \dot{r}\,\underline{\varphi_r} + r\dot{\theta}\,\underline{\varphi_\theta} \text{ என்றும்}$$

உள்ளதால்

$$\underline{v} \cdot \underline{\varphi_r} = \dot{r} \qquad \underline{v} \cdot \underline{\varphi_\theta} = r\dot{\theta}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{i} = \dot{x} \qquad \underline{v} \cdot \underline{j} = \dot{y}$$

என்னும் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.]

3·17 மாதிரிக் கணக்குகள்

3·17-1. பட்டைத்தகடு ஒன்று (Metal band) வினாடிக்கு 10 ஆரையன்கள் வீதம் சீராகச் சுழலும் சக்கரத்தின் ஆரைக்கால் ஒன்றில் (Spoke) வெளிநோக்கிய திசையில் 20 மீ/வி என்னும் சீரான ஆரைத்திசைவேகத்தில் நழுவிச் செல்கிறது. அது மையப் புள்ளியிலிருந்து 1·5 மீட்டர் தொலைவில் உள்ள நேரத்தில் அதன் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் எண்மதிப்புக்களைக் காண்க.

$$\underline{v} = 20\,\underline{\varphi_r} + 1{\cdot}5 \times 10\,\underline{\varphi_\theta}$$

$$= 20\,\underline{\varphi_r} + 15\,\underline{\varphi_\theta}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{400 + 225} = 25 \text{ மீ/வி}$$

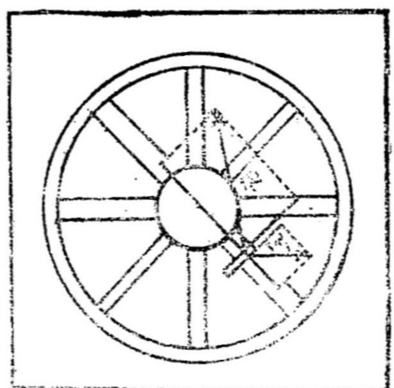
$$\underline{a} = -\dot{\theta}^2 \underline{\varphi_r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\underline{\varphi_\theta}$$

$$= -1{\cdot}5 \times 100\ \underline{\varphi_r} + 2 \times 20 \times 10\ \underline{\varphi_\theta}$$

$$= -150\ \underline{\varphi_r} + 400\ \underline{\varphi_\theta}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{225 + 1600} \times 10 = \sqrt{73} \times 50$$

$$= 50\sqrt{73}\ \text{மீ/வி}^2$$



படம் 3·23

3·17-2. t என்னும் நேரத்தில் இயங்கும் துகள் ஒன்றின் நிலையை $\underline{r} = 4t^2\,\underline{i} - 6t\,\underline{j}$ என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுப்பதாகில் $t=2$ வி. எனும் நேரத்தில் $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$\underline{r} = 4t^2\,\underline{i} - 6t\,\underline{j}$$

$$\underline{r}\,\Big|_{t=2} = 16\,\underline{i} - 12\,\underline{j} = 20\,(0{\cdot}8\,\underline{i} - 0{\cdot}6\,\underline{j})$$

$$= 20\ \underline{\varphi_r}$$

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = 8t\,\underline{i} - 6\,\underline{j}$$

$$\underline{v}\,\Big|_{t=2} = 16\,\underline{i} - 6\,\underline{j}$$

$$\underline{\varphi_\theta} = \alpha\,\underline{i} + \beta\,\underline{j}$$ எனக் கொள்க.

$$\underline{\varphi_r} \cdot \underline{\varphi_\theta} = 0{\cdot}8\alpha - 0{\cdot}6\beta = 0$$

திட்டத்தில் சில்லறை வியாபாரி, உணவு விடுதியர் (Caterer) ஆகியோருக்கு 300 கூட்டுறவுகளும், தொழிலாளர் கூட்டுறவுகள் 150-ம் மூன்றும் திட்ட காலத்தில் அமைக்கப்படவேண்டுமெனக் குழு பரிந்துரைத்தது.

தொழிற் கூட்டுறவுகள்மீதான செயற்குழு

மூன்றும் திட்ட காலத்தில் தொழிற் கூட்டுறவுகள் (Industrial Co-operatives) எவ்வாறு விரிவுபடுத்தப்படலாம் என்று பரிந்துரைக்க ஒரு செயற்குழு அமைக்கப்பட்டது. அதன் அறிக்கை 1963இல் வெளியிடப்பட்டது. மூன்றும் திட்ட இறுதியில் வீட்டுத்துறைத் தொழில் (Householed industries) களிலுள்ள தொழிலாளிகளில் 30%-த்தினர் கூட்டுறவு முறையில் அமைக்கப்பட வேண்டுமென்று பரிந்துரைக்கப்பட்டது. நான்கு வகையான தொழிற் கூட்டுறவு கூட்டிணைப்பு (Federation)கள் நிறுவப்பெற வேண்டுமெனக் குழு பரிந்துரைத்தது. ஒருவகை, உற்பத்தியில் ஈடுபட்ட சங்கங்கள்; மற்றொருவகை உறுப்பினர்களுக்குத் தொழிற்பட்டறை வசதியளிக்கும் சங்கங்கள்; உறுப்பினர்கள் தத்தம் வீட்டிலேயே உற்பத்தி செய்தாலும் தொழிலின் இலாப நட்டத்தையேற்கும் சங்கங்கள் மூன்றும் வகை; உறுப்பினர் களுக்குக் கச்சாப்பொருள், கருவிகள், கடன், சந்தையிடுகை போன்ற பல வசதிகளைச் செய்து தரும் சங்கங்கள் நான்காம் வகை. மூன்றும் திட்ட காலத்தில் 15 இலட்சம் உறுப்பினர்கள்கொண்ட 15,000 புதிய சங்கங்கள் நிறுவப்பெறுமென்று மதிப்பிடப்பட்டது. இவற்றின் நடைமுறை முதல் ரூ. 120 கோடியாகவும், உற்பத்திப் பொருளின் மதிப்பு ரூ. 360 கோடியாகவும் இருக்கும் என்றும் எதிர்பார்க்கப்பட்டது. மாநிலத் திட்டங்களில் சிற்றளவு தொழில் களுக்கு ஒதுக்கப்பட்ட தொகையில் 25% தொழிற் கூட்டுறவுகள் வளர்ச்சிக்குப் பயன்படுத்தப்பட வேண்டுமென்று பரிந்துரைக்கப் பட்டது. சிறு தொழில் முனைவோருக்கு நகரக் கூட்டுறவு வங்கிகள் கடனளிக்கவேண்டும். இக் கூட்டுறவுகளுக்குத் தொழில் நுட்ப, நிதிய, இதர வசதிகள் அளிக்கும் அலுவலருக்கு இரண்டு அல்லது மூன்று வார பயிற்சி அளிக்கப்படவேண்டு மென்றும் பரிந்துரைக் கப்பட்டது.

கூட்டுறவு நிருவாகம்மீதான குழு
(Committee on Co-operative Administration)

மூன்றும் திட்ட காலத்தில் கூட்டுறவு வளர்ச்சிக்குப் பெரிய தொரு திட்டம் தீட்டப்பட்டது. இத் திட்டத்தைச் செவ்வனே நிறைவேற்ற நல்ல தரமான போதுமான அளவு ஊழியரும், திறம்

சுழலும் அச்சு செங்குத்தாக உள்ளதால் இயங்குவரையின் தள நேரிணையை (Projection), $\underline{i}$, $\underline{j}$ தளத்திலமைத்து, பார்வைக்குரிய நேர்கோட்டின் மாற்றத்தை (The change of line of sight) அறிய வேண்டும். ($\underline{i}$, $\underline{j}$) தளத்தில், r, $\underline{v}$ ஆகியவற்றின் தள நேரிணைகளைக் கொட்டை எழுத்துக்களால் குறிப்பிடும்போது

$$\underline{R} = 180\,\underline{i} + 36t\,\underline{j}\;;\quad \underline{V} = 36j = \underline{v} \text{ ஆகும்.}$$

நேரம் $t = 1$வி ஆக உள்ளபோது, R-ன் திசை, அதன் செங்குத்துத்திசை ஆகியவற்றிலமையும், ஓரலகுத்திசையிகள் முறையே,

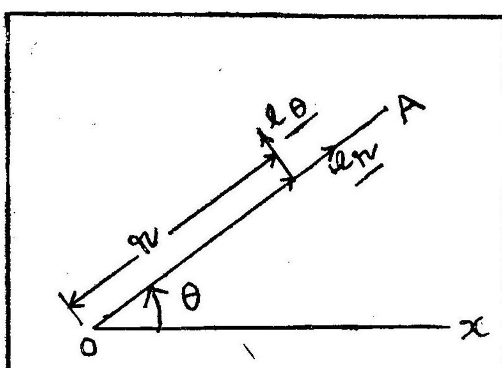
$$\varphi_R = \frac{180\,\underline{i} + 36\,\underline{i}}{183 \cdot 6}$$

$$\underline{\varphi_H} = \frac{-36\,\underline{i} + 181\,\underline{j}}{183 \cdot 6} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\quad \underline{V} \cdot \underline{\varphi_N} = RH^\circ = \frac{36 \times 180}{183 \cdot 6}\;;\; H^\circ = \frac{36 \times 180}{(183 \cdot 6)^2}$$

$$= 0 \cdot 192 \text{ ஆரையன்/வி ஆகும்.}$$

3·17-4. 0·9 மீ நீளமுள்ள OA என்னும் புயமொன்று படம் (3·24)-ல் காட்டியவாறு O என்னும் புள்ளிபற்றிச் சுழலும்போது,



படம் 3·24

t விநாடி நேரத்தில், $\theta = 0 \cdot 15t^2$ என்னும் ஆரையன் கோணத்தை வரைகிறது. அதில் நழுவி இயங்கக்கூடிய கட்டை ஒன்று O-விலிருந்து $r = 0 \cdot 9 - 0 \cdot 12t^2$ மீட்டர் தொலைவில் உள்ளது. புயம்

30° கோண அளவுக்கு சுற்றும்போது, கட்டையின் மொத்த திசை வேகம், மொத்த முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6} = 0{\cdot}524 \text{ ஆரையன் என்றுள்ளபோது}$$

$$0{\cdot}524 = 0{\cdot}15t^2, \text{ அதாவது, } t^2 = \frac{0{\cdot}524}{0{\cdot}15}; \quad \therefore \quad t = 1{\cdot}869 \text{வி}$$

$r = 0{\cdot}9 - 0{\cdot}12t^2$

$t = 1{\cdot}869$ வி. ஆக உள்ளபோது $r = 0{\cdot}4809$மீ.

$\dot{r} = -0{\cdot}24t$ $\qquad \dot{r}\big|_{t=1\cdot869} = -0{\cdot}4485$ மீ/வி

$\ddot{r} = -0{\cdot}24$ $\qquad \ddot{r}\big|_{t=1\cdot869} = -0{\cdot}24$ மீ/வி²

$\theta = 0{\cdot}15t^2$ $\qquad t = 1{\cdot}869$ ஆக $\qquad \theta = 0{\cdot}524$ ஆ/வி

$\dot{\theta} = 0{\cdot}30t$ $\qquad$ உள்ளபோது $\qquad \dot{\theta} = 0{\cdot}561$ ஆ/வி

$\ddot{\theta} = 0{\cdot}3$ $\qquad \ddot{\theta} = 0{\cdot}3$ ஆ/வி²

$t = 1{\cdot}869$ வி. நேரத்தில் B என்னும் கட்டையின் திசைவேகமானது

$$\underline{v_B} = \dot{r}\,\underline{i_r} + r\dot{\theta}\,\underline{i_\theta}$$

$$= (-0{\cdot}4485\,\underline{i_r} + 0{\cdot}2697\,\underline{i_\theta}) \text{ மீ/வி}$$

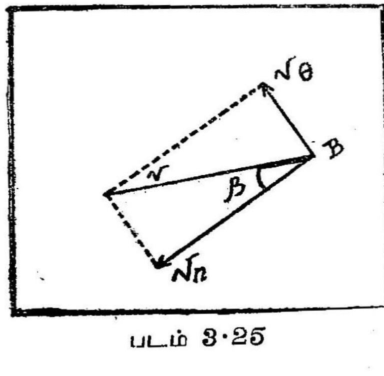
$$v_B = 0{\cdot}5235 \text{ மீ/வி}$$

அது செயல்படும் திசை v_r உடன் β என்னும் கோணத்தைப் படம் (3·25)-ல் காட்டியவாறு அமைத்தால்

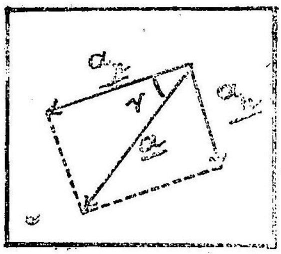
$$\tan\beta = \frac{v_\theta}{v_r} = 0{\cdot}6009$$

$$\beta = 31^\circ \text{ ஆகும்.}$$

ஆரை குறுக்குத் திசையில் $t = 1{\cdot}869$ வி. நேரத்தில் Bயின் முடுக்கம் பகிர்வுகள் முறையே,



படம் 3·25



படம் 3·26

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$= -0·24 - (0·4809)(·561)^2$$
$$= -0·3912 \text{ மீ/வி}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$
$$= (·4809)(·3) + 2(-·4485)(·561)$$
$$= -0·3588 \text{ மீ/வி}^2$$

எனவே $a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = 0·531$ மீ/வி^{2} ஆகும்.

அது செயல்படும் திசை a_r உடன் γ என்னும் கோணத்தைப் படம் (3·26)-ல் காட்டியவாறு அமைக்குமெனில்

$$\tan\gamma = \left|\frac{a_\theta}{a_r}\right| = \frac{0·3588}{0·3912}$$

எனவே $\gamma = 42·5°$ ஆகும்.

3·17-5. AB என்னும் கோல் ஒன்று, படம் (3·27)-ல் காட்டியவாறு, B என்னும் நுனியிலமையும் நிலையான கிடை அச்சு பற்றி, $1·0\ k$ ஆரையன்/(விநாடி)^2 அளவுள்ள சீரான கோண முடுக்கத்தில் சுழலுமாறு ஓர் ஊசி முனையில் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் சுழலும்போது, அடிமுனை B-யிலிருந்து P என்னும் ஒரு சிறிய வளையம் (Washer) வெளிநோக்கி வழுக்கிச் செல்கிறது. r என்றும் அதன் தொலைவு $(BP = r)$ விநாடிக்கு 0·6 மீட்டர் வேகத்தில் மிகுதிப்படுகிறது. கோலின் கோணத்திசைவேகம் $3·0\ k$ ஆரையன்/விநாடி என்றுள்ளபோது, கோலானது செங்குத்தாகவும் $(\theta = 90°)$, வளையம் B-யிலிருந்து 0·6 மீட்டர் தொலைவிலும் உள்ளது எனில், வளையத்தின் திசைவேகத்தையும், முடுக்கத்தையும் காண்க.

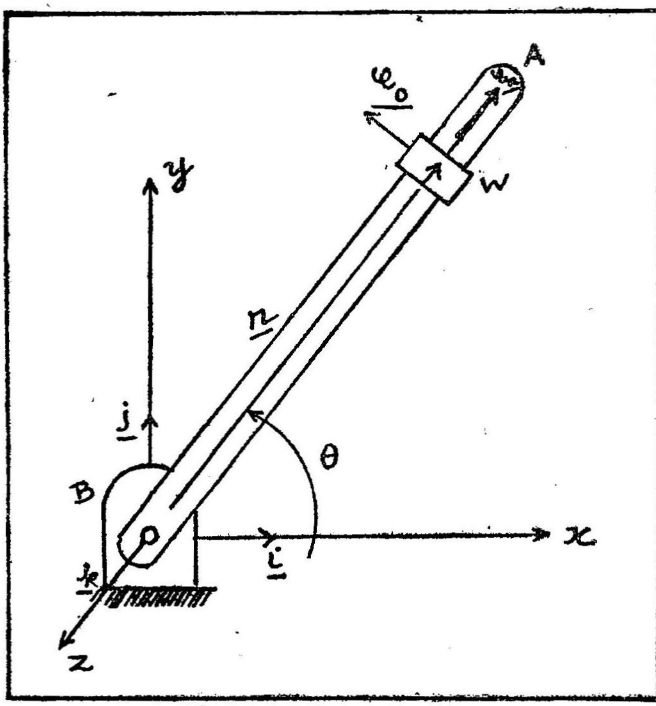
சுழலும் கோலினுடைய அமைப்புக்கு ஏற்றவாறு, வளையத்தின் நிலை குறிக்கப்படுவதால், B-ஐ முனைப்புள்ளியாகக் (pole) கொண்டு ஆரைத்திசை, குறுக்குத்திசைக் கூறுகளைப் பயன்படுத்துவது முறையாகும். அத்திசைகளை l_r, l_θ என்னும் ஓரலகுத்திசையிகள் குறிக்கட்டும்.

வளையத்தின் நிலையை.

$\underline{r} = r\ \underline{l_r}$ என்றும் நிலைத்திசையி வரையுறுக்கிறது.

$\therefore \quad \underline{v} = \underline{\dot{r}} = \dot{r}\ \underline{l_r} + r\dot{\theta}\ \underline{l_\theta}$

$\underline{v}\Big|_{\theta=90^\circ} = 0\ 6\ \underline{j} - 1{\cdot}8\ \underline{i}$ மீ./வி. [$\theta = 90^\circ$ என்றுள்ளபோது, $\underline{l_r} = \underline{j},\ \underline{l_\theta} = -\underline{i}$ ஆகும்]



படம் 3·27

$\underline{a} = \underline{\ddot{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\ \underline{l_r} + (r\ddot{\theta} + 2\ \dot{r}\ \dot{\theta})\ \underline{l_\theta}$

$= [0 - 0{\cdot}6(3)^2]\ \underline{j} + [0{\cdot}6(1) + 2\,(0{\cdot}6)(3)]\ (-\ \underline{i})$

$= -5{\cdot}4\ \underline{j} - 4{\cdot}2\ \underline{i}$

$= (-\ 4{\cdot}2\ \underline{i} - 5{\cdot}4\ \underline{j})$ மீ/(விநாடி)^2

3·18. பயிற்சி

3·18-1. ஒரு தளத்து வளைவரையிலியங்கும் துகள், t விநாடியில் அடையும் நிலையின் கோண தூரக கூறுகள் முறையே $r = (t^2 - 2t)$ செ மீ. $\theta = (t^3 - 4t)$ ஆரையன் ஆகும். நேரம் $t = 0$ $t = 1$ வி என்றுள்ள போது துகளின் நிலை திசைவேகம் முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க,

(விடை : $t=0$ வி என்றுள்ளபோது

$$\underline{r} = 0, \quad \underline{v} = 0, \quad \underline{a} = -\underline{i_r}$$

$t=1$ வி என்றுள்ள போது

$$\underline{r} = -1, \quad \underline{v} = (-\underline{l_r} + \underline{l_\theta}) \text{ செ.மீ./வி}$$

$$\underline{a} = (8\,\underline{l_r} + \underline{l_\theta}) \text{ செ.மீ./வி}^2.$$

3·18-2. ஒரு தளத்து வளைவுப்பாதையிலியங்கும், துகளின் நிலையை t விநாடி நேரத்தில் $r = t^3 - 2t^2$ செ.மீ., $\theta = t^3 - 4t$ ஆரையன்கள் என்னும் கோணதூரக்கூறுகள் வரையறுத்தால், துகள் எந்நேரங்களில் முனைப்புள்ளி (pole) வழியே இயங்குமென்பதையும், அந்நேரங்களில் துகளின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(விடை : $t = 0$, $t = 2$ வி என்றுள்ள சமயங்களில், துகள் முனைப்புள்ளியின் வழியே செல்லும்.

$t = 0$ என்றுள்ளபோது $v = 0$, $\underline{a} = -4\,\underline{l_r}$

$t = 2$ என்றுள்ளபோது $\underline{v} = 4\,\underline{l_r}$ $a = 8\,\underline{l_r} + 64\,\underline{l_\theta}$)

3·18-3. ஒரு தளத்து வளைவரையிலியங்கும் துகளின் நிலையானது $r = 2k \cos t$, $\theta = t$ என்னும் கோண தூரக் கூறுகளால், t என்னும் நேரத்தில் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கிறது. (a) பாதை (b) திசைவேகம் (c) முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(விடை : (a) $r = 2k \cos \theta$

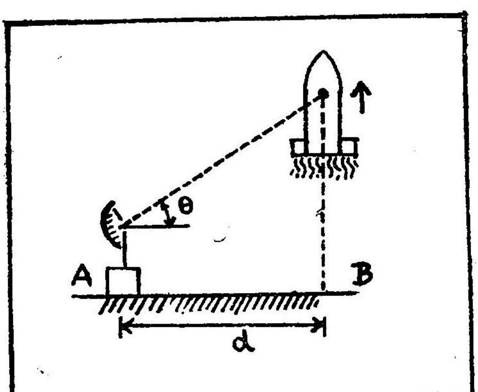
$$\underline{v} = 2k\,(-\sin t\,\underline{l_r} + \cos t\,\underline{l_\theta})$$

$$\underline{a} = -4k\,(\cos t\,\underline{l_r} + \sin \theta\,\underline{l_\theta})$$

3·18-4. $r = k\left(1 + \cos\frac{\pi t}{2}\right), \theta = \frac{\pi t}{2}$ என்னும்கோண தூரக் கூறுகளைப் பெற்ற துகளின் இயங்குவரை யாது? $t = 1$, 2 வினாடிகளில் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(விடை : $t = 1$வி என்றுள்ளபோது $v = \frac{k\pi}{\sqrt{2}}$. அது செயல்படும் திசை ஆரைத் திசையுடன் இடஞ்சுழியாக 135° கோணத்தை அமைத்த வண்ணம் உள்ளது. $a = \frac{\sqrt{5}\,.\,k\pi^2}{4}$. அது, செயல்படும் திசை ஆரைத் திசையுடன் இடஞ்சுழியாக 63·4° கோணத்தை அமைக்கிறது.)

3·18-5. ராக்கெட்டு ஒன்றுமேல் நோக்கிய செங்குத்துத் திசையில் படம் (3·28)-ல் காட்டியவாறு உயரக் கிளம்புகிறது. அதன் இயக்கமானது A என்னும் இடத்தில் நிறுவப்பட்டிருக்கும்



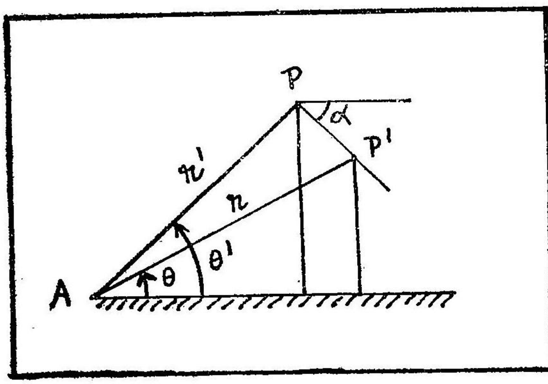
படம் 3·28

தொலை இயக்கமானி (Radar)யின் உதவியால் நோக்கப்படுகிறது. ராக்கெட்டின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றை $d\,\theta, \dot{\theta}$ என்பவைகளின் வாயிலாக வரையறுக்க.

(விடை : $\underline{v} = d\sec^2\theta, \dot{\theta}\ [\sin\theta\ \underline{l_r} + \cos\theta\ \underline{l_\theta}]$

$$\underline{a} = d\sec^2\theta\,(\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2\tan\theta)\,(\sin\theta\ \underline{l_r} + \cos\theta\ \underline{l_\theta})$$

3·18–6. கிழக்கு திசையை நோக்கிப் பறந்து கொண்டிருக்கும் விமானம் ஒன்று படம் (3·29)-ல் காட்டியவாறு, A என்னும் இடத்தில் உள்ள தொலை இயக்க மானியின் (Radar) உதவியால் P ($r = 3600$ மீ, $\theta = 27°$) என்னும் இடத்திலும், பிறகு இரண்டு விநாடிகள் கழித்து P' ($r' = 4000$ மீ, $\theta = 24°$) என்னுமிடத்தி



படம் 3·29

லும் நோக்கப்பட்டது. விமானத்தின் வேகத்தைத் தோராயமாகவும், அதன் இறக்கக் கோணம் α ஐயும் (Angle of dive) காண்க.

[விடை : $PP' = 447{\cdot}57$ மீ $\qquad \alpha = 4°12'$

வேகம் $= 223{\cdot}78$ மீ/வி.)

3·18-7 துகள் ஒன்று பின்வரும் சமன்பாடுகளால் வரையறுக்கப்பட்ட சுருளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் இயங்குகிறது எனில் (a) துகளின் வேகத்தை $b, \theta, \dot{\theta}$ என்பவற்றின் வாயிலாகக் காண்க (b) $\dot{\theta}$ என்னும் கோணத் திசைவேகமானது ω என்னும் ஒரு மாறிலி எனக்கொண்டு, துகளுடைய முடுக்கத்தின் எண் மதிப்பை b, θ, ω ஆகியவற்றின் மூலமாகக் காண்க.

(1) $r = b\theta$	(2) $r\theta = b$	(3) $r = e^{b\theta}$
ஆர்க்கிமிடீசின் சுருளி	அதிபரச் சுருளி	மடக்கைச் சுருளி
(Archimedian spiral)	(Hyperbolic spiral)	(Logarithmic spiral)

[விடை : (1) (a) $v = b\dot{\theta}\sqrt{1+\theta^2}$ (b) $a = b\omega^2\sqrt{4+\theta^2}$

(2) (a) $v = \dfrac{b\dot{\theta}}{\theta^2}\sqrt{\theta^2-1}$ (b) $a = \dfrac{b\omega^2}{\theta^3}\sqrt{4+\theta^4}$

(3) (a) $v = \sqrt{1+b^2}\,\dot{\theta}e^{b\theta}$ (b) $a = (1+b^2)\omega^2 e^{b\theta}$

3·18-8. ஒரு தளத்திலியங்கும் துகளின் நிலைத்திசையி $\underline{r} = [(1 \cdot 8 + 0 \cdot 6 \sin t)\underline{i} + 1 \cdot 5 t \underline{j}]$ மீ எனில், நேரம் $t = 1$ வி. என உள்ளபோது, பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(a) திசைவேகத்தின் ஆரைப்பகிர்வு

(b) திசைவேகத்தின் குறுக்குப்பகிர்வு

(c) முகட்டின் ஆரைப்பகிர்வு

(d) முகட்டின் குறுக்குப்பகிர்வு

விடை : (a) = 1·089 மீ/வி (b) 1·074 மீ/வி

(c) −0·426 மீ/வி² (d) 0·192 மீ/வி²)

3·18-9. 48 செ.மீ. ஆரையுள்ள சக்கரம், சமதளசாலையில் வினாடிக்கு 16 செ. மீ. வேகத்தில் வழுக்காமல் உருளுகிறது. சக்கரத்தின் ஆரைக்கால் (Spoke) ஒன்றில் வெளி நோக்கியவாறு பூச்சி ஒன்று வினாடிக்கு 10 செ. மீ. என்னும் சார்ந்த வேகத்துடன் (Relative to the wheel) ஊர்ந்து செல்கிறது. பூச்சியின் உண்மை வேகம் யாது? ஆரைக்கால் மேல் நோக்கி செங்குத்துத் திசையிலுள்ளபோது அதில் பூச்சியானது மையத்திலிருந்து 24 செ. மீ. தொலைவில் உள்ளதானால், அந்த நேரத்தில் பூச்சியின் உண்மையான வேகத்தைக் காண்க.

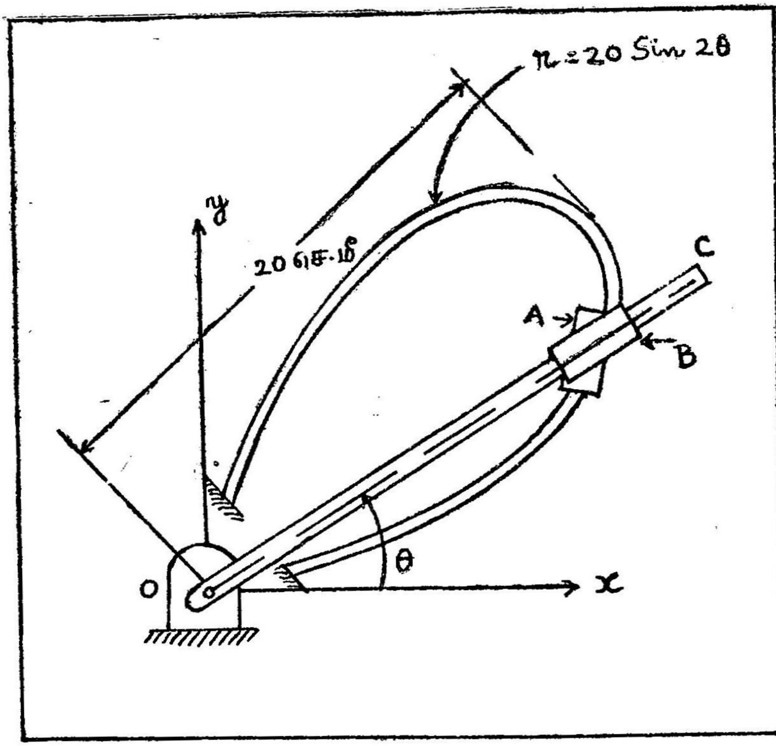
3·18-10. படம் (3·30)-ல் காட்டியுள்ள அமைப்பில், $r = 20 \sin 2\theta$ என்னும் உருவத்தில் வளைக்கப்பட்ட நிலையான கம்பியும், O என்னும் புள்ளியில் சுழலக்கூடிய OC என்னும் கோலும் உள்ளன. A, B என்னும் கட்டைகள் ஒன்றுக்கொன்று ஊசி முனையில் பிணைக்கப்பட்டு, A-ஆனது வளைந்த கம்பியிலும், B-ஆனது கோலிலும் வழுக்கி இயங்குமாறும் உள்ளன. OC என்னும் கோல், O-பற்றி வினாடிக்கு 10 ஆரையன்கள் அளவில் இடஞ் சுழியான கோணத்திசை வேகத்துடன் இயங்குகிறது. கட்டைகளின் திசைவேகத்தை, $\theta = 45°$ என்றுள்ளபோது காண்க.

[விடை : $v_A = v_B = 200$, $\underline{l_\theta} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, i + \frac{1}{\sqrt{2}}\, \underline{j}$]

3·18-11. $r = a \cos\theta + b$ என்னும் உருவத்தில் வளைக்கப்பட்டு நிலையாக உள்ள கம்பியில் வழுக்கி இயங்குமாறு துளையிட்ட மணி ஒன்று உள்ளது. கம்பியானது (x, y) தளத்திலுள்ளது.

$\theta\ Ct^2 + Dt^4$ ஆரையன்கள், $a = 8$ செ. மீ., $b = 12$ செ. மீ

$C = \dfrac{4\pi}{5}$ ஆரையன்/(விநாடி)^2, $D = -\dfrac{3\pi}{10}$ ஆரையன்/(விநாடி)^4



படம் 3·30

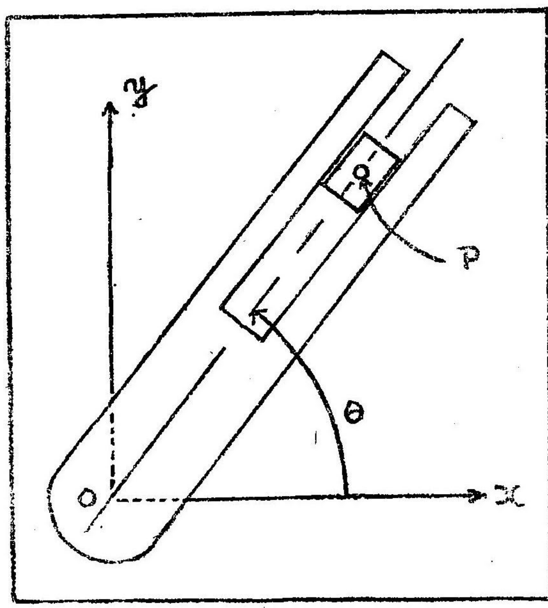
எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. நேரம் $t = 1$ விநாடியாக உள்ள போது, மணியின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

[விடை : $\underline{v} = -\dfrac{8\pi}{5}\left(3\ \underline{i} + 2\ \underline{j}\right)$ செ.மீ./விநாடி

$$\underline{a} = 16\pi\left\{\left(\frac{3}{2} + \frac{4\pi}{25}\right)\underline{i} + \left(1 - \frac{4\pi}{25}\right)\underline{j}\right\} \text{ செ. மீ./(விநாடி)}^2 \Big]$$

3·18-12. குடையப்பட்ட தடி ஒன்று, (x, y) தளத்தில் O என்றும் நிலையான புள்ளிபற்றி விநாடிக்கு 2 ஆரியன்கள் அளவுள்ள சீரான கோண வேகத்துடன் வலப்புறமாகச் சுழலும்படி, O-வில் ஓர் ஊசி முனையில் படம் (3 31)-ல் காட்டியவாறு பிணைக்கப்பட்டுள்ளது.

தடி ஒன்று சுழலும்போது, அதன் அடிமுனையிலிருந்து P என்னும் ஒரு மழமழப்பான சிறிய கட்டை வழுக்கி விநாடிக்கு



படம் 3·31

16 செ.மீ. அளவுள்ள சீரான வேகத்தில் வெளிநோக்கிச் செல்கிறது. $\theta = 60°$, $OP = 20$ செ.மீ. என்றுள்ளபோது, நழுவும் கட்டையின் திசை வேகத்தையும், முடுக்கத்தையும் காண்க.

[விடை : $\underline{v_P} = 8\,(2\,\underline{\phi_r} - 5\underline{\phi_\theta})$ செ.மீ./விநாடி

$$\underline{a_P} = -16\,(5\,\underline{\phi_r} + 4\underline{\phi_\theta}) \text{ செ.மீ./(விநாடி)}^2]$$

மட்டுமே அடையப்பட்டது. சில மாநிலங்களில் திட்டமிட்ட இலக்கிற்கும் நிறைவெய்திய அளவிற்குமிடையே வேறுபாடு மிகுதியாக இருந்தது.

மூன்றும் திட்டகாலத்தில் 680 பக்குவப்படுத்தும் (Processing) கூட்டுறவுகள் நிறுவத் திட்டமிடப்பட்டது. ஜூன் 1966 இறுதியில் 582 கூட்டுறவுகள் நிறுவப்பட்டிருந்தன. கூட்டுறவுச் சர்க்கரை ஆலைகள் 78, பருத்தி விதைநீக்கிக் கட்டும் சங்கங்கள் 155, நெல் உமிநீக்கும் சங்கங்கள் 329, அரிசி ஆலைகள் 142, எண்ணெய் ஆட்டும் சங்கங்கள் 298, காய்கறி-பழங்கள் சங்கங்கள் 22 திட்டகால இறுதியில் இருந்தன. மூன்றும் திட்டகாலத்தில் அரிசி ஆலைகளை அமைக்கக் கூட்டுறவுகளுக்கு உதவி வழங்கப்பட்டது.

நுகர்வோர் கூட்டுறவுச் சங்கங்கள் மூன்றும் திட்ட காலத்தில், மத்திய அரசால் உருவாக்கப்பட்ட திட்டத்தின்கீழ் பெருமளவு அரசாங்க ஆதரவும் உதவியும் பெற்றுப் பெருவளர்ச்சி கண்டன. பண்டசாலைகளின் எண்ணிக்கை 1960-61இல் 7,058 ஆக இருந்தது. 1965-66இல் 13,077 ஆக உயர்ந்தது. உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை 13.41 இலட்சத்திலிருந்து 29.30 இலட்சமாக மேற்கண்ட ஐந்தாண்டுகளில் பெருகிற்று. விற்பனையும் ரூ. 44 கோடியிலிருந்து ரூ. 198·35 கோடியாக வளர்ந்தது. இருப்பினும் பிரதம சங்கங்களில் மூன்றிலொருபங்கு செயலற்று இருந்தன; கால்பங்கு சங்கங்கள் நட்டத்தில் நடந்துவந்தன.

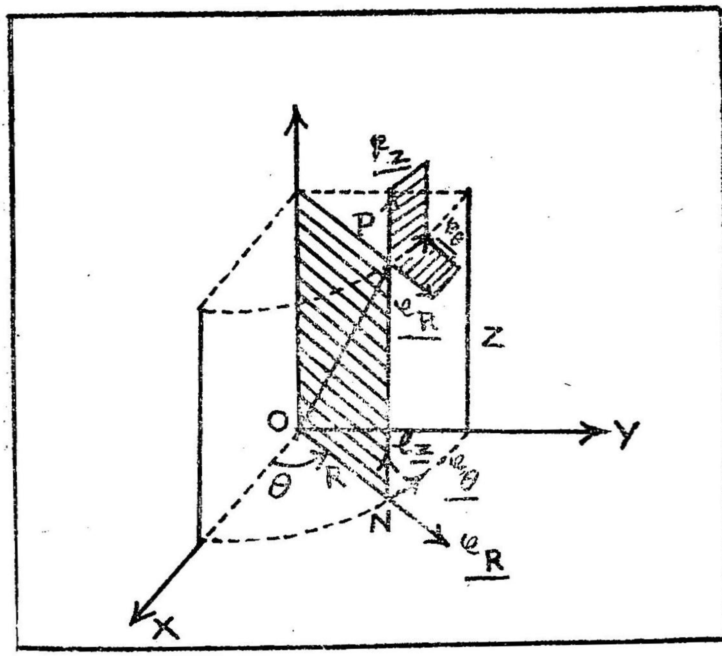
சந்தையிடுகைச் சங்கங்கள் (Marketing Societies) மூன்றும் திட்ட இறுதியாண்டில் ரூ. 360 கோடி மதிப்புள்ள விவசாய விளைபொருள்களைக் கையாள வேண்டுமெனக் குறியீடு மேற்கொள்ளப்பட்டு நிறைவெய்தவும் பட்டது. உணவு தானியங்கள் மட்டும் ரூ. 200 கோடியளவுக்குக் கூட்டுறவுகளால் கையாளப்பட வேண்டும் என்று கூட்டுறவு அமைச்சர்கள் மாநாடு பரிந்துரைத்தது. 1965-66இல் ரூ. 136·75 கோடியளவு உணவு தானியங்கள் சந்தையிடுகைச் சங்கங்களால் கையாளப்பட்டன.

நான்காம் திட்டகாலக் குறியீடுகள்

நான்காம் ஐந்தாண்டுத் திட்ட காலத்தில் (1969-74) கூட்டுறவு வளர்ச்சிக்கு ரூ. 178·57 கோடி ஒதுக்கப்பட்டுள்ளது. இதில் ரூ. 119·21 கோடி மாநில அரசுகளும், ரூ. 4·61 கோடி யூனியன் பிரதேசங்களும், ரூ. 24·50 மத்திய அரசு உருவாக்கும் திட்டங்களுக்கும், ரூ.30.25 கோடி மத்தியத் துறையினருக்கும் ஒதுக்கப்பட்டுள்ளது. இத் தொகைமட்டுமல்லாது நிலவள

யில் $\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}$ என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கும். இவ்வமைப்புக்கு பதிலாக உருளைக் கூறுகளுக்கு ஏற்றதான அமைப்பையும் மேற்கொள்ளலாம்.

Pயிலிருந்து (x, y) தளத்திற்கு படம் (3·33)-ல் காட்டியவாறு, PN என்னும் செங்குத்துக் கோட்டை வரைக. அது (x, y) தளத்தை N என்னும் புள்ளியில் வெட்டட்டும். ONஐச் சேர்க்க.



படம் 3·33

$ON = R$ எனவும், அது x அச்சுடன் அமைக்கும் கோணத்தை θ எனவும் கொள்க. ON திசையில் $\underline{\phi_R}$ என்னும் ஓரலகுத் திசையியையும், θ அதிகரிக்கும் போக்கில் ON-க்கு செங்குத்தாக $\underline{\phi_\theta}$ என்னும் மற்றோர் ஓரலகுத்திசையியையும் எடுக்க. ϕ_R, $\underline{\phi_\theta}$ என்பவை (x, y) என்னும் கிடைத்தளத்தில் ஆரை, குறுக்குத் திசைகளை வரையறுக்கும் ஓரலகுத்திசையிகளாகும். $\underline{k}$ என்னும் ஒரு நிலையான ஓரலகுத்திசையி (x, y) தளத்திற்கு செங்குத்தாக உள்ளதால், அது $\underline{\phi_R}$, $\underline{\phi_\theta}$ களுக்கும் செங்குத்தானதாகும்.

மேலும் துகள் (x, y, z) என்னும் குறிப்பிட்டச்சு அமைப்பைச் சார்ந்து இயங்கும்போது ϕ_R, ϕ_θ என்னும் ஓரலகுத் திசையிகள் மாறக்கூடியவை. அவைகள் பொதுவாக நேரத்தின் சார்பலனாகக் கருதப்படும். அதாவது $\frac{d\phi_R}{dt}$, $\frac{d\phi_\theta}{dt}$ என்பவை இருக்கக்கூடும். $\underline{k}$ என்பது நிலையான செங்குத்துத் திசையியைக் குறிப்பதாக உள்ளது.

எனவே $\underline{\phi_R}$, $\underline{\phi_\theta}$, $\underline{k}$ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும் ஒரு சுட்டமைப்பை வரையறுக்கத்தக்கதாக உள்ளன. இவைகள் முறையே ஆரை, குறுக்கு, நெட்டச்சுத் திசைகளை அறிவிக்கும். இவ்வளவைகளே Pயின் உருளைக் கூறுகளைத் தீர்மானிக்கின்றன. இம்முறையில் Pயின் நிலை, t என்னும் நேரத்தில், (R, θ, Z) என்னும் அளவுகளால் வரையறுக்கப்படும். திசையி முக்கோண விதிப்படி,

$$\underline{OP} = \underline{ON} + \underline{NP}$$
$$r = R\,\underline{\phi_R} + Z\,\underline{k}$$

ஆரை, குறுக்கு, நெட்டச்சுத் திசைகளைக் குறிக்கும் $(\underline{i_R}, i\theta, \underline{k})$ என்னும் அமைப்பில், உருளைக் கூறுகளைப் (cylindrical coordinates) பயன்படுத்தி இயங்கும் துகளின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் கீழ்வருமாறு காணலாம்.

$\underline{V}$ என்பது துகளின் திசைவேகத்தைக் குறிக்குமெனில்,

$$\underline{V} = \frac{d\,\underline{r}}{dt} = \frac{dR}{dt}\,\underline{\phi_R} + R\,\frac{d\,\underline{\phi_R}}{dt} + \frac{dZ}{dt}\,k$$

$$= \dot{R}\,\underline{\phi_R} + R\dot{\theta}\,\underline{\phi_\theta} + \dot{Z}\,\underline{k}$$

எனவே, துகளின் திசைவேகமானது

ஆரைத் திசைவேகம் $= \dot{R}\,\underline{\phi_r}$,

எனவும், குறுக்குத் திசையில் $= R\,\dot{\theta}\,\underline{\phi_\theta}$

எனவும், நெட்டச்சுத் திசையில் $= \dot{Z}\;\underline{k}$

எனவும் பிரிக்கப்பட்டுள்ளதை அறியலாம்.

$\underline{a}$ என்பது துகளின் முடுக்கத்தைக் குறிப்பதாகில்,

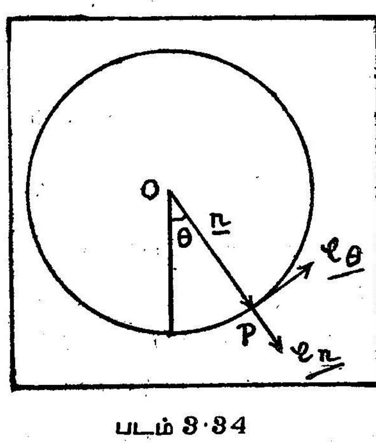
$$\underline{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d \underline{v}}{dt} = \ddot{R}\, \phi_R + \dot{R} \frac{d\phi_R}{dt} + \dot{R}\dot{\theta}\, \underline{\phi_\theta} + R\ddot{\theta}\, \underline{\phi_\theta} + R\dot{\theta} \frac{d\phi_\theta}{dt} + \ddot{z}\, \underline{k}$$

$$= \ddot{R}\, \underline{\phi_R} + \dot{R}\dot{\theta}\, \underline{\phi_\theta} + \dot{R}\dot{\theta}\, \underline{\phi_\theta} + R\ddot{\theta}\, \underline{\phi_\theta} - R\dot{\theta}^2\, \underline{\phi_R} + \ddot{z}\, \underline{k}$$

$$= (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\, \underline{\phi_R} + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\, \underline{\phi_\theta} + \ddot{z}\, \underline{k}$$

எனவே ஆரை, குறுக்கு நெட்டச்சுத்திசைகளில் முடுக்கத்தின் பகிர்வுகள் முறையே $(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)$, $(R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})$, $\ddot{z}$ என்பவையாகும்.

(குறிப்பு : (1) துகள் (x, y)-தளத்தில் ஒரு வட்டத்திலியங்குவதாகில், $R = r$, $Z = 0$ ஆகும். அப்போது $\dot{R} = \dot{Z} = 0$ என்றுவதால்.



படம் 3·34

$$\underline{v} = r\dot{\theta}\, \underline{\phi_\theta}$$

$$\underline{a} = r\ddot{\theta}\, \underline{\phi_\theta} - r\dot{\theta}^2\, \underline{\phi_r} \quad \text{ஆகும்.}$$

வட்ட இயக்கத்தில் $\underline{\phi_\theta}$ என்பது வட்டத்தின் தொடுகோட்டு திசையிலும், $\underline{\phi_r}$ என்பது வட்டமையத்திலிருந்து வெளிநோக்கி துகளின்

வழியாகச்செல்லும் ஆரைக்கோட்டிலும், படம் (3·34)-ல் காட்டிய வாறு அமைகின்றன.

எனவே $\underline{\phi_\theta} = \underline{i_t}$ = ஓரலகுத்தொடுகோட்டுத் திசையி

$\underline{\phi_r} = -\underline{i_n}$ = தொடுகோட்டுக்கு வெளிப்புறம் செங்குத்தாக அமையும் ஓரலகுத்திசையி.

(2) துகளின் (x, y, z) அச்சுத்தொலைவுகளை (R, θ, Z) உருளைக்கூறுகளின் வாயிலாகப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

$$x = R\cos\theta \qquad R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = R\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$Z = Z$$

அப்போது $R = R\cos\theta\, i + R\sin\theta\, \underline{j} + Z\,\underline{k}$ ஆகும்.)

3·20. மாதிரிக் கணக்கு

3·20-1. பரந்தவெளியில், t என்னும் நேரத்தில், இயங்கும் துகள் ஒன்றின் நிலையை $R = 2k\cos t$, $\theta = t$, $Z = pt$ என்னும் சமன்பாடுகள் வரையறுப்பதாகில்

(அ) துகளின் இயங்கு வரை

(ஆ) துகளின் திசைவேகம், முடுக்கம், ஆகியவற்றின் எண் மதிப்பு

(இ) வளையாரம் என்பவைகளைக் காண்க.

உருளைக் கூறுகளுக்கு உரிய அமைப்பில், துகளின் நிலைத்திசையி

$$\underline{r} = R\,\underline{i_R} + Z\,\underline{k} \quad \text{ஆகும்}$$

$$= R\cos\theta\,\underline{i} + R\sin\theta\,\underline{j} + Z\,\underline{k}$$

$$= 2k\cos t\cos t\;\underline{i} + 2k\cos t\sin t\;\underline{j} + pt\,\underline{k}$$

$$\therefore \quad x = 2k\cos^2 t; \quad y = 2k\cos t\sin t; \quad Z = pt$$

t என்னும் துணை அலகை நீக்கிட,

$$\frac{y}{x} = \tan t = \tan\left(\frac{z}{p}\right)$$

$y = x\tan\left(\frac{p}{z}\right)$ ஆகும். இதுவே துகளின் இயங்கு வரையாகும்.

$$R = 2k\cos t \qquad \theta = t \qquad Z = pt.$$

$$\dot{R} = -2k\sin t \qquad \dot{\theta} = 1 \qquad \dot{Z} = p$$

$$\ddot{R} = -2k\cos t \qquad \ddot{\theta} = 0 \qquad \ddot{Z} = 0$$

எனவே $\underline{v} = \underline{\dot{r}} = \dot{R}\underline{\phi_R} + R\dot{\theta}\,\underline{\phi_\theta} + \dot{Z}\,\underline{k}$

$$= -2k\sin t\,\underline{i_R} + 2k\cos t\,\underline{i_\theta} + p\,\underline{k}$$

$$v = \sqrt{4k^2\sin^2 t + 4k^2\cos^2 t + p^2} = \sqrt{4k^2 + p^2}$$

$$\underline{a} = \underline{\ddot{r}} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\underline{\phi_R} + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\underline{\phi_\theta} + \ddot{Z}\,\underline{k}$$

$$= (-2k\cos t - 2k\cos t)\,\underline{\phi_R} + (-2\cdot 2k\sin t)\,\underline{\phi_\theta}$$

$$= -4k\cos t\,\underline{\phi_R} - 4k\sin t\,\underline{\phi_\theta}$$

$$\underline{a} = \sqrt{16k^2\cos^2 t + 16k^2\sin^2 t} = 4k$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{4k^2 + p^2}\right) = 0$$

$\therefore \quad a^2 = a_t^2 + a_n^2 = a_n^2$ ஆகும்

$a_n = a = 4k$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4k^2 + p^2}{4k} = k + \frac{p^2}{4k}$$ ஆகும்.

3·21 பயிற்சி

3·21-1. வட்டநேர் உருளையின் வளைவுப்பரப்பில் (Curved surface of a right circular cylinder) இயங்கும் துகள் ஒன்றின் நிலையை t என்னும் நேரத்தில் $R = A$, $\theta = 2\pi t$, $Z = B\sin 2\pi nt$ என்னும் சமன்பாடுகள் வரையறுக்கின்றன. இங்கு A, B என்பவை மாறிலிகளாகவும் n என்பது ஒரு முழு எண்ணாகவும் கொண்டு

(அ) துகளின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் எண் மதிப்புகளைக் காண்க.

(ஆ) (i) $n = 1$ என்றால் துகள் ஒரு தளத்தியங்குகிறது எனவும்.

(ii) அப்பொழுது வளை ஆரையத்தின் பெரும, சிறும மதிப்புக்களைக் காண்க.

(விடை : $v = 2\pi\sqrt{A^2 + n^2 B^2 \cos^2 2\pi nt}$

$a = 2\pi\sqrt{A^2 + n^4 B^2 \sin^2 2\pi nt}$

3·21-2. பரந்த வெளியில், t என்னும் நேரத்தில், இயங்கும் துகள் ஒன்றின் நிலையை $M = 3t^2 \underline{\phi}_r$ என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கிறது. அத்திசையி Z அச்சுடன் $\phi = 45°$ என்னும் மாறாக் கோணத்தை அமைத்த வண்ணம், $\dot{\theta} = 2t\, k$ என்னும் கோண திசைவேகத்துடன் இயங்குகிறது எனில், அத்துகளின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

விடை : $\underline{v} = 4{\cdot}242t(\underline{\phi}_R + t^2 \underline{\phi}_\theta + k)$

$\underline{a} = 4{\cdot}242[(1-2t^4)\underline{\phi}_R + 5t^2 \underline{\phi}_\theta + k]]$

3·22. நேர்கோட்டியக்க வியல் (Rectilinear kinematics)

பரந்தவெளியில் வளைவரையிலியங்கும் துகளின் இடப் பெயர்ச்சி, திசைவேகம் முடுக்கம், ஆகியவற்றை வரையறுக்கும் திசையிகள் வெவ்வேறான திசைகளை பொதுவாகப் பெறத்தக்கவை யாகும். ஆனால் துகளின் இயக்கம் ஒரு நேர்க்கோட்டிலிருக்குமே யெனில், குறிப்பாக x அச்சில் அமையுமெனில், துகளின் நிலையை அறிவிக்கும் நிலைத்திசையி, அதன் திசை வேகம், முடுக்கம் ஆகியவை முறையே

$$\underline{r} = x\,\underline{i},\ \underline{v} = \dot{x}\,\underline{i} = \pm v\,\underline{i},\ \underline{a} = \ddot{x}\,\underline{i} = \pm a\,\underline{i}$$

ஆகும்.

இங்கு v, a என்பவை எண்மதிப்புக்களை மட்டுமே பெற்றிருப்பதால், அவைகள் மிகை எண்களைக் குறிக்கின்றன. ஆனால் t யில், x-ன் வகைக்கெழுக்களான $\dot{x}$, $\ddot{x}$ என்பவைகள் மிகையாகவோ அல்லது குறைவாகவோ இருக்கக்கூடும். ஆகவேதான், திசை வேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றை அறிவிக்கும்போது, "+" அல்லது "−" குறியானது, v, a-களுடன் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. நேர்க்கோட்டியக்கத்தைப் பெற்றுள்ள துகளுக்கு $(\dot{x}, v)$, $(\ddot{x}, a)$ களுக்கு உள்ள வேறுபாடுகள் குறிகளைப்பொறுத்துள்ளதால், பொதுவாக, குறைத்தற்குறி ("−") தவிர்க்கப்படும், துகள்

x அச்சின் மிகைத்திசையில் இயங்குமெனில், v, a என்பவைகள் மிகைக்கணியங்களாகவும், அது x அச்சின் குறைத்திசையி லியங்தும்போது, அவற்றைக் குறைக் கணியங்களாகவும் கொள்ளப் படும்.

மேலும் நேர்க்கோட்டியக்கத்தில், திசையானது வளைவரை இயக்கத்திலுள்ளதைப்போல், அவ்வளவு சிறப்புப்பங்கைப் பெறுத தால் திசையிச்சமன்பாடுகள் தவிர்க்கப்பட்டு, எண்ணிச் சமன் பாடுகள் வாயிலாகவே, நேர்க்கோட்டியக்கம் வரையறுக்கப்படும். எனவே,

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} \text{ என்றும்,}$$

நுண்கணிதச் சங்கிலித்தொடர் வகைக்கெழு விதிப்படி

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v = v\frac{dv}{dx}$$

என்றும் உள்ள எண்ணிச்சமன்பாடுகளை நேர்க்கோட்டியக்கத் திற்குப் பயன்படுத்தப்படும்.

இம்மூன்று சமன்பாடுகளிலும், v, a என்பவைகளைத் தேவைக்கு ஏற்றவாறு t அல்லது, x-ன் சார்பலனாகக் கருதி, தொகையிடல் (Integration) முறையைக்கொண்டு, நேர் கோட் டியக்கக் கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணலாம்.

நடைமுறையில், தொடக்கநேரத்தை t_0 என்றும், அந் நேரத்தில் x, v, a-களின் மதிப்புக்களை முறையே x_0, v_0, a_0 என்றும் குறிப்பது வழக்கம்.

எனவே நேர்க்கோட்டியக்கத்தைப் பெற்ற துகளின் நிலையை அறிய பின்வரும் சமன்பாடுகள் உதவுகின்றன. அவைகள்

$$dx = v(t)\,dt \qquad \text{அல்லது} \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$dt = \frac{dx}{v(x)} \qquad \text{அல்லது} \int_{t_0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v(x)}$$

பேரிலும் கிராமக் கூட்டுறவின் உறுப்பினர் கல்வித் திட்டம் சீராக நடத்தப்பெறவேண்டும்.

நான்காம் திட்டத்தின் சில முக்கியக் குறியிலக்குகள் :

1.	பிரதம சங்கங்களின் உறுப்பினர் எண்ணிக்கை (இலட்சத்தில்)	420
2.	உள்ளடங்கிய விவசாயக் குடும்பங்கள்	60%
3.	நான்காம் திட்ட இறுதியாண்டில் அளிக்கப்படவுள்ள குறுகிய-மத்தியாகாலக் கடன் (ரூ. கோடிகளில்)	750
4.	நான்காம் திட்டகாலத்தில் அளிக்கவிருக்கும் நீண்டகாலக் கடன் (ரூ. கோடிகளில்)	700
5.	புதிதாக நிறுவவேண்டிய பிரமத சந்தையிடுகைச் சங்கங்கள்	450
6.	கையாள வேண்டிய விவசாய விளைபொருள் மதிப்பு (ரூ. கோடிகளில்)	900*
7.	கூட்டுறவு விவசாயப் பக்குவப்படுத்தும் நிலையங்கள்	2,000
8.	கூட்டுறவுகள்வழி விற்பனையாகக் கூடிய உரங்கள் (ரூ. கோடிகளில்)	650
9.	பாதுகாப்பு வசதி (Storage) (மில்லியன் டன்களில்)	4·6
10.	கிராமப்புறங்களில் வழங்கவிருக்கும் நுகர்ச்சிப் பொருள்கள் (ரூ. கோடிகளில்)	500
11.	நகர்ப்புற நுகர்வோர் கூட்டுறவுகள்வழி விற்பனை (ரூ. கோடிகளில்)	400

நான்காம் திட்ட காலத்தில் மாநிலத் திட்டங்களுக்கு உத்தேசிக்கப்பட்ட ஒதுக்கீடு

திட்டத்தின் பெயர்	ஒதுக்கீட்டுத் தொகை ரூ. இலட்சத்தில்
கடன்	2800·00
சந்தையிடுகை, பண்டப் பாதுகாப்பு	5050·00
சர்க்கரை ஆலைகள்	1000·00
சர்க்கரை ஆலைகளல்லாத பிற பக்குவப்படுத்தல் சங்கங்கள்	2500·00
கூட்டுறவுப் பண்ணை (மாநிலங்களின் பங்கு)	450·00
கல்வி, பயிற்சி	750·00
கூடுதல் இலாகா ஊழியர்	500·00
பிற திட்டங்கள்	600·00
	13650·00

* 1968-69 இல் உள்ள விலைவாசிப்படி

மத்தியத் திட்டங்களுக்கு உத்தேசிக்கப்பட்ட ஒதுக்கீடு :

திட்டத்தின் பெயர்	ஒதுக்கீட்டுத் தொகை (ரூ. இலட்சத்தில்)
கூட்டுறவுப் பயிற்சி, கல்வி (மத்தியக் கூட்டுறவுப் பயிற்சிக் குழு, தேசீய இந்தியக் கூட்டுறவு ஒன்றியம் ஆகியவற்றிற்கு மானியம்)	300·00
கிராமப்புறங்களில் நுகர்ச்சிப் பண்டங்களை வழங்கல்	100·00
கூட்டுறவுப் பண்ணை	1,350·00

கூட்டுறவு வளர்ச்சி—ஒரு கண்ணோட்டம்

கூட்டுறவு இயக்கம் கடந்த 25 ஆண்டுகளில் 1947-72 அதாவது நாடு விடுதலை பெற்றதிலிருந்து வளர்ந்தவண்ணத்தைச் சற்று காண்போம். புள்ளிவிவரங்கள் 1971 ஜூன் இறுதியிலுள்ள நிலவரத்தைக் குறிக்கின்றன.

1947இல் நம் நாட்டில் 1,39,000 பல்வேறு வகைக் கூட்டுறவுகள் இயங்கிவந்தன. முதல் திட்டத் துவக்கத்தில் இவ்வெண்ணிக்கை, 1,80,000 ஆக வளர்ந்தது. இரண்டாம் திட்டகால ஆரம்பத்தில் இது மேலும் உயர்ந்து 2,40,000 ஆக நின்றது. மூன்றாம் திட்டத் துவக்கத்தில் மொத்தம் 3,30,000 கூட்டுறவுகள் இயங்கிவந்தன. 1970-71ஆம் ஆண்டிலும் இதே எண்ணிக்கையளவு கூட்டுறவுகளிருந்து வருகின்றன. பிரதம விவசாயக் கூட்டுறவுகளின் எண்ணிக்கை ஆண்டுக்கு ஆண்டு குறைந்து வந்தபோதிலும் மேற்கண்ட மொத்த எண்ணிக்கை குறையாதிருப்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

விவசாயக் கடன் சங்கங்கள்

1960-61இல் 2,12,000 விவசாயக் கடன் சங்கங்களிருந்தன. ஒரு கிராமத்திற்கு ஒரு கூட்டுறவு என்ற கொள்கை மாறி வளமார்ந்த (vioble) தன்னிறைவு பெற்ற சங்கங்கள் அமைக்கப் படவேண்டுமென்ற கொள்கை ஏற்கப்பட்டது காரணமாக 1965-66இல் 1,92,000 கூட்டுறவு விவசாயச் சங்கங்களும் 1970-71இல் 1,62,000 சங்கங்களாகக் குறைந்தன. நலிந்த சங்கங்கள் மூடப்பட்டு, வளம்பெரு வாய்ப்பற்றச் சங்கங்கள் வேறு சங்கங்களுடன் இணைக்கப்பெற்றுக் கூட்டுறவின் அடித்தளம் வலுப்படுத்தப்பட்டு வருகிறது.

3·22-2. தானாகவே புவியை நோக்கி விழும் பொருள்களின் முடுக்கம் (Acceleration of freely falling bodies towards the earth)

ஒரு பொருளானது வெற்றிடத்தில் புவியைநோக்கி விழும்படிச் செய்தால், அது புவியின் ஓரிடத்தில் எப்பொழுதும் ஒரே அளவுள்ளதான ஒரு முடுக்கத்துடன் இயங்குமென பரிசோதனைகளின் வாயிலாக அறியமுடிகிறது. இவ்வித முடுக்கம், அப்பொருளைப் புவியானது தன்மயத்தை நோக்கி ஈர்ப்பதால் ஏற்படுவதாகும். எனவே இது "புவியீர்ப்பு விசையால் ஏற்படும் முடுக்கம்" (Acceleration due to gravity) எனக் கூறப்படும். இவ்வித முடுக்கம் " g " என்னும் எழுத்தால் குறிக்கப்படும்.

g-யின் மதிப்பு ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் எப்பொருளுக்கும் ஒரே அளவுள்ளதாக இருக்கிறது. ஆனால் அதன் மதிப்பு புவியின் மேற்பரப்பில் இடத்திற்கிடம் சிறிது அளவில் மாறுபடும். புவியின் நடுவரை (Eqator)க்கு அருகில் அதன் மதிப்பு மிகக்குறைவாகவும், துருவங்களுக்கு (Poles) அருகே மிகமிக அதிகமாகவும் இருக்கிறது.

பொதுவாக, g-யின் மதிப்பு மெட்ரிக் "*C.G S.*" முறையில் 981 செ.மீ/வி^{2} என்றும் " *M.K.S.* " முறையில் 9·81 மீ வி^{2} என்றும், பிரிட்டன் " *F.P.S.* " முறையில் 32·2 அ/வி^{2} என்றும் கொள்ளப்படும்.

3·22-3. புவியீர்ப்பின் கீழ் நேர்க்கியக்குத்தியக்கம் (Vertical motion under gravity)

ஒரு பொருள் v_0 என்னும் வேகத்தில் நேராகக் கீழ்நோக்கி எறியப்பட்டால், இயக்க இயல் சமன்பாடுகள்

$$v = v_0 + gt$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2gs \quad \text{என்றாகும்.}$$

ஒரு பொருளைத் தானாகவே கீழ்நோக்கி விழும்படி ஒழுவ விட்டால், இயக்க இயல் சமன்பாடுகள்

$$v = gt$$

$$s = \frac{1}{2} gt^2$$

$$v^2 = 2gs \quad \text{என்றாகும்.}$$

3·22-4. புவியீர்ப்பின் திசைக்கு எதிரான மேல்நோக்கிய குத்துதிசையியக்கம் (Vertical motion against gravity)

ஒரு பொருளானது மேல்நோக்கிய நிலைக்குத்து திசையில், v_0 என்னும் வேகத்தில் எறியப்பட்டால்,

$$v = v_0 - gt$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v^2 = {v_0}^2 - 2gs$$

என்னும் இயக்க இயல்சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

இவ்வியக்கத்தில், பொருளைப் புவியீர்ப்புக்கவர்ச்சி விசை கீழ் நோக்கி இழுப்பதால்,

$$t = \frac{v_0}{g} \quad \text{என்னும்போது,}$$

பொருள் அக்கணத்தில் ஓய்விலிருக்கிறது. பிறகு அது புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தால், வந்தவழியே புவியை நோக்கித் திரும்புகிறது.

மேலும் பொருள் ஒரு குறிப்பிட்ட h என்னும் உயரத்தை அடையும் நேரம்,

$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்வு காணும் போது கிடைக்கப்படும். இச் சமன்பாடு, t-யில் இருபடியாக உள்ளதால், இதற்கு இருமிகையான மதிப்புள்ள மூலகங்கள் உள்ளன. குறைந்த மூலம் அப்பொருளானது குறிப்பிட்ட உயரத்தை மேல்நோக்கி இயங்கும்போது அடைய எடுத்துக் கொண்ட நேரத்தையும், கூடிய அல்லது பெரிய மூலம் கீழ்நோக்கி இயங்கும்போது அவ்வுயரத்தை அடைய எடுத்துகொண்ட நேரத் தையும் தருகின்றன.

மேல் நோக்கி எறிந்த பொருளானது, மிக உயர்ந்த புள்ளியை எய்தும்போது, முடிவு வேகம் பூச்சியமாகும் என்பதால், அது சென்ற மிகப்பெரிய செங்குத்துத் தொலைவு $\frac{{v_0}^2}{2g}$ ஆகும்.

3·23. மாதிரிக் கணக்குகள்.

3·23-1. ஒரு நேர்க்கோட்டியங்கும் துகள் ஒன்று t வினாடி யில், O என்னும் துவக்கப்புள்ளியிலிருந்து

$$s = t^3 - 6t^2 + 15t + 40 \text{ செ.மீ}$$

என்னும் தொலைவைப் பெற்றுள்ளதாகில், (a) அதன் வேகம் எந்நேரங்களில் பூச்சியமாகும், (b) 5 வினாடிகளில் கடந்த

தொலைவு, (c) $t = 5$ வினாடியாக உள்ளபோது அதன் முடுக்கம் ஆகியவற்றை காண்க.

இங்கு,

$$s = t^3 - 6t^2 + 15t + 40 \text{ செ.மீ}$$

$$\therefore \quad v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 15 \text{ செ.மீ}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 12 \text{ செ.மீ/வி}^2$$

$v = 0$ என்றிருக்க,

$3t^2 - 12t + 15 = 0$ ஆகும்.

$\therefore \quad t = -1$ அல்லது $t = 5$ வி என்றுள்ளபோது. வேகம் பூச்சியமாகும்.

$$s_5 = s\Big|_{t=5} = 125 - 6 \times 25 + 15 \times 5 + 40 = -60 \text{ செ.மீ}$$

$$s_0 = s\Big|_{t=0} = 40 \text{ செ.மீ}$$

எனவே 5 வினாடிகளில் சென்ற தொலைவு

$$= s_5 - s_0 = -100 \text{ செ.மீ} \quad \text{ஆகும்.}$$

$$a\Big|_{t=5} = 6 \times 5 - 12 = 18 \text{ செ.மீ/வி}^2.$$

3·23-2. ஒரு துகள் x அச்சில் $v = \frac{x^2}{2}$ என்னும் வேகத்தில் இயங்குகிறது. நேரம் $t = 0$ வினாடி என்றுள்ளபோது, அது $x = 1$மீ என்னுமிடத்திலுள்ளது. அது $x = 2$ மீ என்னுமிடத்தை அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் நேரத்தையும், அவ்விடத்தில் அதன் முடுக்கத்தையும் காண்க.

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_0^t dt = \int_1^2 \frac{2}{x^2}\, dx$$

$$t = 2\left(-\frac{1}{x}\right)_1^2 = 1 \text{ வி.}$$

$$a = v\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{x^2}{2} \times x = \frac{x^3}{2}$$

$$a\Big|_{x=2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ மீ/வி}^2.$$

2·23-3. ஒரு துகள் x அச்சில் $v = 0{\cdot}6x + 0{\cdot}9$ (மீ.வி) என்னும் நியதிக்குட்பட்டு இயங்குகிறது. அது தொடக்கப் புள்ளியின் வழியே இயங்கும்போது. அதன் முடுக்கம் யாது? தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து, $x = 4{\cdot}05$ மீ என்ற தொலைவிலமையும் புள்ளிக்குச் செல்ல, அது எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் யாது?

இங்கு

$$v = 0{\cdot}6x + 0{\cdot}9 \text{ மீ/வி}$$

$$a = \frac{vdv}{dx} = (0{\cdot}6x + 0{\cdot}9)(0{\cdot}6)$$

$$= 0{\cdot}36x + 0{\cdot}54$$

$$a\Big|_{x=0} = 0{\cdot}54 \text{ மீ/வி}^2 \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் $\dfrac{dx}{dt} = v = 0{\cdot}6x + 0{\cdot}9$

$$\therefore \int_0^t dt = \int_0^{4\cdot05} \frac{dx}{0{\cdot}6x + 0{\cdot}9}$$

$$t = \frac{1}{0{\cdot}6}\Big[\log_e(0{\cdot}6x + 0{\cdot}9)\Big]_0^{4\cdot05}$$

$$= \frac{5}{3}\log_e\left(\frac{11}{3}\right) \text{ வி.}$$

3·23-4. வளி மண்டலத்தின் வழியாக விழும் துகள் $a = g(1 - k^2v^2)$ என்னும் முடுக்கத்தைப் பெற்றுள்ளது. $t = 0$ என்னும் நேரத்தில், $s = 0$ என்றுள்ள இடத்தில், துகள் ஓய்விலிருந்து இயங்குவதாகில்,

(i) t நேரத்திற்குப் பிறகு, அதன் வேகம்

$$v = \frac{1}{k}\tan h\left(\frac{gt}{k}\right)$$ என்றும்

(ii) துகள் s தொலைவிலுள்ளபோது, s-க்கும், v-க்கும் உள்ள உறவு

$$v^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 - e^{-2k^2 gs}\right)$$ என்றும் நிறுவுக.

(iii) துகளின் எல்லை அல்லது இறுதிவேகம் (limiting velocity) யாது ?

$$\frac{dv}{dt} = a = g\,(1 - k^2 v^2)$$

$$\int_{t=0}^{t} g\,dt = \int_{0}^{v} \frac{dv}{1 - k^2 v^2}$$

$$gt = \frac{1}{k^2}\int_0^v \frac{dv}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 - v^2}$$

$$= \frac{1}{k^2}\cdot\frac{k}{2}\left[\log\left(\frac{\frac{1}{k} + v}{\frac{1}{k} - v}\right)\right]_0^v$$

$$= \frac{1}{2k}\log\left(\frac{\frac{1}{k} + v}{\frac{1}{k} - v}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{1}{k} + v}{\frac{1}{k} - v} = e^{2kgt}$$

$$v = \frac{1}{k}\left\{\frac{e^{2kgt} - 1}{e^{2kgt} + 1}\right\}$$

அதாவது $v = \frac{1}{k}\tan h\,(2kgt)$ ஆகும்.

$$\frac{vdv}{ds} = a = g\,(1-k^2v^2)$$

$$\int_0^v \frac{vdv}{1-k^2v^2} = gs$$

$$-\frac{1}{2k^2}\log\,(1-k^2v^2) = gs.$$

அதாவது, $\log\,(1-k^2v^2 = -2k^2g\,.s$

$$1-k^2v^2 = e^{-2k^2gs}$$

அல்லது $v^2 = \frac{1}{k^2}\left(1-e^{-2k^2gs}\right)$ ஆகும்.

நேரம் $t \rightarrow \infty$ என்றுகும்போது, துகள் பெறும் வேகம், எல்லை வேகம் எனப்படும். எனவே துகளின் இறுதியான வேகமானது

$$v_{\text{எல்லை}} = \underset{t \rightarrow \infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{k}\left\{\frac{e^{2kgt}-1}{e^{2kgt}+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{k}\ \underset{t \rightarrow \infty}{\text{எல்லை}} \left\{\frac{1-e^{-2kgt}}{1+e^{-2kgt}}\right\}$$

$$= \frac{1}{k} \times 1$$

$$= \frac{1}{k}\ .$$

3·23–5. புவியை நோக்கி விழும் துகளின் முடுக்கத்தை, அது புவியின் மையத்திலிருந்து r என்னும் தொலைவிலுள்ளபோது,

$$a = -\frac{gR^2}{r^2}$$ என்னும் சமன்பாடு வரையறுக்கிறது.

இங்கு g, R என்பவை, புவிப்பரப்பின்மேல் புவியீர்ப்பு முடுக்கமும், புவியின் ஆரையுமாகும். புவிப்பரப்பிலிருந்து துகள் எந்த வேகத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியப்பட்டால், அது புவியைத் திருப்பி வந்தடையாது எனக்காண்க.

(இந்த வேகம் தப்பி ஓடும் வேகம் (escape velocity) எனப்படும்)

$$\frac{vdv}{dr} = a = \frac{-gR^2}{r^2}$$

$$\int_{v_0}^{0} vdv = -gR^2 \int_{R}^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{-v_0^2}{2} = gR^2 \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{\infty}$$

$$v_0^2 = 2gR$$

v_0 = தப்பி ஓடும் வேகம் $= \sqrt{2gR}$ ஆகும்.

3·24. பயிற்சி

3·24-1. துகள் ஒன்று x அச்சில், தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து, $v = \frac{4}{3(1+x)}$ (செ.மீ./வி) என்னும் நியதிப்படி இயங்குகிறது. அது $x = 6$ செ.மீ உள்ள இடத்தை அடைவதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் யாது? x-ன் எந்த மதிப்பிற்கு, துகளின் முடுக்கம் (-6) செ.மீ/வி^{2} என்றிருக்கும்?

(விடை : 18 விநாடிகள், $-\frac{1}{3}$ செ.மீ)

3·24-2. தடை ஊடே நேர்க்கோட்டியக்கத்தைப் பெற்ற துகள் (motion in a resisting medium) ஒன்றின் முடுக்கம் (a செ.மீ/வி^{2}), அதன் வேகத்தின் (v செ.மீ/வி) வாயிலாக $a = 5 - 2v$ என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படுகிறது. துகள் ஓய்விலிருந்து விழுவதானால், அது எந்நேரத்தில் $1·5$ செ.மீ/வி என்னும் வேகத்தைப் பெறும்?

(விடை : $\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{5}{2}\right)$ வி)

3·24-3. x அச்சில் இயங்கும் துகள் ஒன்றின் முடுக்கத்தை $a = 1·8t - 0·9t^2$ என்னும் சமன்பாடு வரையறுக்கிறது. நேரம் $t = 0$ வி ஆக உள்ளபோது, துகள் $x = 0·3$ மீ உள்ள இடத்தில்

ஓய்விலுள்ளது. $t = 1$ வி என்றுள்ளபோது அதன் வேகத்தைக் காண்க.

(விடை : 0·6 மீ/வி)

3·24-4. இயங்கும் துகள் ஒன்றின் முடுக்கத்தை $a = k \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)$ என்னும் சமன்பாடு வரையறுக்கிறது. $t = 0$ என்னும் நேரத்தில், துகள் $s = 0$ என்னும் இடத்தில் ஓய்விலிருந்து இயங்குவதாகில்,

(i) துகளின் இயக்கச் சமன்பாடுகள்

(ii) வேகத்தின் பெரும மதிப்பு

(iii) $t = 2T$ என்றுள்ளபோது அதன் நிலை

(vi) சராசரி வேகம், ஆகியவற்றைக் காண்க.

(விடை : (i) $v = \frac{kT}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi t}{T}\right)$

$$s = \frac{k\,T^2}{\pi}\left(\frac{\pi t}{T} - \sin\frac{\pi t}{T}\right)$$

(ii) $v_{\text{பெருமம்}} = \frac{2k\,T}{\pi}$

(iii) $s_{t\,=\,2T} = \frac{2k\,T^2}{\pi}$

(iv) $v_{\text{சராசரி}} = \frac{K\,T}{\pi}$)

3·24-5. $t = 0$ என்னும் நேரத்தில் துகள் ஒன்று, x அச்சில் $x = 20$ செ.மீ என்னுமிடத்திலிருந்து இயங்குகிறது. துகளின் வேகத்தை $v = 0{\cdot}05x^2$ (மீ, வி) என்னும் சமன்பாடு வரையறுப்பதானால்,

(i) துகளின் தொடக்கநிலை முடுக்கம்,

(ii) $t = 15$ வி ஆக உள்ளபோது, துகள் இருக்குமிடம், ஆகியவற்றைக் காண்க.

(விடை : 0·5 செ. மீ./வி^{2}; 4 மீ)

3·24-6. x அச்சில் இயங்கிடும் துகள் ஒன்றின் முடுக்கத்தை $a = (4{\cdot}5 - 1{\cdot}5\,x)$ மீ/வி^{2} (மீ. வி.) என்னும் சமன்பாடு வரையறுப்பதாகில்,

(i) $x = 0{\cdot}9$ மீ என்றுள்ளபோது. துகளின் வேகம் யாது?

(ii) $x = 0$ விலிருந்து. $x = 0{\cdot}9$ மீ என்னுமிடத்திற்குச் செல்ல துகள் எடுத்துக்கொண்ட நேரம் யாது ?

(iii) $x = 3$ மீ என்னுமிடத்தில் துகளின் வேகம் யாது ?

(iv) $x = 0$ விலிருந்து $x = 3$ மீ உள்ள இடத்திற்குச் செல்ல. துகள் எடுத்துக் கொண்ட நேரம் யாது ?

(v) துகளின் இயக்கத்தை விளக்குக.

(விடை : (i) 2·774 மீ/வி.
(ii) 0·4753 வி
(iii) 4·743 மீ/வி
(iv) 0·6769 வி
(v) துகள் ஒரு தனி இசையியக்கத்தைப் (Simple harmonic motion) பெற்றுள்ளது).

3·24-7. x அச்சின் மிகைத்திசையில் தொடக்கப்புள்ளியில் ஓய்விலிருந்து ஒரு துகள் இயங்கி, t என்னும் நேரத்தில் $v = 4\sqrt{t}$ செ/வி என்ற வேகத்தில் செல்கிறது.

(i) $t = 9$ வி யாக உள்ளபோது, துகளின் நிலையைக் காண்க.

(ii) $x = 576$ செ. மீ. என்றுள்ளபோது துகளின் முடுக்கத்தைக் காண்க.

[விடை : (i) 72 செ.மீ. (ii) $\frac{1}{3}$ செ. மீ./வி^{2}]

3·24-8. x அச்சில் தொடக்கப்புள்ளியில் ஓய்விலிருந்து இயங்கும் துகளின் வேகத்தை $v = 4\sqrt{x}$ செ. மீ./வி என்னும் சமன்பாடு வரையறுக்கிறது.

(i) $x = 800$ செ. மீ. என்றுள்ள இடத்தில் துகளின் முடுக்கம் யாது ?

(ii) $x = 900$ செ. மீ. என்னுமிடத்தை அடைய, துகள் எடுத்துக் கொண்ட நேரம் யாது ?

(விடை : (i) 8 செ மீ/வி^{2} (ii) 15 வி)

3·24-9. x அச்சில் தொடக்கப்புள்ளியில் ஓய்விலிருந்து இயங்கும் துகளின் முடுக்கமானது, $a = \left(10 - \frac{1}{3} v\right)$ மீ/வி^{2} எனனும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படுகிறது.

(i) வேகம் வினாடிக்கு 15 மீ ஆக உள்ளபோது, துகள் எடுத்துக்கொண்ட நேரம் யாது?

(ii) 1 வினாடிக்குப் பிறகு, துகள் தொடக்கப்புள்ளியிலிருந்து எந்தத்தொலைவிலிருக்கும்?

(விடை : (i) $3 \log_e 2$ வி (ii) 12·99 மீ)

4. துகளின் விசையியல்

(Kinetics of a particle)

(வளைகோடு, நேர்கோட்டியக்கம்)

4·1. முன்னுரை

விசையியல் என்பது இயக்கவிசையியலின் இரண்டாவது பகுதியாகும். இது துகள்கள் அல்லது பொருள்கள் ஆகியவற்றின் இயக்கம், இயக்கத்திற்கு காரணமான விசைகள், ஆற்றல், உந்தம் என்பவற்றைத் தொடர்பு படுத்திக் கூறுகிறது.

இவ்வத்தியாயத்தில் துகளின் விசையியலைப்பற்றி கூறப்படும். துகளுக்கு உரிய விசையியலின் அடிப்படைக் கருத்துக்களை, துகள்களின் தொகுதி, கட்டிறுக்கப்பொருள், என்பவைகளின் விசையியலைப்பற்றி அறிய பயன்படுத்தப்படும்.

விசையியலில் இரண்டு வகையான அடிப்படைப் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வுகாண வேண்டியுள்ளது.

முதலாம் பிரச்சினையில், ஒரு துகள், அல்லது ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் அல்லது கட்டிறுக்கப் பொருள்களின் ஒரு தொகுதி ஆகியவை ஒவ்வொன்றின் இயக்கமும் (Motion) முற்றிலும் தெரிந்துள்ளதாகும். துகள் அல்லது பொருள் அல்லது பொருள்களின் தொகுதி ஆகியவற்றில் செயல்படும் விசைகளைப்பற்றிய விவரங்கள் கணக்கிடப் பட்டுத் தீர்மானிக்க வேண்டிவருகிறது.

இரண்டாம் பிரச்சினையில், துகள் அல்லது பொருள் அல்லது பொருள்களின் தொகுதியில் செயல்படும் விசைகள் அனைத்தும் தெரியுமெனக்கொண்டு, அத்துகள் அல்லது பொருள் அல்லது பொருள்களின் தொகுதியில் இயக்கம் எவ்வாறு விளைவிக்கப் படுகிறது என்பதைக் காண வேண்டியதாகிறது.

முதலாவது பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண்பது எளிதாகும். ஆனால் முதல் பிரச்சினையின் நேர்மாறான இரண்டாவதில் சிக்கல்களைத் தவிர்த்துத் தீர்வு காண்பது, சில எளிதான நிலைமைகளிலும் கூட (even in simple cases) கணித இயல் நுணுக்கத்திற்கு அப்பாற்பட்டதாகும். எனவே இயக்கவிசையியலில் இரண்டாவது பிரச்சினையே சிறப்புப்பெற்றுள்ளதாகும்.

விசையியல் பகுதியில், விசையைப் பற்றிய வரையறை, அவ்விசைக்கும் துகளின் இயக்கத்திற்குமுள்ள தொடர்பு, அவ்விதத் தொடர்பை அடிப்படைச் சமன்பாடுகளால் வரையறுப்பது ஆகியவை அடங்கும். இவைகள் அனைத்தும் மூன்று முக்கிய மெய்ம்மைகளை (axioms) ஆதாரமாகக் கொண்டுள்ளன. இம்மெய்ம்மைகளை நேரடியாக நிருபிக்கக்கூடிய எவ்விதச் சோதனையும் கிடையாது. இவ்வித அடிப்படைக்கருத்துக்களை கலிலியோ என்பவர் கி. பி. 1590 ஆம் ஆண்டிலேயே அறிந்திருந்தார் என்றாலும், இவற்றை முறையான வடிவத்தில் கி. பி. 1686 ஆம் ஆண்டு முதல் முதலாக வெளியிட்ட பெருமை நியூட்டனையே சாரும். இம்மெய்ம்மைகளே நியூட்டனின் இயக்க இயல் விதிகளாகும். இவ்விதிகளை விவரிக்குமுன், கீழ்காணும் வரையறைகளை நோக்குவது முறையாகும்.

4·2 எடையும் நிறையும் (Weight and mass)

4·2-1. எடை (Weight)

ஒரு பொருளானது புவியைநோக்கி வெற்றிடத்தில் விழும்படி பரிசோதனை ஒன்றைச் செய்தால், அது ஒரு சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்குகிறதென அறியலாம். இவ்வித முடுக்கம் புவியீர்ப்பு விசையினால் ஏற்படுகிறது. ஒரு பொருளின் எடை என்பது அப்பொருளைப் புவியை நோக்கி இழுக்கும் விசையின் அளவு ஆகும். புவியீர்ப்பு இயக்கம் இடத்திற்கிடையே மாறுபடுவதால், பொருளின் எடையும் மாறுபடுகிறது.

ஒரு பொருளின் எடையை வில்தராசின் (Spring balance) உதவியால் அளவிடமுடியும். இதில பொருளின் எடையானது, தராசின் வில்லை ஏதோ ஓரளவு இழுத்து நீட்டுவதற்கு வேண்டிய விசையுடன் ஒப்பிடப்படுகின்றது வில் தராசை வெவ்வேறிடங்களுக்கு எடுத்துச் செல்லும்போது, பொருளின் எடை மாறுவது புலனாகும்.

ஒரு பொருள் தானாகவே விழும்போது, அதன் எடை அதன் மேல் செயல்படுவதால் ஏற்படும் விசையின் காரணமாக

அப்பொருளில் முடுக்கம் ஏற்படுகிறது. அப்பொருள் புவிப்பரப்பின் மேல் விழுந்து அமைதி நிலையிலிருக்கும்போதும், அதன் எடையானது அப்பொருளில் செயல்பட்டுக்கொண்டிருக்கிறது. ஆனால், அப்பொருளின்மேல், புவிப்பரப்பின் எதிர்த்தாக்கம் செயல்படுவதன் காரணமாக, இயக்கம் தடைபடுகிறது.

4·2-2. நிறை (Mass)

கொடுக்கப்பட்ட ஒருபொருளின் எடை w-வும், புவியீர்ப்பு முடுக்கம் g-யும் நேர்விகிதத்திலுள்ளன. எனவே அப்பொருளுக்கு $\frac{w}{g}$ என்பது எவ்விடத்திலும் ஒரு மாறிலியாகும். இவ் விகிதமே எடுத்த பொருளின் நிறை (Mass) எனப்படும். அது M என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படும். பொருளின் நிறை, அதன் பருமன், உருவ அமைப்பு போன்றவற்றை சார்ந்திருப்பினும், பரந்த உலகில் அது அதன் இருப்பிடத்தின் நிலையைப் பொறுத்ததாயில்லை. ஆகவே பொருளின் எடை)w) இடத்திற்கிடம் மாறுபட்ட போதிலும், அதன் நிறை (m) மாருத மதிப்பளவாக இருக்கும்.

பொருள்களின் நிறைகளைச் சாதாரண தராசு (Common balance) கொண்டு ஒப்பிட்டறியலாம். சாதாரண தராசில் நிறுக்கும்போது, இருபொருள்களின் எடைகளை மட்டுமே ஒப்பிட்ட போதிலும், அவைகள் ஒரே இடத்தில் இருப்பதால், g-யின் மதிப்பு இரண்டிற்கும் ஒன்ருக (same) இருக்கிறது. ஆகவே அவற்றின் நிறைகள் சாதாரண தராசில் ஒப்பிடப்பட்டதாகக் கருதப்படும். மேலும் சாதாரணத்தராசில் நிறுத்தால், ஒரு பொருளின் நிறை, பரந்த உலகில் எவ்விடத்திலும் ஒன்ருகவே (same) இருக்கும்.

4·3 நியூட்டனின் இயக்கவிதிகள்

4·3-1. முதல் விதி (மெய்ம்மை 1)

ஒவ்வொரு பொருளும் யாதேனுமொரு புறவிசையால் தாக்கப்பட்டு முடுக்கப்பட்டாலன்றி தனது ஓய்வு நிலையிலேயோ அல்லது ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ள சீரான இயக்க நிலையிலேயோ தொடர்ந்திருக்கும்.

முதல் விதியின் விளக்கம் :—

எந்தப் பொருளும் அது வைக்கப்பட்ட இடத்திலேயே ஓய்வு நிலையிலிருக்கும். ஏதாவது ஒரு விசை அதன்மேல் செயல்படு

மாகில், அது நகரும். எனவே, பொருளின் ஓய்வு நிலையை மாற்றுவது அதன்மேல் செயல்படும் விசையேயாகும்.

முதல்விதியின்படி, எப்பொருளும் தன் நிலையைத் தானுகவே மாற்றிக்கொள்ள முடியாதென்பது அறியத்தக்கதாகும். இவ்விதப் பண்பானது பொருளின் ''நிலைமம்'' அல்லது ''சடத்துவம்'' (inertia) எனப்படும்.

பொருளுக்குப் புறம்பாக ஏதேனுமொரு விசை செயல்பட்டால் தான், அதன் நிலை மாறும். எனவே ஒரு பொருளின் நிலைமாற்றத்திற்குக் காரணமாக இருப்பதே விசை என்று வரையறுக்கப்படும். அதாவது, விசையென்பது ஒரு பொருளில் செயல்பட்டு அதன் ஓய்வு நிலை அல்லது அதன் சீரான வேக நிலையை மாற்ற முயலும் ஒன்ருகும்.

முதலாம் விதி, காலத்தை அளக்கவும் உதவுகிறது. ஒரு பொருளின் சீரான இயக்கநிலையை வரையறுக்கக் காலமும், கடந்த தொலைவும் அளவிடப்படவேண்டும். ஒரு பொருளுக்கு, இவ்விதியின் உண்மையை மேற்கொண்டு, அது கடந்த தொலைவிலிருந்து காலத்தை அளக்கலாம். எந்தப் புறவிசையாலும் பாதிக்கப்படாத மற்ருெரு பொருளை எடுப்போமெனில், அது கடக்கும் தொலைவுகளும், முந்திய பொருள் உடநிகழ்ச்சியாகக் கடக்கும் தொலைவுகள் சமமாக இருக்கும்பொழுது, சமமாகவே இருக்கும். ஆதலால், இரு பொருள்களும் சமகால இடைவெளிகளில், சமதொலைவுகளைக் கடக்கின்றன. எனவே கால இடைவெளிகள் தொலைவுகளுக்கு நேர்விகிதத்திலிருக்கும்.

நடைமுறையில், புவியானது தன் அச்சைப்பற்றிச் சீராகச் சுழலுவதால் அது தன் அச்சைப்பற்றி ஒரு முறை சுழல எடுத்துக் கொள்ளும் காலம், காலத்தின் அலகாக எடுத்துக்கொள்ளப்படுகின்றது. அது ஒரு நாள் எனப்படும். அந்நாளின் 86400-இன் ஒரு பகுதியே, விஞடி அலகாகும். புவியின் சுழற்சியை மேற்கொண்டுதான், கடிகாரங்களும் அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

முதல் விதியானது ஒரு நிலையான குறிப்பிட்டச்சு அமைப்பைச் சார்ந்துள்ள இயக்கங்களுக்குத்தான் பொருந்தும். பொதுவாக, பொறியியல் சார்ந்த கணக்குகளில், புவியை நிலையானதாகக்கருதி, அதன் மேல் ஏதேனும் ஒரு நிலையான குறிப்பிட்டச்சு அமைப்பை எடுத்து துகளின் இயக்கம் விவரிக்கப்படும்.

4·3-2. இரண்டாவது விதி : (மெய்ம்மை 2)

ஒரு துகளின் முடுக்கமானது அதன்மேல் செயல்படும் விசைக்கு நேர்விகிதத்திலும், அவ்விசையின் திசையிலேயும் இருக்கும்.

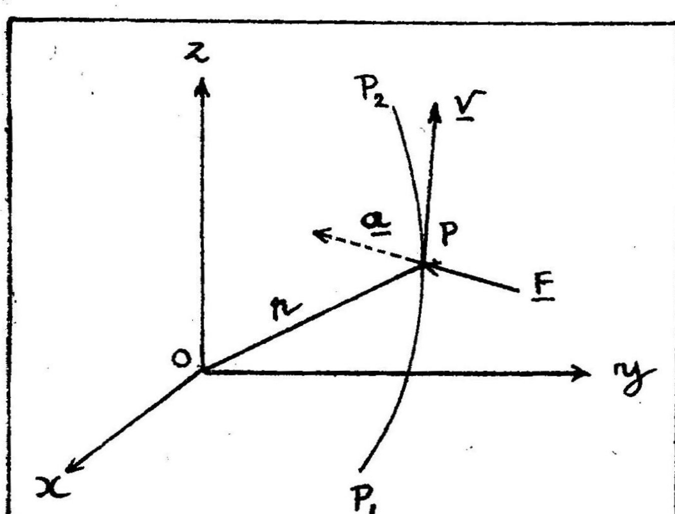
இரண்டாவது விதியின் விளக்கம் :

ஒரு துகளின் மேல் $\underline{F}$ என்னும் விசை செயல்படுவதானால், அதன் விளைவால் ஏற்படும் முடுக்கம், (x, y, z) என்னும் குறிப்பிட்டச்சு அமைப்பில் $\underline{a}$ எனக்கொண்டால், இரண்டாவது விதியானது

$$\underline{F} = m\,\underline{a}$$ என்றாகும்.

இங்குள்ள "m" என்பது ஒரு எண்ணி மாறிலியாகும். (scalar constant). இதுவே இயக்கவிசையியலின் அடிப்படைச் சமன்பாடாகும். (Basic equation in Dynamics)

இங்கு $\underline{a}$ என்பது துகளில் உண்டாகும் தனி முடுக்கமாகும். (Absolute acceleration)



படம் 4·1

$\underline{a}$, $\underline{F}$ என்னும் முடுக்கமும், விசையும் ஒரே நேர்க்கோட்டிலமைந்த போதிலும், துகள் ஏற்கனவே $\underline{V}$ என்னும் திசைவேகத்துடன் $\underline{F}$-ன் திசைக்கு வேறான திசையில் இயங்குமேயானால்,

அதன் பாதை ஒரு நேர்க்கோட்டிலமையாமல். $P_1 P P_2$ என்னும் வளைவுப்பாதையில் படம் (4·1)-ல் காட்டியுள்ளவாறு இயங்கும்.

மேலும் $\underline{a}$, $\underline{F}$ என்பவை ஒரே திசையில் செயல்படுவதால் $\underline{F} = m\,\underline{a}$ என்னும் சமன்பாட்டை

$$F = ma \text{ அல்லது } m = \frac{F}{a} \text{ என்றும் எழுதலாம்.}$$

m என்பது விசையின் எண்மதிப்புக்கும். விளைவு முடுக்கத்தின் எண்மதிப்புக்குமுள்ள விகிதத்தை அறிவிக்கும் ஒரு மாறிலியாகிறது. இதுவேதான், துகளின் நிறை (mass) எனக்கொள்ளப்படும். இது துகளின் சடத்துவத்தை அளவிடுவதாகக் கருதப்படும். கொடுக்கப்பட்ட துகளுக்கு, இது எவ்விடத்திலும் மாறாத எண்ணியாகும்.

m_1, m_2 என்னும் நிறைகளைப்பெற்ற P_1, P_2 என்னும் இரு துகள்களின்மேல், $\underline{F}$ என்னும் விசை தாக்கட்டும். அப்போது அத்துகள்களின் முடுக்கங்களின் எண்மதிப்புகள்

$$a_1 = \frac{F}{m_1}, \quad a_2 = \frac{F}{m_2}$$

ஆகும்.

$$m_1 > m_2 \text{ எனின், } a_1 < a_2 \text{ என்றாகும்.}$$

அதாவது, அதிக நிறையைப்பெற்ற துகள் அதிகச் சடத்துவத்தை பெற்றுள்ளதாகவும். அதன் காரணமாக, அத்துகள்களில் நிகழும் முடுக்கம், மற்ற துகள்களில் நிகழும் முடுக்கத்தைக் காட்டிலும் குறைவுபட்டிருக்குமென்றாகிறது.

இரண்டாவது விதி, விசையை அளவிடுவதற்கும் உதவுகிறது.

விசைக்கு எண்மதிப்பும், திசையும் உண்டு. எனவே அது ஒரு திசையியாகும். விசையை, ஓர் அம்பு நேர்க்கோட்டால் குறிக்கலாம். ஒரு விசையை முற்றிலும் வரையறுக்க, அதன் (1) எண் மதிப்பு (2) செயல்படும் திசை (3) செயல்படும் புள்ளி ஆகியவை தேவைப்படும்.

4·3-3. விசையின் அலகுகள்.

சார்பிலா அலகுகள் (absolute units)

டைன் (dyne)

ஒரு கிராம் நிறை கொண்ட பொருளில் ஒரு வினாடியிலே, வினாடிக்கு ஒரு செ.மீ. முடுக்கத்தை உண்டுபண்ணக்கூடியது ஓர்

அலகுவிசையாகும். இது மெட்ரிக் ($C.G.S$) முறையில் ஒரு டைன் எனப்படும்.

எனவே ஒரு கிராம் நிறையுள்ள ஒரு பொருள்மீது ஒரு டைன் அளவுள்ள விசை செயல்பட்டால், பொருளில் 1 செ.மீ/வி^{2} அளவுள்ள முடுக்கத்தை உண்டாக்கும்.

நியூட்டன் (Newton)

ஒரு கிலோகிராம் நிறையுள்ள பொருளில், ஒரு வினாடியிலே, வினாடிக்கு ஒரு முடுக்கத்தை உண்டாக்கக்கூடியது ஒரு நியூட்டன் எனப்படும்.

மெட்ரிக் "$M.\ K.\ S.$" முறையில் நியூட்டன் என்பதே ஓரலகு விசையாகும்.

$$1 \text{ நியூட்டன்} = 1 \text{ கி.கி.மீ/வி}^2 \text{ ஆகும்.}$$

பவுண்டல் (Poundal)

பிரிட்டன் முறையில், ஒரு பௌண்டு நிறையுள்ள பொருளில், ஒரு வினாடியிலே, வினாடிக்கு ஓர் அடி முடுக்கத்தை உண்டு பண்ண வல்லது ஓர் அலகு விசையாகும். இது பிரிட்டன் "$F.\ P.\ S.$" முறையில், பவுண்டல் எனப்படும்.

$$\therefore \quad 1 \text{ பவுண்டல்} = 1 \text{ பவு.அடி/வி}^2 \text{ ஆகும்.}$$

இவையனைத்தும் தனி அலகுகள் அல்லது அடிப்படை அலகுகள் அல்லது சார்பிலா அலகுகளாகும்.

4·4. நியூட்டனின் மூன்றாவது விதி (மெய்ம்மை 3)

ஒவ்வொரு விசைத்தாக்கிற்கும், சமனுமெதிருமான மற்றொரு விசைத்தாக்கும் உண்டு.

நிலையியல் கணக்குகளில் இவ்விதியானது திரும்பத்திரும்பப் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இயங்கும் பொருளுக்கும் இவ்விதி பொருந்தும்.

(i) ஒரு மனிதன் ஒரு பாரவண்டி ஒன்றைத்தள்ளி a என்னும் முடுக்கமுள்ள ஓர் இயக்கத்தைப் படம் [4·2 (a)]-ல் காட்டியவாறு ஏற்படுத்துவதாகக் கொள்ளவும். நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, m என்பது பாரவண்டியின் நிறை எனில், மனிதன் வண்டியின்மேல் பயன்படுத்தும் விசையானது,

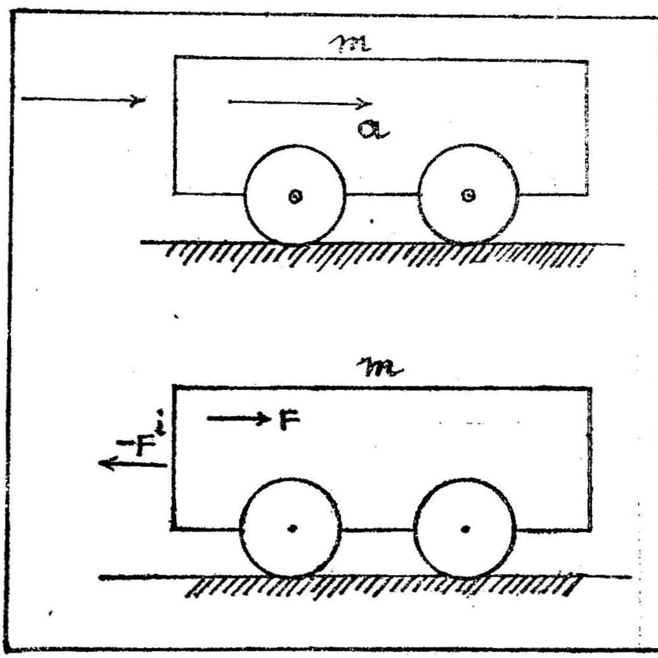
$$\underline{F} = m\,\underline{a} \quad \text{ஆகும்.}$$

இதுவே மனிதன் வண்டியின்மீது செயல்படுத்திய தாக்கவிசையாகும்.

நியூட்டனின் மூன்ருவது விதிப்படி, பாரவண்டியும். மனிதன் மேல் $\underline{F}^{i}$ என்னும் ஓர் எதிர்த்தாக்கத்தை [படம் 4·2 (b)-ஐப் பார்க்க],

$\underline{F}^{i} = -\underline{F} = -m\,\underline{a}$ என்றுள்ளவாறு விளைவிக்கிறது.

$\underline{F}^{i} = -m\,\underline{a}$ என்பது சடத்துவ விசை (Inertia force) எனப் படும். வண்டி, இயக்கத்திற்குக் கொடுக்கும் தடையால், அவ்வித விசையை மனிதன் உண்மையாகவே உணருகிருன். $\underline{F}^{i}$ என்னும் சடத்துவ விசையானது எதிர்த்தாக்கவிசை (reaction) என்று இங்கு கொள்ளப்படும்.



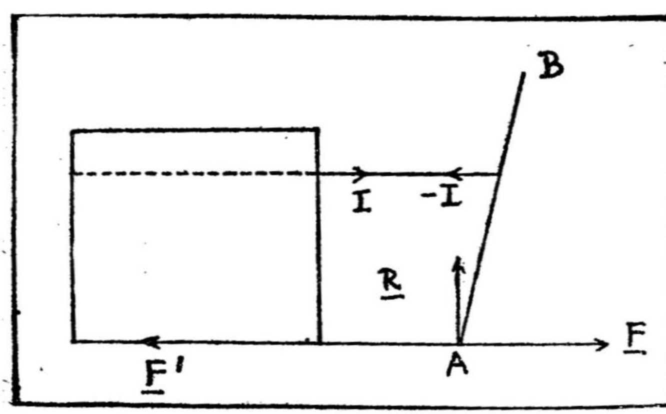
படம் 4·2 (a), (b)

மேலும் $\underline{F}^{i} = -\underline{F}$ என்னும் சமன்பாட்டில், $\underline{F}$ என்னும் தாக்கவிசை, $\underline{F}^{i}$ என்னும் எதிர்த்தாக்கவிசை ஆகியவை எப்போதும் வெவ்வேருன பொருள்களில் (இங்கு பாரவண்டி, மனிதன்) செயல்படுகின்றன என்பது கவனிக்கத்தக்கது.

மூன்றும் விதியால், A என்னும் ஒரு பொருளின் சக்தி B என்னும் மற்றொரு பொருளின் மீது செயல்படும்போது, Bயின் சக்தி Aயின் மீது செயல்படும், எனத் தெரிகிறது. இவ்விரு தாக்கங்களும் ஒரே செயலின் இருதோற்றங்களாகும். (அம்சங்களாகும்)

(ii) ஒரு பொருளின் இயக்கத்தை அறிய, மற்ற பொருள்களிலிருந்து அதைத் தனிப்படுத்தி, அதன்மேல் மற்றபொருள்கள் செயல்படுத்தும் புறவிசைகளைக் குறித்து, அவற்றுக்கு ஏற்றதான தடையற்ற பொருள் விளக்கப்படம் (Free body diagram) ஒன்றை வரையவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு மனிதன் பாரமான பொருளொன்றைத் தரையின்மீது கயிறு கொண்டு இழுப்பதாகக் கொள்க. அக்கயிறு அப்பொருளை முற்பக்கமாக இழுக்கும் விசைக்குச் சமமாக ஒரு விசையோடு, அது அம்மனிதனைப் பிற்பக்கமாக இழுக்கிறது. அப்படியுள்ளபோது, பொருள் எவ்வாறு இயங்குகிறது என்பதைப் பின் வருமாறு படம் வரைந்து விளக்கலாம். (4·3)-வது படத்தில் AB என்பது அம்மனிதனது உடலின் மத்தியகோட்டைக் குறிக்கட்டும். மனிதன் வண்டியைக் கயிற்றின் மூலம் இழுக்க முயலும்

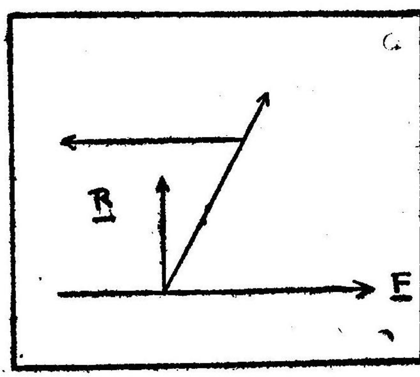


படம் 1·3

போது, அவன் தரையைத் தன் பாதங்களால் பின்னோக்கித் தள்ளுகிறான். எனவே, தரை அதற்கு எதிர்விசையான F என்னும் உராய்வு (Friction) ஒன்றை அவன்மீது முன்னோக்கிச் செயல்படுத்துகிறது. அவன் பாதங்கள் புவியைத் தாக்கும் விசைக்குச்

சமனுமெதிருமான, R என்னும் எதிர்த்தாக்கம், மனிதன்மேல் செயல்படுகிறது. T என்பது கயிற்றின் முனைகளில் எதிர்த் திசைகளிலே செயல்படுகின்ற அக்கயிற்றின் இழுவிசை (Tension) ஆகும். F' என்பது தரைக்கும் அப்பொருளுக்கும் இடையே யுள்ள கிடை (horizontal) விசையாகும்.

முதலில் கிடைத்திசையில் மனிதனின் இயக்கத்தை நோக்குக. மனிதனைத் தனிப்படுத்தி அவன்மேல் செயல்படும் புறவிசைகளைக்குறித்து, அவற்றுக்கு ஏற்றதான தடையற்றபொருள் விளக்கப்படம் ஒன்றைப் படம் 4·4-ல் காட்டியவாறு வரைக.



படம் 4·4

கிடைத்திசையிலியக்கத்தைக் காணும்போது, விசைகளின் தற்சார்புக் கொள்கையின்படி, R என்னும் செங்குத்து விசை புறக்கணிக்கப்பட்டு, மனிதன் கிடையாக இயங்க,

$F > T$ என்றிருக்கவேண்டும்.

அதுபோலவே, பொருள் கிடையாக இயங்குவதற்கு

$T > F'$ ஆக இருக்கத்தக்கது.

எனவே, மனிதன், பொருள் ஆகியவற்றின் இயக்கத் தொடக்கத்தில், $F > T > F'$ என்றிருக்க வேண்டும்.

மேலும், மனிதனும் பொருளும் ஒரே வேகத்துடன் இயங்கினால், இம்மூன்று விசைகளும் சமமாகும்

(iii) ஒரு பொருள் மேசையின்மேல் உள்ளபோது, அதன் எடைக்குச் சமனும் எதிருமான விசையை மேசையானது பொருளில் எதிர்த்தாக்க விசையாகச் செயல்படுத்துகிறது.

(iv) ஒரு பொருளின் எடை புவியீர்ப்பு விசையால் ஏற்படுகிறது. எனவே அப்பொருள் தனது எடைக்குச் சமமாயும் எதிராயுமுள்ள ஒரு விசையோடு புவியை ஈர்க்கிறது என்பதும் இவ்விதியால் கிடைக்கிறது.

4·5. ஈர்ப்பலகுகள் (Gravitational units)

ஒவ்வொருபொருளும் வெற்றிடத்தில் விழும்படி விடப்பட்டால் அது புவியீர்ப்பு விசையால் g என்னும் முடுக்கத்துடன் புவியை நோக்கி கீழிறங்குவதைப் பரிசோதனை வாயிலாக அறியலாம்.

ஓர் அலகு நிறையுள்ள பொருளில், புவியீர்ப்பு விசை g அலகுகள் உள்ள முடுக்கத்தை ஏற்படுத்துவதால்,
ஓர் ஈர்ப்பு அலகுவிசை = g தனி அலகு விசைக்குச் சமமாகும்.

g-யின் மதிப்பு இடத்திற்கிடம் மாறுபடுவதால், ஈர்ப்பு அலகுகளும் இடத்திற்கிடம் மாறுபடுகின்றன.

கிராம் எடை (gram weight)

மெட்ரிக் C.G.S. முறையில், 1 கிராம் நிறையை, புவி ஈர்க்கும் விசையே ஒரு கிராம் எடை எனப்படும்.

1 கிராம் நிறையுள்ள பொருளில் ஒரு டைன் விசை செயல்பட்டால், அப்பொருளில் 1 அலகு (செ மீ/வி^{2}) முடுக்கம் ஏற்படும். ஆனால், புவியீர்ப்பின் காரணமாக, ஒரு கிராம் நிறையுள்ள பொருளில் g அலகுகள் உள்ள முடுக்கம் ஏற்படுவதால், ஒரு புவியீர்ப்பு விசை அலகு g டைன்களுக்குச் சமமாகும்.

எனவே

1 கிராம் எடை = g டைன்கள்.

= 981 டைன்கள்

அவ்வாறே,

மெட்ரிக் "*M. K. S.*" முறையில்

1 கிலோகிராம் எடை = g நியூட்டன்கள்

= 9·81 நியூட்டன்கள்

பிரிட்டன் "*F. P. S.*" முறையில்

1 பவுண்டு எடை = g பவுண்டல்கள்

= 32·2 பவுண்டல்கள்.

4·6. விசைகளின் தற்சார்புத்தத்துவம். (Physical independence of forces)

இரண்டாவது விதியும், விசைகளின் தற்சார்புத்தத்துவத்தை வெளிப்படுத்துகிறது.

ஒரு விசையால் ஏற்படும் முடுக்கம் அவ்விசை செயல்படும் திசையிலேயே உள்ளது என்ற காரணத்தால், ஒரு பொருளில் அதே நேரத்தில், அநேக விசைகள் செயல்படுமேயானால் ஒவ்வொன்றும் அதன் திசையிலேயே ஏற்படுத்தும் முடுக்கமானது, மற்ற விசைகளைச் சார்ந்திருப்பதில்லை. ஆதலால் ஓய்விலோ அல்லது இயக்கத்திலோ உள்ள ஒரு துகளை ஒரு விசைத்தொகுதி தாக்கினால், அவற்றின் தொகுபயன் (resultant) விளைவானது, அத்துகள் ஓய்விலிருப்பதாகக்கொண்டு, அதன்மேல் ஒவ்வொரு விசையும், ஏனையவையின்றி விளைவைத்தருவதாகக் கொண்டு, அவ்விதத் தனித்தனி விளைவுகளின் தொகுப்பால் வரையறுக்கப் படும்.

விசைகளின் தற்சார்புத்தத்துவத்தைப் பின்வரும் எடுத்துக் காட்டால் விளக்கலாம்.

விரைந்து செல்லும் புகைவண்டியிலுள்ள ஒருவர் வண்டியி னுள்ளேயே ஒரு நாணயத்தை விழும்படிச் செய்தால், அது புகை வண்டி ஓய்விலிருந்தால் அதன் தளத்தில் எவ்விடத்தில் விழுமோ, அவ்விடத்திலேயே விழுவதைக் காணலாம். எனவே, இது, நாணயம் புகைவண்டி சென்ற வேகத்தோடு முன்நோக்கிச் சென் றிருக்க வேண்டும் என்பதைக் காட்டுகின்றது. மேலும் நாண யத்தின் மீது செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை அதன் திசையில் மட்டுமே இயக்கத்தை மாற்றுகின்றதெனவும், அது நாணயத்தின் கிடைத்திசையிலமையும் வேகத்தில் பங்குகொள்ளவில்லை என்றும் அறிய முடிகிறது.

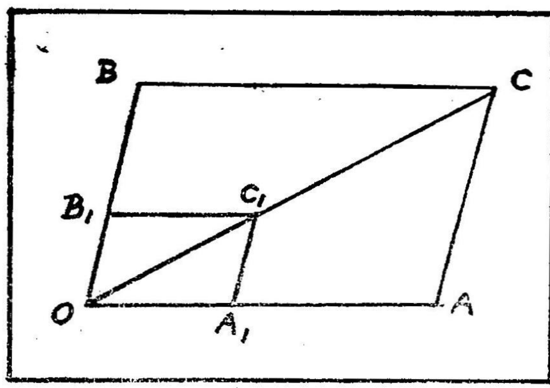
இக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, விசைகளின் இணைகர விதியைப் பெறலாம்.

4·6-1. விசைகளின் இணைகரவிதி (மெய்ம்மை 4) (Parallelogram law of forces)

ஒரு துகளானது இரு விசைகளால் தாக்கப்பட்டு அவற்றை ஏதேனும் ஒரு புள்ளி வழியாக திசையிலும், எண்மதிப்பிலும் வரை யறுக்கத்தக்க ஓர் இணைகரத்தின் அண்டைப் பக்கங்களாகக் குறிக்கப்படுமேயாகில் அவற்றின் தொகுபயன் (விளைவு) விசை

அப்புள்ளி வழியே செல்லும் அவ்விணைகரத்தின் மூலைவிட்டத்தால் எண்மதிப்பிலும், திசையிலும் குறிக்கப்படும் ஒரு விசைக்குச் சமம்.

m நிறையுள்ள ஒரு துகளின்மேல் செயல்படும் F_1, F_2 என்னும் விசைகளை, படம் (4·5)-ல் காட்டியவாறு OA, OB என்னும் திசையிகள், எண்மதிப்பிலும், திசையிலும் அறிவிக்கட்டும்.



படம் 4·5

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, இவ்விசைகள் ஒவ்வொன்றும், அதனதன் திசையிலேயே தனித்தனி முடுக்கங்களைத் தோற்றுவிக்கும். இம் முடுக்கங்களை a_1, a_2 எனக் கொள்க. அப்போது $F_1 = ma_1$, $F_2 = ma_2$ ஆகும். படத்தில் OA_1, OB_1 என்பவை a_1, a_2 களைக் குறிக்கட்டும். $OACB$, $OA_1C_1B_1$ என்னும் இணைகரங்களைப் பூர்த்தி செய்க.

F_1, F_2 என்னும் விசைகளின் தொகுபயன் விசை, மூலைவிட்டம் OC ஆல் குறிக்கப்படும். அவ்வாறே, a_1, a_2 களின் விளைவு முடுக்கம், மூலைவிட்டம் OC_1 ஆல் குறிக்கப்படும்.

$$\frac{OA}{OB} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{m\,a_1}{m\,a_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{OA_1}{OB_1}$$

$$\therefore \frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் AC ஆனது A_1C_1-க்கு இணையாகும். எனவே, $\underline{OAC}$ OA_1C_1 என்னும் முக்கோணங்கள் வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ஆகின்றன.

$$\therefore \quad A_1 \hat{O} C_1 = A \hat{O} C$$

ஆதலால், O, C_1, C என்னும் புள்ளிகள் ஒரு நேர்க்கோட்டிலமைகின்றன.

$$\text{மேலும்,} \frac{OC}{OC_1} = \frac{OA}{OA_1} = \frac{F_1}{a_1} = \frac{ma_1}{a_1} = m$$

$$\therefore \quad OC = m \cdot OC_1$$

இதிலிருந்து, $\underline{OC}$ என்பது $\underline{OC_1}$-ஆல் குறிக்கப்படும் விளைவு முடுக்கத்தைத் தோற்றுவிக்கும் விசைக்குச் சமம் என்றும், அதனால் அது $\underline{OA}$, $\underline{OB}$ என்பவைகளால் வரையறுக்கப்படும் விசைகளின் விளைவு விசை ஆகுமென்றும் பெறப்படும்.

எனவே, விசை இணைகரத்தின் விதி உண்மையாகிறது.

$\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ ...... $\underline{F_k}$ ...... $\underline{F_n}$ என்னும் விசைகள் ஒரு துகளில் செயல்படுமானால், அத்துகளின்மேல் ஏற்படும் விளைவு முடுக்கமானது ஒவ்வொரு விசையின் காரணமாக ஏற்படும் தனி முடுக்கங்களின் திசையிக் கூடுதலுக்குச் சமமாகும்.

படம் [4·5 (a)]-ல் காட்டியவாறு m என்னும் நிறையைப் பெற்ற P என்னும் துகள் ஒன்றின்மேல், $\underline{Fi}$, $i = 1, 2, \ldots n$ என்னும் விசைகள் செயல்படட்டும்.

$\underline{ak}$ என்பது, $\underline{Fk}$ என்னும் விசையால், ஏனைய விசைகளின்றி ஏற்படும் தனிமுடுக்கத்தைக் குறிக்கட்டும். அப்போது,

$$\underline{ak} = \frac{\underline{Fk}}{m}, \; k = 1, 2, \ldots n \text{ ஆகும்.}$$

இணைகரவிதிப்படி, துகளில் ஏற்படுப் விளைவு முடுக்கம், $\underline{a}$ என்பது,

$$\underline{a} = \underline{a_1} + \underline{a_2} + \ldots \underline{a_k} \ldots + \underline{a_n}$$

$$= \frac{1}{m}(\underline{F_1} + \underline{F_2} + \ldots \underline{F_k} + \ldots \underline{F_n})$$

$$= \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n} \underline{F_k}\right)$$

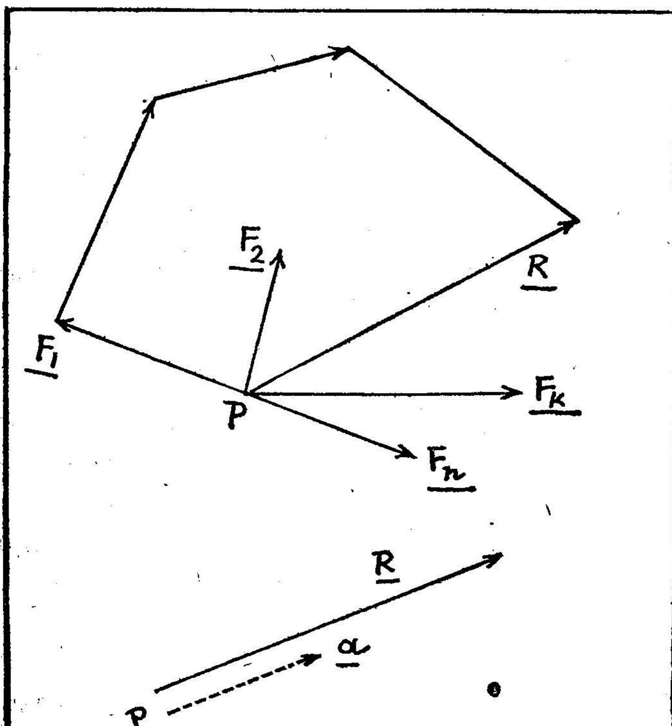
$\underline{F_k}$ என்பவை ஒரு புள்ளியில் இயங்குவதால், அவற்றின் தொகுபயன் விசை $\underline{R}$ என்பது

$$\underline{R} = \sum_{k=1}^{n} \underline{F_k} \quad \text{ஆகும்.}$$

அப்பொழுது,

$$\underline{a} = \frac{1}{m} \underline{R}$$

அல்லது, $\underline{R} = m\,\underline{a}$ ஆகும்.



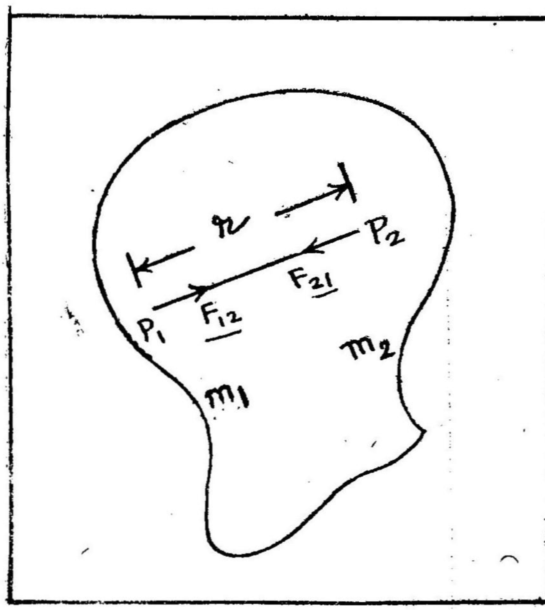
படம் 4.5 (a), (b).

எனவே, படம் [4·5 (b)]-ல் காட்டியுள்ளவாறு ஒரு துகளில் செயல்படும் விசைத் தொகுதி ஒன்றால் ஏற்படும் (துகளின்) இயக்கத்தை, அதன தொகுபயன் விசை, துகளில் செயல்பட்டு, ஏற்படுத்தும் இயக்கம் ஈடுசெய்கிறது.

அதாவது, துகள் ஒன்றால் செயல்படும் விசைத் தொகுதியால், துகளுக்கு ஏற்படும் இயக்கத்தை, அத்தொகுதிக்குரிய தொகுபயன் விசையால் பெறலாம்.

4·7. நியூட்டனின் ஈர்ப்பு விதி (மெய்ம்மை 5)

பரந்த உலகிலுள்ள ஒவ்வொரு பொருளும் மற்ற பொருள் களைக் கவருகிறது. இவ்வித ஈர்ப்புவிசை பொருள்களின் நிறைப் பெருக்கத்திற்கு நேர் விகிதத்திலும், அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொலைவின் இருபடிக்கு எதிர் விகிதத்திலும் இருக்கிறது.



படம் 4·6

m_1, m_2 என்பவை இரு பொருள்களின் நிறையையும், r என்பது அவைகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவையும், F என்பது, ஒன்று மற்றொன்றை ஈர்க்கும் விசையின் எண் மதிப்பையும் குறித்தால், நியூட்டனின் ஈர்ப்பு விதியானது,

$$F_{12} = F_{21} = F = \frac{G\, m_1\, m_2}{r^2}$$

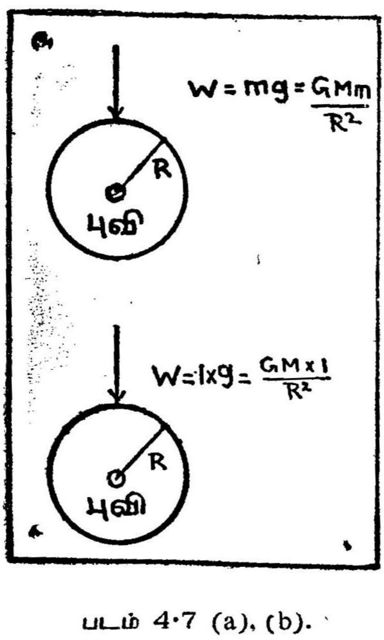
என்ற சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும். இங்கு G என்பது ஈர்ப்பு மாறிலி (Gravitational Constant) எனப்படும்.

மேலும் மூன்றாவது மெய்ம்மையின்படி $F_{12} = F_{21}$ ஆகும்.

புவியையும் தன் பரப்பின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு பொருளையும் தன் மையத்தை நோக்கி இழுக்கிறது. எனவே m என்பது புவியின் மேலுள்ள பொருள் ஒன்றின் நிறையையும், M என்பது புவியின் மையப்புள்ளியில் இருப்பதாகக்கொண்ட அதன் நிறையையும். R என்பது புவியின் ஆரையையும் குறித்தால், மேற்கூறிய ஈர்ப்பு விதி,

$$F = \frac{G.\ M.\ m.}{R^2}$$

இதுவே m நிறையுள்ள பொருளைப் புவியானது ஈர்க்கும் விசையாகும்.



படம் 4·7 (a), (b).

புவியின் மேற்பரப்பிலுள்ள ஒரு கிராம் நிறையுள்ள பொருளைப் புவியீர்க்கும்விசை $= \frac{GM}{R^2}$ ஆகும். இது 'g' எனக் குறிக்கப்படும்.

எனவே, $g = \frac{G\ M}{R^2}$.

[குறிப்பு : (1) இங்கு புவியை R ஆரையுள்ள கோளமாகக் கருதியிருப்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

(2) புவியின் நிறையான $M = 6 \cdot 1 \times 10^{23}$ கி.கி. வி²/மீ., அதன் ஆரை $R = 6378$ கி.மீ. என்றும், G-யின் மதிப்பு $= 6 \cdot 54 \times 10^{-10}$ மீ⁴/கி.கி.வி⁴, எனவும் எடுக்கும்போது, g-யின் மதிப்பு $9 \cdot 81$ மீ/வி² ஆகும்.

(3) g-யின் மதிப்பு புவியின் ஆரைத் திசையி-இன் நீளத்தின் மாறுபாடு. அதன் அடர்த்தி ஆகிய வற்றுல் இடத்திற்கிடம் மாறுபடும். பொதுவாக பொறி இயல் கணக்குகளில் g-யின் மதிப்பு $= 9 \cdot 81$ மீ/வி².

(4) ஈர்ப்பு மாறிலி G-யின் மதிப்பு மிகவும் குறைவுள்ள தால், புவிப்பரப்பின் மேலுள்ள இரு பொருள்களுக்கு இடையே உள்ள கவர்ச்சி விசை, அப்பொருள் களின் எடைகளைக் காட்டிலும் மிகக்குறைவு. ஆகலால் அவ்வித விசையானது, பொறியியல் கணக்குகளில் தவிர்க்கப்படும்.

4·8 மாதிரிக் கணக்குகள்

4·8-1. எப்பெரிய விசையானது 19·62 கிலோ கிராம் நிறையுள்ள பொருள் ஒன்றில் 1 மீட்டர் / (விநாடி)² முடுக்கத்தை விளைவிக்கும் ?

m = நிறை = 19·62 கி.கி.

a = முடுக்கம் = 1 மீ / (விநாடி)²

விசை = நிறை × முடுக்கம்.

$= 19 \cdot 62 \times 1 \left(\text{கி. கி.} \times \frac{\text{மீ}}{\text{வி}^2}\right)$

$= 19 \cdot 62$ (கி. கி. மீ/வி²)

$= 19 \cdot 62$ நியூட்டன்கள்.

ஒருபொருளில் 1 நியூட்டன் அளவுள்ள விசை ஒன்று தாக்கப்பட்டு 3 மீட்டர்/விநாடி² முடுக்கத்தை ஏற்படுத்தினுல். அதன் நிறையைக் காண்க.

$F =$ விசை $=$ நியூட்டன் $= 1$ கி.கி மீ / (விநாடி)^2

$a =$ முடுக்கம் $= 3$ மீ / (விநாடி)^2

$\therefore$ நிறை $= \dfrac{\text{விசை}}{\text{முடுக்கம்}}$

$= \dfrac{1 \text{ கி. கி. மீ} / (\text{விநாடி})^2}{3 \text{ மீ} / (\text{விநாடி})^2} = \dfrac{1}{3}$ கி. கி

4·8-2. 150 நியூட்டன்களுள்ள விசை ஒன்று, 30 கி. கி. நிறையுள்ள பொருளைத் தாக்கும்போது ஏற்படும் முடுக்கம் யாது?

விசை $= 150$ நியூட்டன்கள்

$= 150$ [கி. கி. மீ / (விநாடி)^2]

நிறை $= 30$ கி. கி.

முடுக்கம் $= \dfrac{\text{விசை}}{\text{நிறை}}$

$= \dfrac{150 [\text{கி. கி. மீ} / (\text{விநாடி})^2]}{30 \text{ கி. கி}}$

$= 5$ மீ / (விநாடி)^2

4·8-3. 1 பவுண்டல் விசையை, நியூட்டனில் தந்திடுக.

1 பவுண்டல் $= 1$ பவுண்டு $\times 1$ அடி/(விநாடி)^2

$= (454$ கிராம்$)(12 \times 2 \cdot 54$ செ.மீ$)/($விநாடி$)^2$

$= 454 \times 12 \times 2 \cdot 54$ (கிராம் செ.மீ/ விநாடி)^2)

$= 454 \times 12 \times 2 \cdot 54$ டைன்கள்.

$= 13837 \cdot 92$ டைன்கள்.

$= 13837 \cdot 92 \times 10^{-5}$ நியூட்டன்கள்.

$= 0 \cdot 138792$ நியூட்டன்கள்.

4·8-4. ஒரு பவுண்டு நிறையுள்ள பொருளின் எடையை டைன்களில் தருக.

பொருளின் எடை $= 1 \times 32 \cdot 2$ பவுண்டல்கள்.

$= 32 \cdot 2$ [1 பவு $\times$ அடி/(விநாடி)^2]

$= 32 \cdot 2 \times (454 \times 12 \times 2 \cdot 54)$

[கிராம் $\times$ செ.மீ (விநாடி)^2]

$= 445581 \cdot 024$ டைன்கள்.

4·9 பயிற்சி

4·9-1. எவ்விசையானது 3·27 கிலோகிராம் நிறையுள்ள பொருள் ஒன்றில் 1 மீ/(வினாடி)^2 — என்னும் முடுக்கத்தை ஏற்படுத்தும்? [விடை : 3·27 நியூட்டன்கள்]

4·9-2. 5 நியூட்டன்களுள்ள விசை ஒன்று, ஒரு பொருளில் செயல்பட்டு, 2 மீ/(வினாடி)^2 என்னும் முடுக்கத்தை விளைவித்தால் அப்பொருளின் நிறை யாது? [விடை : 2·5 கி.கி.]

4·9-3. 1 கிலோகிராம் எடையுள்ள விசையானது 1 கிலோ கிராம் நிறையுள்ள பொருளில் செயல்பட்டு ஏற்படுத்தும் முடுக்கம் யாது? [விடை : 9·81 மீ/(வினாடி)^2]

4·9-4. (i) ஒரு நியூட்டன் விசையை டைன்களில் தருக. [விடை : 10^5 டைன்கள்]

(ii) 1 கி.கி. நிறையைப் பவுண்டு நிறையில் தருக. [விடை : 2·204 பவுண்டு]

(iii) 1 நியூட்டன் விசையை பவுண்டு விசையில் காண்க. [விடை : 1 நியூட்டன் = 0·2248 பவுண்டு எடை]

(iv) [1 கி.கி. / (மீட்டர்)^3] அளவுள்ள அடர்த்தியை (density) *M.K.S.* முறையின் ஈர்ப்பு அலகுகளில் தருக.

[விடை : 0·1018 கி.கி எடை (மீட்டர்)$^{-4}$ (வினாடி)^2]

4·10. துகளின் இயக்க விசையியல் (Dynamics of a particle)

4·10-1. இயக்கப்பாதைக்கு ஏற்ப துகளில் செயல்படும் விசைகளைக் காணுதல்.

ஒரு துகளின் இயங்குவரையானது, t என்னும் நேரத்தில், அதன் நிலையைக் குறிக்கும்.

$$r(t) = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j} + z(t)\,\underline{k}$$

என்னும் நிலைத்திசையியால் வரையறுக்கப்படும். துகளின் நிறையை m எனக் கொண்டால், அதன்மேல் செயல்படும் விசைகளை துகளின் இயக்கத்தில் ஏற்படும் முடுக்கத்தின் வாயிலாகப் பெறலாம்.

துகளின் முடுக்கம் $\underline{a}$ எனின்,

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}\underline{i} + \frac{d^2 y}{dt^2}\underline{j} + \frac{d^2 z}{dt^2}\underline{k} \text{ ஆகும்.}$$

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, துகளில் செயல்படும் விளைவு விசையை,

$$\underline{F} = m\,a$$

$$= m\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\underline{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\underline{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\underline{k}\right\}$$

என்னும் சமன்பாடு வரையறுக்கும்.

$\underline{F}$ன் எண்ணிப் பகிர்வுகளை. $\underline{i}, \underline{j}, k$ திசைகளில் X, Y, Z எனக்கொண்டால்,

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$Y = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$Z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

ஆகும்.

4·11. மாதிரிக்கணக்கு :

4·905 கிலோகிராம் எடையுள்ள துகள் ஒன்றின் நிலையை

$\underline{r} = 12\cos\frac{\pi t}{3}\underline{i} + 5\sin\frac{\pi t}{3}\underline{j}$ மீ என்னும் நிலைத் திசையி வரையறுக்கிறது. $t = \frac{1}{2}$ விநாடியாக உள்ளபோது, துகளின்மேல் செயல்படும் விசையைக் காண்க. அவ்விசை தொடக்கப்புள்ளியின் வழியே செல்லும் எனவும் காட்டுக.

$\underline{r} = 12\cos\frac{\pi t}{3}\underline{i} + 5\sin\frac{\pi t}{3}\underline{j}$ என்றால், துகள் இருக்கும் இடத்தின் அச்சுத்தொலைவுகள், முறையே

$$x = 12\cos\frac{\pi t}{3}, \quad y = 5\sin\frac{\pi t}{3} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு t என்பது துணை அலகு ஆகும். இதை விடுவிக்க துகளின் இயங்குவரை

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad \text{என்றாகும்.}$$

இது ஒரு நீள்வட்டப்பாதையாகும்.

$$\underline{v} = \frac{d\,r}{dt} = -4\pi \sin\frac{\pi t}{3}\,i + \frac{5}{3}\,\pi\cos\frac{\pi t}{3}\,j \text{ மீ/(விநாடி)}$$

$$\underline{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{3}\cos\frac{\pi t}{3}\,\underline{i}$$

$$-\frac{5\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3}\,\underline{j} \text{ (மீ/விநாடி)}^2$$

துகளின் நிறை $m = \frac{4{\cdot}905}{9.81} = \frac{1}{2}$ கி. கிராம்.

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியின்படி,

$\underline{F} = X\,\underline{i} + Y\,\underline{j}$ என்பது விளைவு விசை என்றால்,

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{4\pi^2}{3}\cos\frac{\pi t}{3}\right)$$

$$= \frac{-2\pi^2}{3}\cos\frac{\pi t}{3}$$

$$Y = m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{5\pi^2}{9}\sin\frac{\pi t}{3}\right)$$

$$= \frac{-5\pi^2}{18}\sin\frac{\pi t}{3}$$

நேரம் $t = \frac{1}{2}$ விநாடியாக உள்ளபோது,

$$X = -\frac{2\pi^2}{3}\cos 30^\circ$$

$$= -\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}.$$

$$Y = -\frac{5\pi^2}{18}\sin 30^\circ$$

$$= -\frac{5\pi^2}{36}$$

எனவே செயல்படும் விசையின் எண் மதிப்பு

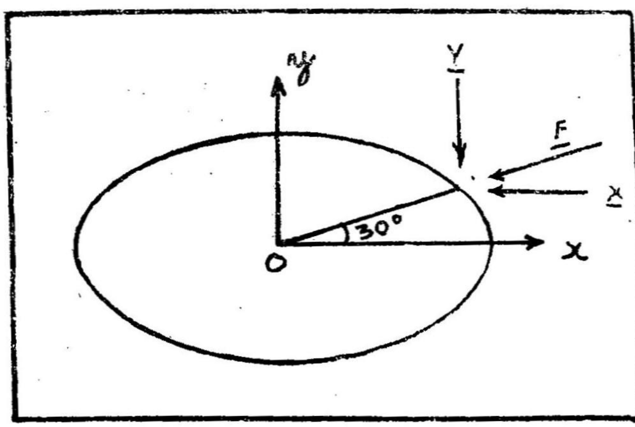
$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = \pi^2\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{25}{1296}}$$

$$= \frac{\pi^2\sqrt{457}}{36} \text{ கி. கி. விசை}$$

இவ்விசை செயல்படும் கோடு x-அச்சுடன் ϕ என்னும் கோணத்தை அமைத்தால்,

$$\tan\phi = \frac{Y}{X} = \frac{-5\pi^2/36}{-\pi^2/\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5}{12\sqrt{3}}$$



படம் 4·8

$t = \frac{1}{2}$ என்றுள்ளபோது, துகள் P என்னுமிடத்தில் படம் (4·8)-ல் காட்டியவாறு இருக்குமெனில்,

$$\frac{y}{x} = \frac{5\sin 30^\circ}{12\cos 30^\circ} = \frac{5}{12\sqrt{3}}$$

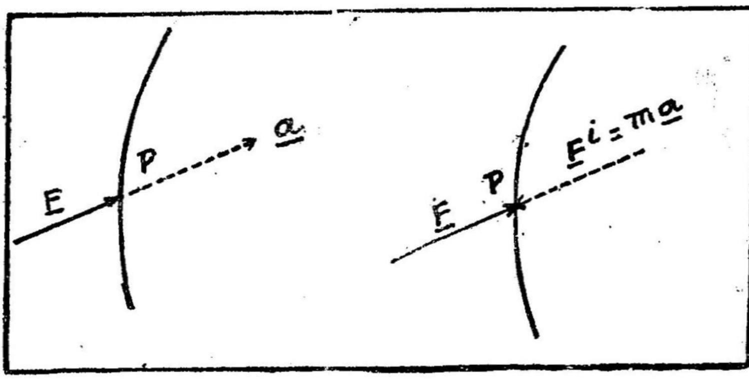
$$\text{எனவே,} \quad \frac{Y}{X} = \frac{y}{x}$$

ஆதலால் $\underline{F}$ என்னும் விளைவுவிசை தொடக்கப்புள்ளி O-வின் வழியே செல்கிறது.

4·12. தலம்பாட்டின் தத்துவம் (D' Alembert's Principle)

இயக்க விசையியல் கணக்குகளை, நிலையியல் கணக்குகளாக மாற்றி தீர்வுகாண இத்தத்துவம் உதவுகிறது. குறிப்பாக, இயக்க விசையியல் பகுதியில், துகளின் இயக்கம் அறியக்கூடிய சந்தர்ப்

பங்களில் அதன்மேல் செயல்படும் விளைவு விசையைக் காண்பதற்கு இத்தத்துவம் சிறப்பாக உதவுகிறது.



படம் 4·9 (a) படம் 4·9 (b)

பரந்தவெளியில் P எனும் இடத்தில் துகள் ஒன்றில் $\underline{F}$ என்னும் விசை [படம் 4·9 (a)]-ல் காட்டியவாறு செயல்படுவதாகக் கொள்க. நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிப்படி, இயங்கும் துகளின் முடுக்கமானது,

$\underline{F} = m\,\underline{a}$ என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

இச்சமன்பாட்டை,

$$\underline{F} - m\,\underline{a} = \underline{0}\,,$$

அல்லது $\underline{F} + \underline{F^i} = \underline{0}$ என எழுதலாம்.

இங்கு $\underline{F^i} = -m\,\underline{a}$ என்பது சடத்துவ விசை எனப்படும்.

இவ்விதவிசை எப்போதும் துகளில் ஏற்படும் முடுக்கத்தின் எதிர்த்திசையில் அமையும். (படம் [4·9 (b)]-ஐப்பார்க்க)

$\underline{F} + \underline{F^i} = \underline{0}$ என்னும் திசையிச் சமன்பாட்டால், துகளில் செயல்படும் $\underline{F}$ என்னும் விசை, சடத்துவ விசை $\underline{F^i}$ என்பவற்றின் விளைவு பூச்சியமாகிறது. அதாவது $\underline{F}$ ம், சடத்துவ விசை $\underline{F^i}$ யும் சேர்ந்து சமநிலையிலுள்ளன. இதுவே தலம்பாட்டின் கொள்கையாகும்.

இங்கு சடத்துவவிசை துகளின்மேல் செயல்படுவதில்லை என்பது வலியுறுத்தத்தக்கது. இது துகளுக்குத் தாக்கு விசையை

அளிக்கும் பொருளின் மேல்தான் உண்மையாகவே செயல்படுகிறது. எனினும் சடத்துவ விசைக்குச் சமமான கற்பனைவிசை ஒன்று துகளின்மேல் செயற்படுவதாகக் கருதினால், துகளுக்கு ஒருவித முடுக்கமும் ஏற்படுவதற்கில்லை. அப்போது துகளானது அமைதி நிலையிலிருப்பதால், இவ்விதச் சமநிலை, துகளின் இயக்க விசையியல் சமநிலை (Dynamic equilibrium) எனக்கூறப்படும்.

$\underline{F} + \underline{F^i} = 0$ என்பதை, அவற்றின் எண்ணிப்பகிர்வுகளாகப் பிரிக்கும்போது,

$$X\,\underline{i} + Y\,\underline{j} + Z\,\underline{k} - m\frac{d^2x}{dt^2}\,\underline{i} - m\frac{d^2y}{dt^2}\,\underline{j} - m\frac{d^2z}{dt^2}\,\underline{k} = 0$$

அதாவது,

$$x - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0\ ,\ y - m\frac{d^2y}{dt^2} = 0\ ,\ z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

ஆகும். இவைகளே துகளின் இயக்கச்சமன்பாடுகளாகும்.

தலம்பாட்டின் தத்துவத்தை ஒரு துகளின்மேல் செயல்படும் விசைகளின் தொகுதி ஒன்றிற்கும் பயன்படுத்தலாம்.

படம் (4·10)-ல் காட்டியவாறு, $\underline{F_1}, \underline{F_2} \ldots\ldots \underline{F_n}$ என்றும் விசைகள், m என்றும் நிறைவைப்பெற்று, P என்னுமிடத்திலுள்ள துகளில் செயல்படுவதாகக் கொள்க. அவ்விசைகள், துகளில் $\underline{a}$ என்னும் ஒரு விளைவு முடுக்கத்தை (Resultant acceleration), ஏற்படுத்துவதாகக்கொள்க.

அப்போது

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{F_k} = m\,\underline{a} \quad \text{ஆகும்.}$$

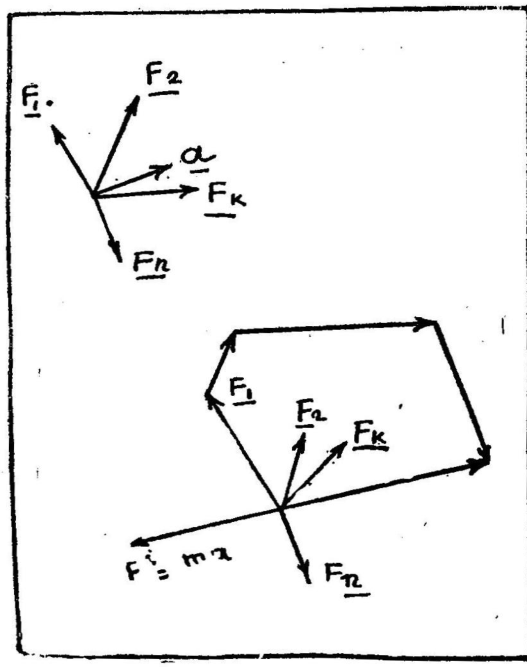
அதாவது,

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{F_k} - m\,\underline{a} = 0$$

அல்லது, $$\sum_{k=1}^{n} \underline{F_k} + \underline{F^i} = 0 \quad \text{ஆகும்.}$$

இங்கு, $\underline{F^i} = -m\,\underline{a}$ என்பது சடத்துவ விசை எனப்படும்.

தலப்பாட்டின் கொள்கையின்படி, $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$ ... ... $\underline{F_k}$ ... ... $\underline{F_n}$ என்னும் விசைத்தொகுதியும், $\underline{F^i}$ எனும் சடத்துவ விசையும்



படம் 4·10

சேர்ந்து படம் (4·10)-ல் காட்டியவாறு, இயக்க விசையியற் சமநிலையிலுள்ளன. எனவே, இவ்விசைகளனைத்துக்கும்,

$$\left[\left\{ F_k \right\} k = 1, 2, \ldots n, \underline{F^i} \right]$$

ஏற்றதான ஒரு விசைப் பல்கோணத்தை வரைந்தால், அது ஒரு மூடிய உருவத்தைப் பெறும்.

மேலும் ஒரு முனைவிசைத் தொகுதிக்கு உரிய சமநிலைச் சமன்பாடுகளை, $\left[\left\{ \underline{F_k} \right\} k = 1, 2, \ldots n, \underline{F^i} \right]$ என்னும் தொகுதிக்கும் பயன்படுத்த,

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} - m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} - m \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} - m \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

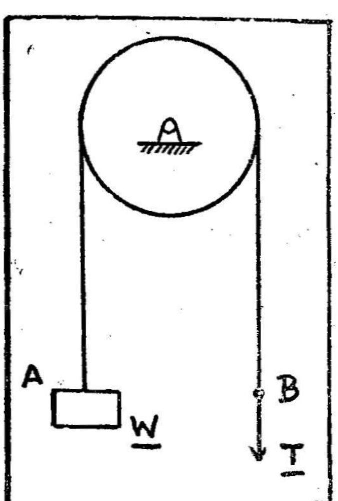
என்னும் இயக்கவிசையியல் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

எனவே துகளின் இயக்கவிசையியல் கணக்குகளுக்கு நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியையோ, அல்லது தலப்பாட்டின் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தியோ, இயக்கவிசையியல் சமன்பாடுகளை வரையறுத்து, அவற்றிற்கு தீர்வு காணலாம்.

தலப்பாட்டின் தத்துவத்தைக் கட்டிறுக்கப் பொருள்களுக்கும் அல்லது கட்டிறுக்கப் பொருள்களின் தொகுதிக்கும் பயன்படுத்தலாம்.

4·13. மாதிரிக்கணக்கு

4·13-1. ஒரு நிலையான, மழமழப்பான, இலேசான கப்பியின் மீது செல்லும் மீள்சக்கியில்லாத ஒரு AB என்னும் கயிற்றின் A என்னும் முனையில் W எடையுள்ள கட்டையானது இணைக்கப்பட்டு, B என்னும் மற்றொரு நுனியில், கட்டைமேல் நோக்கிய திசையில் a என்னும் முடுக்கத்தைப் பெறுமாறு ஒரு T என்னும் விசையானது படம் (4·11)-ல் காட்டியவாறு பயன்படுத்தப்படுகிற தெனில், அவ்விசையின் எண்மதிப்பைக் காண்க.



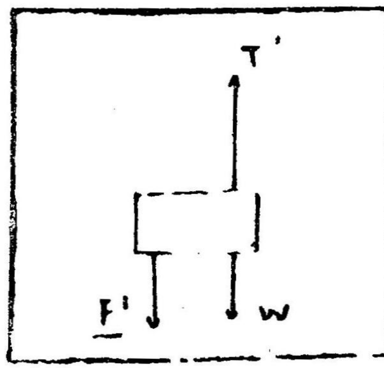
படம் 4·11

கயிற்றின் இழுவிசையை T' எனக்கொள்க. கப்பி மழமழப்பாக இருப்பதால், இவ் விழுவிசை, கயிறு முழுவதிலும் சமமாயிருக்கும்.

படம் (4·12)-ல் சட்டையானது தனிப்படுத்தப்பட்டு, அதற்கு ஏற்ப தடையற்ற பொருள் விளக்கப்படம் காட்டப்பட்டுள்ளது.

கட்டையின் நிறை $m = \frac{w}{g}$ ஆகும்.

கட்டையின்மேல் அதன் எடை $\underline{W} \downarrow$ யும், கயிற்றின் இழுவிசை $\underline{T'}$-ம் செயல்படுகின்றன. கட்டை மேல்நோக்கிய திசையில் இயங்கி, $\underline{a}$ என்னும் முடுக்கத்தைப் பெற்றுள்ளதால் $\underline{F^i} = -m\,\underline{a}$ என்னும் சடத்துவ விசை கீழ்நோக்கி எடுக்கப்படும்.



படம் 4·12

எனவே $\underline{W} \downarrow$, $\underline{T'} \downarrow$, $\underline{F^i} \uparrow$ என்னும் விசைகள் கட்டையைத் தலப்பாட்டின் கொள்கையின்படி சமநிலையில் வைக்கின்றன.

$$\underline{W} + \underline{T'} + \underline{F^i} = 0$$

$$-W + T' + ma = 0$$

$$T' = W + ma$$

$$= W + \frac{W}{g}\,a$$

$$= W\left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

மேலும் B என்னுமிடத்தில் மேல்நோக்கிச் செயல்படும் T' என்னும் இழுவிசை, bயில் கீழ்நோக்கிச் செயல்படும் தாக்கவிசை T-க்குச் சமமாகும்.

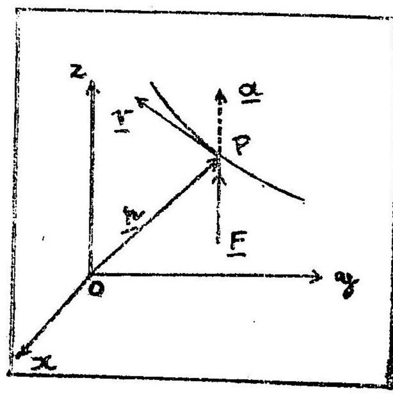
எனவே $T = T' = W\left(1 + \frac{a}{g}\right)$ ஆகும்.

4·14. கொடுக்கப்பட்ட விசைகளால் தாக்குற்ற துகளின் இயங்கு வரையைக் காணுதல்.

படம் (4·13)-ல் காட்டியவாறு, $\underline{F}$ என்னும் விசை, m நிறையுள்ள துகளைத் தாக்குவதாகக் கொள்க.

1 என்னும் நேரத்தில், துகளின் நிலையை

$\underline{OP} = r(t)$ என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுப்பதாகக் கொள்க.



படம் 4·13

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

$$m\,\underline{a} = \underline{F}$$

ஆதாவது, $m \dfrac{d^2 r}{dt^2} = \underline{F}$ ஆகும்.

ஒரு விசைக்குப் பதிலாக, $\underline{F_1}$, $\underline{F_2}$, ... $\underline{F_k}$ ...... $\underline{F_n}$ என்னும் விசைகள் துகளில் செயற்படுவதானல்,

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \underline{F_k} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $\{ F_k \}$ $k = 1, 2, \ldots n$ என்பவை ஒருமுனை விசைகள் ஆதலால், அவற்றின் தொகுபயன் விசை

$$\underline{R} = \sum_{k=1}^{n} F_k \text{ ஆகும். எனவே}$$

$m \dfrac{d^2 r}{dt^2} = \underline{R}$ என்னும் இயக்க இயல் சமன்பாடு கிடைக்கப்பெறும்.

கொடுக்கப்பட்ட $\underline{F}$ என்னும் விசையின் பகிர்வுகளுக்கு ஏற்ற வாறு, இச் சமன்பாடுகளுக்குப் பின்வருமாறு தீர்வு காணலாம்.

(i) விசையின் $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ கூறுகள் கொடுக்கப்பட்டதாகக் கொள்க.

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k} \quad \text{என்றும்}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} (F_{kx})\right) \underline{i} + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right) \underline{j} + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right) \underline{k},$$

$$\underline{R} = R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k} \quad \text{என்றும் கொள்க.}$$

அப்போது மேற்கூறிய சமன்பாடுகள் முறையே

$$m(\ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j} + \ddot{z}\underline{k}) = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k},$$

$$m(\ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j} + \ddot{z}\underline{k}) = R_x \underline{i} + R_y \underline{j} + R_z \underline{k} \quad \text{ஆகும்.}$$

இவற்றை எண்ணிப் பகிர்வுகளாக அமைக்கும்போது முறையே,

$$m\ddot{x} = F_x ; \quad m\ddot{y} = F_y ; \quad m\ddot{z} = F_z \quad \text{என்றும்}$$

$$m\ddot{x} = R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} ; \quad m\ddot{y} = R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} ;$$

$$m\ddot{z} = R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}$$

என்றும் சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

(ii) விசையின் கூறுகள் தொடுகோடு, செங்குத்துக்கோடு திசைகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்க.

$\underline{F}$ என்னும் விசையின் தொடுவரை, செங்குத்துக்கோட்டுப் பகிர்வுகளை

$\underline{F_t}$, $\underline{F_n}$ எனக்கொள்க.

$$\therefore \quad \underline{F} = \underline{F_t} + \underline{F_n}$$

$$\underline{a} = \underline{a_t} + \underline{a_n}$$

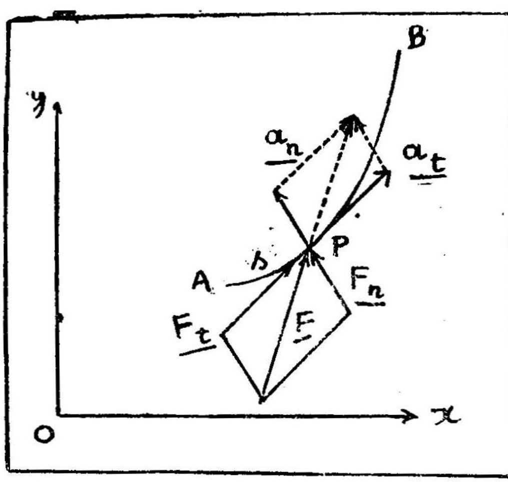
$$\therefore \quad m\,\underline{a} = \underline{F} \quad \text{என்றும்}$$

சமன்பாடு,

$$m\,(a_t\,\underline{i_t} + a_n\,\underline{i_n}\,) = F_t\,\underline{i_t} + F_x\,\underline{i_n}$$

அல்லது

$ma_t = F_t$, $ma_n = F_n$ என்றும் ஆகும்.



படம் 4·14

துகள் இயங்கும் வளைகோட்டில், ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையான *A* என்னும் புள்ளியிலிருந்து, படம் (4·14)-ல் காட்டியவாறு,

வில் தொலைவு $\widehat{AP} = s$ என அளவிடப்பட்டால்,

$$v = \frac{ds}{dt},$$

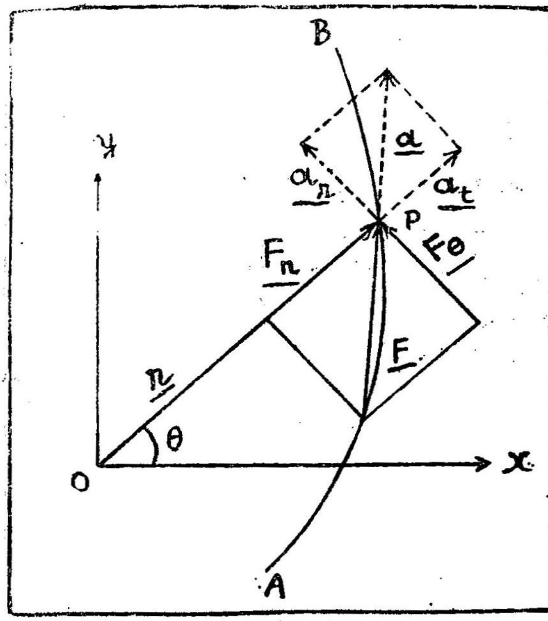
$$a = \frac{d^2s}{dt^2}$$ என்றாகும்.

அப்போது இயக்க இயல் சமன்பாடுகள்

$$m\,\frac{d^2s}{dt^2} = F_t,$$

$$m\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = F_n$$ என்றாகும்.

(iii) செயல்படும் விசையின் பகிர்வுகள் ஆரைத்திசையிலும், குறுக்குத் திசையிலும் அமைவதாகக் கொள்க.



படம் 4·15

அப்போது

$$\underline{F} = \underline{F_r} + \underline{F_\theta}$$

எனவே $\underline{a} = \underline{a_r} + \underline{a_\theta}$ ஆகும்.

எனவே, $m\,\underline{a} = \underline{F}$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\underline{i_r} + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\underline{i_\theta}$$

$$= F_r\,\underline{i_r} + F_\theta\,\underline{i_\theta}$$

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F_r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) &= F_\theta \end{aligned}\right\}$$

என்ற சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

இம் மூன்று நிலைகளிலும் துகளின்மேல் செயல்படும் $\underline{F}$ என்னும் விசை, நேரம் (t), துகளின் நிலை $(\underline{r})$, துகளின் திசைவேகம் $(\underline{v} = \dot{\underline{r}})$ ஆகியவற்றின் சார்பலனாக அமையக்கூடும்.

பொதுவாக,

$$\underline{F} = \underline{F}\,(t, \underline{r}, \dot{\underline{r}})$$ என எடுக்கப்படும்.

எனவே,

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F},$$

$$m\,(\underline{a_t} + \underline{a_n}) = \underline{F_t} + \underline{F_n}$$

$$m\,(\underline{a_r} + \underline{a_\theta}) = \underline{F_r} + \underline{F_\theta}$$

என்னும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைத் திசையித் தொகையிடல் முறையை (Vector Integration)க் கையாண்டு, தீர்வுகாணும் போது, துகள் இயங்கும் பாதையானது

$\underline{r} = \underline{r}\,(t, \underline{c_1}, \underline{c_2})$ என்னும் நிலைத்திசையியால் வரையறுக்கப்படும்.

இங்கு $\underline{c_1}, \underline{c_2}$ என்பவை மாறிலித்திசையிகள் (Constant Vectors). இவற்றைத் தொடக்கநிலை நிபந்தனைகள் (Initial Conditions) அல்லது எல்லை நிபந்தனைகள் (Boundary Conditions) மூலம் அறியலாம்.

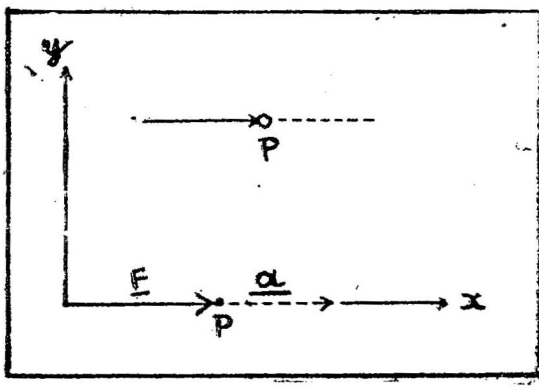
ஆதலால் $\underline{r} = \underline{r}\,(t, \underline{c_1}, \underline{c_2})$ என்பது வரையறுக்கப்படும் போது, துகளின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவை எக் கணத்திலும் எளிதில் தீர்மானிக்கப்படும்.

நடைமுறையில், இவ்விதத் திசையி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை, எண்ணிச் சமன்பாடுகளாக மாற்றியும், அவற்றிற்குத் தீர்வு காணலாம். அப்போது $\underline{c_1}, \underline{c_2}$ என்னும் மாறிலித் திசையிகள் ஆறு தெரியாக் கணியங்களைப் பெற்றிருக்கும். அவற்றையும் முன்போலவே, தொடக்க, எல்லை நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்மானிக்கலாம்.

4·15. துகளின் நேர்கோட்டியக்கம்

துகள் ஒன்றின்மேல் விசையானது, மாறாத திசையிலேயே செயல்படுமானால், அது ஒரு நேர்கோட்டிலியங்கும்.

படம் (4·16)-ல் காட்டியவாறு, m திணிவைப் பெற்ற துகள் ஒன்று நேர்கோட்டில் $\underline{F}$ என்னும் விசைக்குக் கட்டுப்பட்டு இயங்கட்டும். வசதிக்காக, விசை, x அச்சில் செயல்படுகிறதெனக் கொள்க.



படம் 4·16

அப்போது, $X = F, \quad Y = 0, \quad Z = 0$ ஆகும்.

முன் கூறியவாறே, F என்பது $(t, \underline{r}, \dot{\underline{r}})$ என்பவைகளின் சார்பலனாவதால், இங்குத் துகளின் நேர்கோட்டியக்கச் சமன்பாடு

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X(t, x, \dot{x})$$ ஆகும்.

இவ் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைத் தொகையிட,

$x = x(t, c_1, c_2)$ என்னும் நேர்கோட்டுப் பாதையைப் பெறலாம். இங்கு c_1, c_2 என்பவை மாறிலிகளாகும். இவைகள் தொடக்க நிபந்தனைகளால் வரையறுக்கப்படும்.

இவ்விதச் சமன்பாட்டிற்குக் கணக்கியலாக எப்போதும் தீர்வு காண்பது இயலாததால், கீழ்க்காணும் சில முக்கிய நிலைமைகள் (Cases) தான் ஆய்வுக்கு எடுக்கப்படும்.

4·16. மாறாதவிசையொன்றின்கீழ் துகளின் நேர்கோட்டியக்கம்.

ஒரு நேர்கோட்டிலியங்கும் துகளில் செயல்படும் $\underline{F}$ என்னும் விசையின் "எண்மதிப்பு", "திசை" ஆகியவை மாறாதவையாகுக.

அப்போது $F = X =$ ஒரு மாறிலியாகும்.

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m} = \text{ஒரு மாறிலி}$$

இச் சமன்பாட்டை ஒருமுறை தொகையிட,

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{X}{m}t + c_1 \quad \text{என்பது கிடைக்கும்.}$$

மறுமுறை தொகையிடும்போது,

$$x = \int v dt = \frac{1}{2m} \times t^2 + c_1 t + c_2$$

என்றாகும்.

c_1, c_2 என்னும் மாறிலிகள், தொடக்க அல்லது எல்லை நிபந்தனைகளின் வாயிலாகத் தீர்மானிக்கப்படும். எனவே இயக்க இயல் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைத் தீர்வு காணும்போது, துகளின் இயக்கப்பாதை

$x = x(t, c_1, c_2)$ என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

4·17. மாதிரிக் கணக்குகள்

4·17-1. 3·27 கி. கி எடையுள்ள பொருள் ஒன்றை 1·8 மீட்டர் உயரமுள்ள மனிதன் மேல்நோக்கிய நிலைக்குத்து திசையில், 18 மீ/வி என்னும் (தொடக்க) வேகத்தில் எறிந்தான். அது அடைந்த மிகப் பெரிய உயரத்தையும், தரையைத் திரும்பி வந்தடைய ஆகும் நேரத்தையும் காண்க.

$$\text{பொருளின் எடை} = \underline{w} = -w\,\underline{j}$$

$$\text{பொருளின் நிறை} = \frac{w}{g}$$

பொருள் மேல்நோக்கிய திசையிலியங்குவதால்,

$$m\ddot{y} = -w$$

$$\frac{w}{g}\ddot{y} = -w$$

$$\ddot{y} = -g = \text{ஒரு மாறிலி}$$

$$\therefore \quad \dot{y} = -gt + c_1$$

$t = 0$ என்னும்போது,

$$\dot{y} = v_0 = 18 \text{ மீ/வி}$$

$$\therefore \quad c_1 = 18$$

$$\dot{y} = -gt + 18$$

$$y = -g\frac{t^2}{2} + 18t + c_2$$

$t = 0$, $y = 1\cdot8$ மீ என்றுவதால்

$$c_2 = 1\cdot8$$

$$\therefore \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + 18t + 1\cdot8$$

மிக உயர்ந்த புள்ளியில், இறுதி (final) வேகமானது பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad 0 = -9\cdot81t + 18$$

$$t = \frac{18}{9\cdot81} = \frac{2}{1\cdot09} = 1\cdot835 \text{ வினாடி}$$

$t = 1\cdot835$ வினாடியில், பொருள் சென்ற தொலைவு,

$$y \text{ பெருமம்} = -\frac{1}{2} \times 9\cdot81\,(1\cdot835)^2 + 18 \times (1\cdot835) + 1\cdot8$$

$$= 18\cdot31 \text{ மீ}$$

பொருள் தரையை அடையும் தருணத்தில், $y = 0$

$$\therefore \quad 0 = -\frac{1}{2} \times 9\cdot81t^2 + 18t + 1\cdot8 \text{ ஆகும்.}$$

அல்லது $4\cdot905t^2 - 18t - 1\cdot8 = 0$

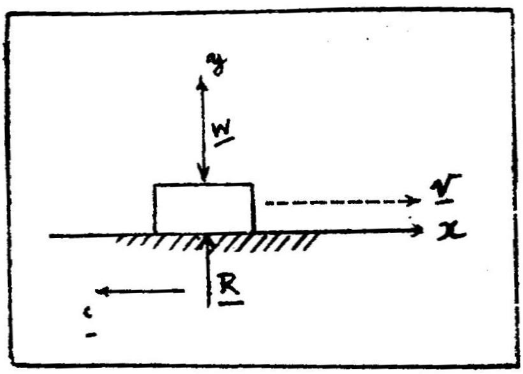
$$t = \frac{18 \pm 18\cdot955}{9\cdot81}$$

$$t_1 = \frac{18 + 18\cdot955}{9\cdot81}$$

$$= 3\cdot767 \text{ வினாடி; அல்லது } t_2 = -\frac{0\cdot955}{9\cdot81}$$

$t > 0$ என்பதால், பொருள் தரையைத் திருப்பி அடையும் போது, நேரம் 3·767 வி. ஆகும்.

4·17-2. 80 கி.கி எடையையும், தொடக்கத்தில் 9 மீ வேகத்தையும் கொண்ட பொருள், வழவழப்பற்ற கிடைத்தளத்தில் மாருத உராய்வு விசையால், எதிர்முடுக்கத்தைப் பெற்று, ஓய்வு நிலையை அடைகிறது. உராய்வுக்கெழு 0·25 எனில், அது ஓய்வு நிலையை அடைவதற்கு எடுத்த நேரம் யாது? அந்நேரத்தில் அது சென்ற தொலைவையும் காண்க.



படம் 4·17

பொருளின் தடையற்ற விளக்கப் படம் (4·17)-ல் காட்டப் பட்டுள்ளது.

நிலைக்குத்து திசையில் இயக்கமில்லாமையால்,

$$R = W \quad \text{ஆகும்.}$$

உராய்வு விசை இயக்கத்திற்கு எதிர்த்திசையில் செயல்படு மென்பதால், $\underline{F} = -F\underline{i} = -\mu R\underline{i} = -\mu w\underline{i}$

கிடைத்திசையில் இயக்கம் நிகழ்வதால்,

$$\frac{w}{g}\ddot{x} = -\mu W$$

$$\ddot{x} = -0\cdot25g = \frac{1}{4}g$$

$$\therefore \quad \dot{x} = -\frac{1}{4}gt + c_1$$

$t = 0$ என்னும்போது,

$$\dot{x} = v_0 = 9 \text{ மீ/வி}$$

$$\therefore \quad c_1 = 9$$

எனவே $\dot{x} = -\frac{1}{4} gt + 9$

பொருள் ஓய்வு நிலையை அடையும்போது, இறுதிவேகம் பூச்சியமாகும். ஆதலால் அது ஓய்வு நிலையைப் பெறுவதற்கு எடுத்த நேரம்

$$0 = -\frac{1}{4} gt + 9$$

$$\therefore \quad t = \frac{36}{g} = \frac{36}{9 \cdot 81} = \frac{4}{1 \cdot 09} = 3 \cdot 67 \text{ வினாடி}$$

மேலும் $x = -\frac{1}{4} g \frac{t^2}{2} + 9t + c_2$

$t = 0$ எனில், $x = 0$, $\therefore \quad 0 = c_3$

ஆகவே,

$$x = -\frac{1}{8} gt^2 + 9t$$

$t = 3 \cdot 67$ வினாடியில், பொருள் சென்ற தொலைவு,

$$x = -\frac{1}{8} \times 9 \cdot 81 \times (3 \cdot 67)^2 + 9 \times 3 \cdot 67$$

$$= -16 \cdot 53 + 33 \cdot 03$$

$$= 16 \cdot 50 \text{ மீ ஆகும்.}$$

4·17-3. 19·62 கி.கி எடையுள்ள துகளில்,

$\underline{F_1} = (-7 \underline{i} + 4 \underline{j} + 5 \underline{k})$ கி.கி விசை.

$\underline{F_2} = -16 \underline{i}$ கி.கி விசை

$\underline{F_3} = 7 \underline{i} + 10 \underline{j} - 5 \underline{k}$ கி.கி விசை என்னும் விசைகள் செயல்படுவதாகில், அதன் முடுக்கத்தைக் காண்க.

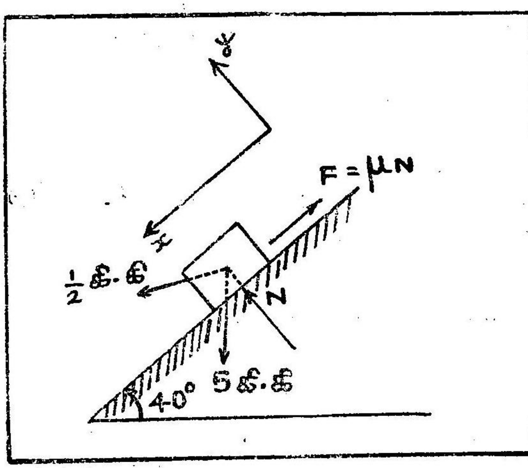
$$m \underline{a} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3}$$

$$\frac{19 \cdot 62}{9 \cdot 81} \underline{a} = (-7 \underline{i} + 4 \underline{j} + 5 \underline{k}) + (-16 \underline{i}) + (7 \underline{i} + 10 \underline{j} - 5 \underline{k})$$

$$= -16 \underline{i} + 14 \underline{j} \text{ கி.கி விசை}$$

$$\therefore \quad \underline{a} = (-8 \underline{i} + 7 \underline{j}) \text{ மீ/(வினாடி)}^2$$

4·17-4. 5 கிலோகிராம் எடையுள்ள பெட்டி ஒன்று கிடைத் தளத்துடன் $40°$ கோணத்தை அமைக்கும் வழவழப்பற்ற சாய்வு தளத்தில், $\frac{1}{2}$ கி.கி எடை யுள்ளதும், கிடையாகச் செயல்படுவது மான விசையால் தாக்கப்பட்டு, கீழ்நோக்கி இயங்குகிறது. வழுக்கு உராய்வுக்கெழு 0·10 எனில், பெட்டியின் முடுக்கத்தைக் காண்க.



படம் 4·18

பெட்டியைத் தனிப்படுத்தி அதன்மேல் செயல்படும் விசைகள் படம் 4·18-ல் காட்டப்பட்டுள்ளன. (x, y) என்னும் அச்சுகளையும் படத்தில் காட்டியவாறு எடுக்கவும்.

$$\ddot{y} = 0 \quad \text{என்றுவதால்}$$

$$\sum F_{ky} = 0$$

அதாவது $$-5 \cos 40° + N - \frac{1}{2} \sin 40° = 0$$

$$N = 5 \cos 40° + \frac{1}{2} \sin 40°$$

$$= 4 \cdot 1514 \text{ கி.கி விசை}$$

உராய்வுக்கெழு $= 0 \cdot 10$ என்பதால்,

உராய்வு விசை $F = \mu N = 0 \cdot 10 \times 4 \cdot 1514$

$= 0 \cdot 41514$ கி.கி ஆகும்.

சாய்வுதளத்தில் பெட்டி கீழ்நோக்கி இயங்குவதால்

$m\ddot{x} = \sum F_{kx}$ என்னும் சமன்பாடு

$$\frac{w}{g}\ddot{x} = 5 \sin 40^\circ - \frac{1}{2}\cos 40^\circ - 0{\cdot}41514,$$

$$\frac{5}{9{\cdot}81}\ddot{x} = 2{\cdot}41586$$

$$\ddot{x} = \frac{2{\cdot}41586 \times 9.81}{5}$$

$$= 4{\cdot}704 \text{ மீ/(வினடி)}^2$$

எனவே, பெட்டியானது $4{\cdot}704$ மீ/(வினடி)^2 என்னும் முடுக்கத்தைப் பெற்றுள்ளது.

4·18 பயிற்சி

4·18-1. வலுவான கம்பியால் கட்டப்பட்ட 200 கி.கி எடையுள்ள கூண்டு ஒன்று சுரங்கப்பாதையில் கீழ்நோக்கி ஒரே சீரான முடுக்கத்துடன் இறக்கப்படுகிறது. முதல் 5 வினடிகளில் அது 20 மீ ஆழம் சென்றால், கம்பியின் இழுவிசை யாது?

[குறிப்பு : $s = \frac{1}{2} ft^2$; $20 = \frac{1}{2} f \times 25$; $f = \frac{8}{5}$ மீ/வி^{2}.

விடை : $T = 167{\cdot}38$ கி.கி எடை].

4·18-2. 6 கி.கி எடையுள்ள பொருள் ஒன்று, ஒரே சீரான முடுக்கத்துடன் ஒரு வலுவான கயிற்றால், மேல்நோக்கி இழுக்கப்படுகிறது. கயிற்றின் மிகப்பெரிய பிகுஇழுவிசை 10 கி.கி எடை எனில், பொருளில் ஏற்படும் மிகப்பெரிய முடுக்கம் யாது?

(விடை : $6{\cdot}54$ மீ/வி^{2})

4·18-3. 72 கி.கி எடையுள்ள மனிதன் ஒருவன், உத்திரம் ஒன்றிலிருந்து தொங்கும் கயிற்றின்மேல், $0{\cdot}15$ மீ/(வினடி)^2 என்னும் முடுக்கத்துடன் ஏறுகிறான். கயிற்றில் ஏற்படும் இழுவிசை யாது? (விடை : $73{\cdot}1$ கி.கி எடை)

4·18-4. 30 கி.கி எடையுள்ள பனிக்கட்டி ஒன்று வழவழப் பற்ற கிடைத்தளத்தில், அத்தளத்தில் 30° கோணத்தை அமைத்த வாறு செயல்படும் 10 கி.கி எடையுள்ள ஒரு மாருத விசையால் இழுக்கப்படுகிறது. பனிக்கட்டிக்கும் கிடைத்தளத்திற்குமுள்ள உராய்வுக்கெழு 0·1 எனில், பனிக்கட்டி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு, 100 மீட்டர் தொலைவு செல்ல, அது எடுத்துக்கொண்ட நேரம் யாது?

(விடை : 9·8 விநாடி)

4·18-5. 0·56 கிலோகிராம் நிறையுள்ள துகளொன்று x அச்சில், $\underline{F} = -7(x-5)\,\underline{i}$ நியூட்டன் (x மீட்டரில்) விசையால் தாக்கப்பட்டு இயங்குகிறது. $x = 1$ மீ என்றுள்ளபோது, அதன் திசைவேகம் $2\,\underline{i}$ மீ/விநாடி என்றால், $x = 6$ மீ என்றுள்ளபோது அதன் திசைவேகத்தைக் காண்க.

(விடை : $v = 13·84$ மீ/விநாடி)

4·18-6. 5·4 கிலோகிராம் எடையுள்ள துகள் ஒன்று

$\underline{F} = -8·6\,\underline{i} - 3\,\underline{j}$ (கி.கி விசை, x மீட்டரில்) என்னும் விசையால் தாக்கப்பட்டு, தொடக்கப்புள்ளியிலிருந்து,

$$v_0 = 18\,\underline{i} + 24\,\underline{j} \text{ (மீ/வி)}$$

என்னும் தொடக்கத் திசைவேகத்துடன் எறியப்படுகிறது

(i) எந்நேரத்திற்குப் பிறகு திசைவேகத்தின் y பகிர்வு பூச்சியமாகும்?

(ii) துகள் பெறவேண்டிய மிகப்பெரிய x அச்சுத் தொலைவு யாது?

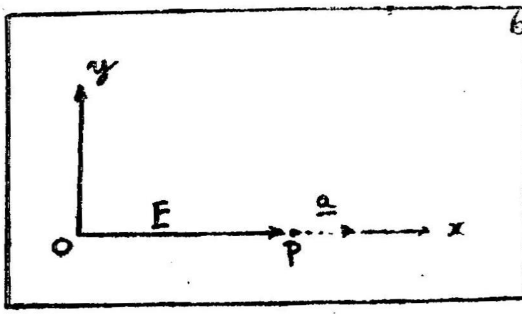
(iii) இப் பெருமத் தொலைவைத் துகள் எந்நேரத்தில் பெறும்?

[விடை : (i) 4·4 விநாடி ; (ii) $5\sqrt{2}$ மீ ; (iii) 0·614 விநாடி.]

4·18-7. 4·5 கி.கி எடையுள்ள துகள் ஒன்று விநாடிக்கு 6 மீட்டர் வேகத்தில் இயங்கிக்கொண்டிருக்கும் நேரத்தில் புறவிசைகளால் தாக்கப்பட்டு, அவற்றின் விளைவு விசையானது (Resultant force) அந்நேரத்தில் 18 கி.கி எடையுள்ளதாகவும், பாதையின் தொடுவரைத்திசையிலமையும் t என்னும் ஓரலகு திசையுடன் 30° கோணத்தை அமைத்த வண்ணமும் உள்ளது. அக் கணத்தில் பாதையின் வளைவாரையைக் காண்க. அதே கணத்தில் துகளின் வேகவளர்ச்சியின் வீதம் யாது?

[விடை : $P = 1·835$ மீ ; $a_t = 33·98$ மீ/(விநாடி)^2]

4·19. நேரத்தைச் சார்ந்த விசையின்கீழ், துகளின் நேர்கோட்டியக்கம் ஒரு நேர்கோட்டிலியங்கும் துகளில் செயல்படும் விசை, காலத்தின் (t-இன்) சார்பலனாகுக.



படம் 4·19

துகள் m-நிறையைப் பெற்றிருந்தால், அதன் நேர்கோட்டு இயக்கச் சமன்பாடு

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X(t) \quad \text{ஆகும்.}$$

இதை ஒருமுறை தொகையிடல் செய்ய,

$$m \frac{dx}{dt} = \int X(t)\, dt + c_1$$

$$= X_1(t) + c_1 \quad \text{ஆகும்.}$$

மறுமுறை தொகையிட,

$$mx = \int (X_1(t) + c_1)\, dt + c_2$$

$$mx = \int \left\{ \left(\int X(t)\, dt \right) + c_1 \right\} dt + c_2 \quad \text{ஆகும்.}$$

இதுவே வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.

[குறிப்பு : $X(t)$ என்னும் சார்பலனைத் தொகையிடமுடியாத போது, எண்வழித்தொகை (Numerical Integration) முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.]

4·20. மாதிரிக்கணக்கு.

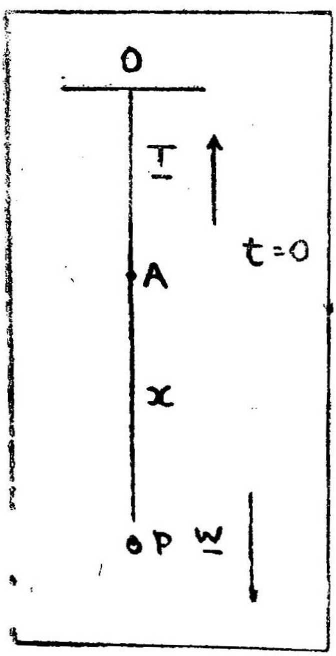
மேல்முனை பொருத்தப்பட்ட ஒரு மீட்சியுறு இழையின் கீழ் முனையில் 5·4 கி.கி எடையுள்ள துகள் ஒன்று தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. இழையிலமையும் இழுவிசையை

$T = 5{\cdot}4 + 0{\cdot}27t^2$ என்னும் (t விநாடியில்)

நேரத்தைச் சார்ந்த சமன்பாடு வரையறுக்கிறது. நேரம் $t = 0$ விநாடியாக உள்ளபோது துகள் அமைதி நிலையிலுள்ளது.

4 விநாடிக்குப் பிறகு, துகள் இயங்கிய தொலைவு, திசைவேகம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

துகள் கீழ்நோக்கி இயங்குவதாகில், இயக்க இயல் சமன்பாடு



படம் 4·20

$$m\ddot{x} = mg - T$$

$$\frac{5{\cdot}4}{9{\cdot}81}\ddot{x} = 5{\cdot}4 - (5{\cdot}4 + 0{\cdot}27t^2)$$

$$\ddot{x} = -\frac{9{\cdot}81}{5{\cdot}4} \times 0{\cdot}27t^2$$

$$\ddot{x} = 0{\cdot}4905t^2$$

$$\dot{x} = -0{\cdot}4905\frac{t^3}{3} + c_1$$

$t = 0,\ \dot{x} = 0$ என்றுவதால்

$$0 = 0 + c_1$$

$$x = -0{\cdot}1635\frac{t^4}{4} + c_2$$

$t = 0,\ x = 0$ என்றுவதால்,

$$c_2 = 0$$

$$\therefore\ x = -0{\cdot}1635\frac{t^4}{4}$$

$t = 4$ விநாடியாக உள்ளபோது,

$\dot{x} = -0{\cdot}1635 \times 64 = -10{\cdot}464$ மீ/விநாடி ஆகும்.

அப்போது துகள் சென்ற தொலைவு (கீழ்நோக்கிய திசையில்)

$$x = -0{\cdot}1635 \times \frac{(4)^4}{4} = -10{\cdot}464 \text{ மீ}$$ ஆகும்.

4·21. திசைவேகத்தைச்சார்ந்த விசையின்கீழ், துகளின் நேர்கோட்டியக்கம் நேர்கோட்டியங்கும் துகள் ஒன்றில் செயல்படும் விசை, திசைவேகத்தின் சார்பலனாகுக.

இங்கு $\underline{F} = \underline{F}(\underline{v})$

நேர்கோட்டியக்கம், x அச்சில் வரையறுக்கப்பட்டால், இயக்க இயல் சமன்பாடு,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv_x}{dt} = X(v_x) \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது $m\dfrac{dv_x}{X(v_x)} = dt$

இருபுறங்களையும் தொகையிட,

$$m\int\frac{dv_x}{X(v_x)} = t + c_1 \text{ ஆகும்.}$$

அல்லது இதை $v_x = \dfrac{dx}{dt} = f(t)$

எனவும் மாற்றியமைக்கலாம்.

மறுமுறை தொகையிட,

$$x = \int f(t)\,dt + c_2 \text{ என்னும் தீர்வு கிடைக்கும்.}$$

இங்கு c_1, c_2 என்னும் மாறிலிகள், தொடக்க அல்லது எல்லை நிபந்தனைகளின் வாயிலாக வரையறுக்கப்படும்.

4·22. மாதிரிக் கணக்கு.

w எடையுள்ள கப்பலொன்றை இயக்குகின்றவிசை $\underline{F}$ எனவும், அதன் இயக்கத்திற்கு ஏற்படும் கடல் நீரின் தடை $R = \dfrac{w}{g}k^2v^2$ (k ஒரு மாறிலி) எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கப்பலின் தொடக்கநிலைத் திசைவேகம் பூச்சியமெனில்,

(i) t எனும் நேரத்தில் அதன் திசைவேகம்,

(ii) மிகப்பெரிய திசைவேகம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

நீரின் தடை இயக்கத்திற்கு எதிர்த்திசையில் செயல்படுவதால், t என்னும் நேரத்தில், கப்பல் சென்ற தொலைவு x அச்சில் அமைக்கப்படின், இயக்கச்சமன்பாடு,

$$\frac{w}{g}\ddot{x} = F - R = F - \frac{w}{g}k^2v^2,$$

அதாவது

$$\frac{w}{g}\frac{dv}{dt} = F - \frac{w}{g}k^2v^2 \text{ ஆகும்,}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Fg}{w} - k^2v^2$$

$$= a^2 - k^2v^2$$

$$a^2 = \frac{Fg}{w}$$

எனவே,

$$\frac{dv}{a^2 - k^2v^2} = dt$$

$$\int \frac{dv}{a^2 - k^2v^2} = t + c_1$$

$$\frac{1}{2ak}\log_e\left(\frac{a+kv}{a-kv}\right) = t + c_1$$

$t = 0$ எனில், $v = 0$ ஆகும்.

எனவே $c_1 = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \log\left(\frac{a+kv}{a-kv}\right) = 2akt$$

அல்லது $v = \dfrac{a}{k}\left(\dfrac{e^{2akt} - 1}{e^{2akt} + 1}\right)$

$$\frac{a}{k}\left(\frac{1 - e^{2akt}}{1 + e^{2akt}}\right)$$

$t \to \infty$ என்றாகும்போது, திசைவேகத்தின் பெருமம் கிடைக்கும்.

எனவே,

$$\text{மிகப்பெரிய திசைவேகம்} = \lim_{t \to \infty} \frac{a}{k}\left(\frac{1-e^{-2akt}}{1+e^{-2akt}}\right)$$

$$= \frac{a}{k}$$

$$= \frac{1}{k}\sqrt{\frac{Fg}{W}}$$

4·23. எறிபொருள் இயக்கம் (Projectile motion)

4·23-1. முன்னுரை : இப்பகுதியில், செங்குத்துத் தளத்தில், யாதேனுமொரு திசையில், யாதேனுமொரு திசைவேகத்துடன் எறியப்பட்ட துகள் ஒன்றின் இயக்கம் கருதப்படும். இவ்வித இயக்கம் நேர்கோட்டு இயக்கம் (Rectilinear motion) அல்லது மைய விசைக்குட்பட்ட இயக்கம் (Central-force motion) என்பவற்றுக்கு வேறுபட்டது. நியூட்டன் இரண்டாவது விதியைப் பயன்படுத்திக் கிடைக்கும் துகளின் இயக்க இயல் திசையி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைத் தொகையிடல் (Integration) செய்து தொடக்க நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தி, ஈர்ப்பு மாறிலிகள் (Constants of integration) வரையறுக்கப்படும். அப்போது துகளின் நிலையைப் பெறமுடிகிறது.

பொதுவாக நேரம் (t மாறி) துணை அலகாகக் கொள்ளப்படும். t என்னும் நேரத்தில் துகளின் நிலையை வரையறுக்கும் நிலைத் திசையி-இன் எண்ணிப்பகிர்வுகளே அதன் x, y அச்சுத் தொலைவுகளாகும். இத்தொலைவுகள், துணை அலகான நேரத்தின் சார்பலன்களாக வரையறுக்கப்படும். துணை அலகை விலக்குவதால் (eliminate) அச்சுத்தொலைவுகளுக்குள்ள தொடர்பை வெளிப்படுத்தும் ஒரு சமன்பாடு கிடைக்கும். இதுவே துகளின் வீச்சுப் பாதையை (Trajectory) வரையறுக்கும் இயக்கச் சமன்பாடாகும். (Equation of motion) இவ்வித இயக்கம் எறிபொருள் இயக்கம் எனப்படும். எறிபொருள், பொதுவாக ஒரு துகளாகக் கருதப்படும்.

துகளானது, பரந்தவெளியில் எறியப்படும்போது அதன்மேல் புவியீர்ப்பு காரணமாக ஏற்படும் அதன் எடையும், இயக்கத்திற்கு இடையூறு விளைவிக்கக்கூடிய காற்றின் உராய்வுத்தடை விசையும் (resistance of air) செயல்படுகின்றன. மேலும் இயக்கமானது புவிப்பரப்பிற்கு அருகாமையில் ஏற்படுவதாகவும் மேற்கொள்ளப்படும். அப்போது புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் மாறுபாடுகள் புறக்

கணிக்கத்தக்க அளவுள்ளதாகவும் இருக்கும். எனவே எறி பொருளின் இயக்கத்தை எளிதாக்கிட, புவியீர்ப்புமுடுக்கம் மாறாமல் இருக்கிறதென்றும், இயக்கத்திற்கு காற்று உராய்வினால் ஏற்படும் தடை புறக்கணிக்கத்தக்க அளவுடையது என்றும் கொள்ளப்படும்.

சில வரையறைகள் :—

எறிபொருள் இயக்கத்தில், பின்வரும் சொற்கள் பயன்படுத்தப் படும். அவற்றின் வரையறைகள் பின்வருமாறு :

1. **எறிதானம்** (Point of projection)

துகள் எப்புள்ளியிலிருந்து எறியப்படுகிறதோ அப்புள்ளியே எறிதானமாகும்.

2. **எறிகோணம்** (Angle of projection)

இது செங்குத்துத் தளத்தில், துகள் எறியப்படும் திசை, எறி தான வழியே அத்தளத்தில் கிடைமட்டமாக வரையப்படும் கோட் டுடன் அமைக்கும் கோணமாகும்.

3. **வீசுபாதை** (Trajectory)

எறியப்பட்ட துகள் இயங்கும் பாதை **வீசுபாதை** அல்லது **எறிபொருள்பாதை** எனப்படும்.

4. **வீச்சு** (Range)

எறிதானத்திற்கும், அத்தானத்தின் வழியே செல்லும் யாதேனு மொரு தளத்தை, வீசுபாதை சந்திக்கும் புள்ளிக்கும் இடையே யுள்ள தொலைவு, அத்தளத்தின் எறிபொருள் **வீச்சு** எனப்படும்.

எறிதானத்தின் வழியே வரையும் கிடைத்தளத்தில் அமையும் கிடை மட்டத் தொலைவு, கிடைவீச்சு (Horizontal Range) எனப் படும்.

5. **பறப்பு நேரம்** (Time of flight)

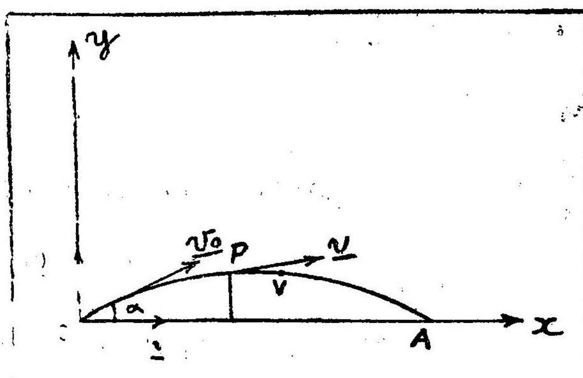
துகள் எறியப்பட்ட கணத்திலிருந்து, எறிதானத்தின் வழியாகச் செல்லும் கிடைத்தளத்தைச் சந்திக்கும் வரை கழியும் நேரம், பறப்பு நேரமாகும்.

4·23·2. எறிபொருள் இயங்கும் பாதை ஒரு பரவளை எனக் காணுதல்.

கிடைத்தளத்தில் ஏதேனுமொரு புள்ளியிலிருந்து ஏற்றக் கோணம் α என்றுள்ள திசையில், $\underline{v_0}$ என்னும் தொடக்க திசை

வேகத்துடன் ஒரு துகள் பரந்தவெளியில் எறியப்படுவதாகக் கொள்க.

எறிதானப்புள்ளியை, O என்னும் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொள்க. O-வின் வழியே வரையும் கிடைத்தளத்தை வீசுபாதை A என்னும் இடத்தில் சந்திக்கட்டும். OA-என்னும் கிடைமட்டக் கோட்டை x-அச்சாகவும், O-வில் OA-வுக்குச் செங்குத்தாக, படம் (4.21)-ல் காட்டியவாறு. வரையும் OB என்னும் கோட்டை y-அச்சாகவும் கொள்க.



படம் 4·21

O-விலிருந்து, m நிறையைப் பெற்ற துகளொன்று OX உடன் α என்னும் கோணச்சாய்வில், $\underline{v_0}$ என்னும் தொடக்கத் திசை வேகத்துடன் (x, y)-என்னும் செங்குத்துத் தளத்தில் எறியப்படுவதாகக் கொள்க

$$v_0 = v_0 \cos \alpha \, \underline{i} + v_0 \sin \alpha \, \underline{j} \quad \text{ஆகும்.}$$

t என்னும் நேரத்தில், துகள் $P(x, y)$ என்னும் நிலையிலுள்ள போது, அதன்மேல் காற்றின் தடையானது புறக்கணிக்கப் படுமெனில், புவியீர்ப்பு காரணமாக ஏற்படும் விசையான தன் எடை $W = mg$ ஒன்றே நிலைக்குத்துத் திசையில், கீழ்முகமாகச் செயல் படும். புவியீர்ப்பு முடுக்கம் g என்பது ஒரு மாறிலியாகக் கருதப் படுவதால்,

$$\underline{W} = -mg \, \underline{j} \quad \text{என்பது ஒரு மாறு விசையாகும்.}$$

மேலும் $\underline{r} = \underline{OP} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j}$ ஆகும்.

எனவே $\underline{F} = m\,\underline{a}$ என்னும் இயக்கவகைக் கெழுத் திசையிச் சமன்பாடு, இங்கு

$$m\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = -mg\,\underline{j}$$

அதாவது, $\frac{d\underline{v}}{dt} = -g\,\underline{j}$ என்றாகும்.

இச்சமன்பாட்டைத் தொகையிட,

$$\int_{\underline{v_0}}^{\underline{v}} dv = \int_0^t -g\,\underline{j}\,dt$$

$$\underline{v} - \underline{v_0} = -gt\,\underline{j}$$

அல்லது $\underline{v} = -gt\,\underline{j} + \underline{v_0}$ என்னும் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

இச்சமன்பாடு, துகளின் திசைவேகத்தை, t என்னும் நேரத்தில் வரையறுக்கிறது.

$\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v} = -gt\,\underline{j} + \underline{v_0}$ என்னும் சமன்பாட்டை

மறுமுறை தொகையீடு செய்தால்,

$$\underline{r} = \int_0^t (-gt\,\underline{j} + v_0)\,dt$$

$$= -g\frac{t^2}{2}\,\underline{j} + v_0\,t \text{ என்றாகும்.}$$

எனவே t என்னும் நேரத்தில், துகளின் நிலையை,

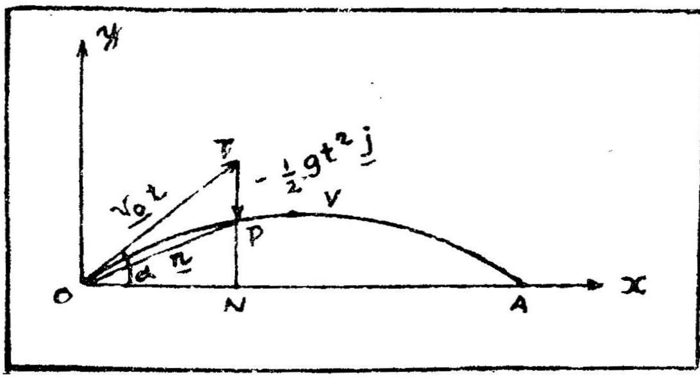
$$\underline{r} = -\frac{1}{2}gt^2\,\underline{j} + \underline{v_0}\,t$$

என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கிறது.

இதுவே திசையி முறையில் துகளின் வீசுபாதையை அறிவிக்கிறது.

இச் சமன்பாட்டைக் கவனமாக ஆராய்ந்தால், பின்வரும் பொருள் விளக்கத்தைப் பெறலாம். t என்னும் நேரத்தில், வீசு

பாதையில், துகளின் நிலையும் (P) அத்துகள் விசையேதுமின்றி ஒரே சீரான இயக்கத்துடன் அதே நேர இடைவெளியில் தொடக்கத் தொடுவரைப் பார்வைக் கோட்டில் குறிப்பிட்ட நிலை (T) ஒன்றை அடைந்து, அந்த நேர இடைவெளியில் அப்புள்ளியிலிருந்து ஓய்வு நிலையில் புறப்பட்டு புவியீர்ப்பு விசையினால் அடைகின்ற நிலையும் ஒன்றாகும்.



படம் 4·22

ஏனெனில், ஒரு விசையும் செயல்படாமலிருந்தால், t என்னும் நேரத்தில், துகள் T என்னும் புள்ளியை அடைந்து படம் (4-22)-ல் காட்டியவாறு,

$\underline{OT} = \underline{v_0}\, t$ என்னும் இடப்பெயர்ச்சியைப் பெற்றிருக்கும். மேலும் அதன் எடை அதே நேரத்தில், அதை நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி $TP = g\frac{t^2}{2}$ என்னும் தொலைவுக்குத் தாழ்த்தி இருக்கும். அதாவது, துகள் T-யிலிருந்து, $\underline{TP} = -\frac{1}{2} g t^2 \underline{j}$ என்னும் மற்றொரு இடப்பெயர்ச்சியைப் பெற்றிருக்கும்.

எனவே, t என்னும் நேரத்தில், துகளின் நிலையை $\underline{v_0}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \underline{j}$ என்னும் விளைவுத்திசையி அறிவிக்கிறது. ஆனால், அதே நேரத்தில், துகளின் நிலைத்திசையி $\underline{OP} = r$ என்பதால்,

$$\underline{r} = \underline{v_0}\, t - \frac{1}{2}\, g t^2\, \underline{j}$$ என்றாகிறது.

இங்கு $\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j}$

$$\underline{v_0} = v_0 \cos\alpha\, \underline{i} + v_0 \sin\alpha\, \underline{j}$$

என்பதால், நிலைத்திசையிச் சமன்பாட்டின் எண்ணிப் பகிர்வுகளை இருபுறமும் ஒப்பிட,

$$x = v_0 \cos\alpha\; t$$

$$y = v_0 \sin\alpha\; t - \frac{1}{2} g t^2$$

என்னும் எண்ணிச் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம். இவற்றிலிருந்து t என்னும் துணை அலகை விலக்கிட,

$$y = v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} \right)$$

$$= x \tan\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}$$ ஆகும்.

இச்சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$x^2 - \frac{2 v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha\; x = - \frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha\; y}{g}$$

$$\left(x - \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \right)^2 = \frac{v_0^4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha}{g^2} - \frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha\; y}{g}$$

$$= \frac{-2 v_0^2 \cos^2\alpha}{g} \left(y - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \right)$$

அதாவது,

$$\left(x - \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \right)^2 = \frac{-2 v_0^2 \cos^2\alpha}{g} \left(y - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \right)$$

இச்சமன்பாடு,

$$\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \,,\; \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \right)$$

என்னும் உச்சியையும் (vertex), $\dfrac{2 v_0^2 \cos^2\alpha}{g}$ என்னும் செவ்வகலத்தையும் (Latus rectum) கொண்ட ஒரு பரவளையைக் குறிக்கும். அதன் அச்சு செங்குத்தாயும், கீழ்நோக்கியும் உள்ளது

[குறிப்பு : (i) படம் (4·21)-ல் V என்பது பரவளையின் உச்சிப்புள்ளியாகும்.

(ii) S என்னும் புள்ளி, குவியமாகுல் (focus)

$$vs = \frac{1}{4} \times \text{செவ்வகலம்.}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}\right)$$

$$= \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g}$$

(iii) செவ்வகலம் $= \dfrac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$ என்பதால்,

பரவளையத்தின் செவ்வகலமும், அதனுல் அதன் பருமனும், தொடக்கக் கிடைவேகத்தைச் சார்ந்திருக்கின்றன வென்றும், தொடக்க நிலைக்குத்து வேகத்தைச் சாரா என்பதும் கவனிக்கத் தக்கது.

(iv) V யிலிருந்து VY என்னும் நிலைக்கோட்டைக் கீழ்முகமாக வரைந்தால், பரவளைப்பாதை அக்கோட்டிற்கு இருபுறங்களிலும் ஒரே சீராக இருக்கும்.

(v) 5வது சமன்பாட்டில், $y = 0$ எனக்கொண்டால். $x = 0$,

$$\text{அல்லது } x = \frac{2u^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

$$= u^2 \frac{\sin 2\alpha}{g} \text{ என்பது கிடைக்கும்.}$$

$x = 0$ என்பது, பாதையிலமையும் தொடக்கப்புள்ளியைக் குறிக்கிறது. மற்ற மதிப்பான $x = \dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$ என்பது கிடைவீச்சு (horizontal range), OA ஐக் குறிக்கிறது.]

4·23-3. பறப்பு நேரத்தைக் காணுதல். (To find the total time of flight.)

பறப்பு நேரம் T ஆகுக. நிலைக்குத்து இயக்கத்தை,

$$y = v_0 \sin \alpha \, t - \frac{1}{2} g t^2$$

என்னும் சமன்பாடு வரையறுக்கின்றது.

எறிபொருள் கிடைத்தளத்தில் A என்னும் புள்ளியை அடையும்போது, அது நிலைக்குத்து திசையில் கடந்த தொலைவு பூச்சியமாகும்.

எனவே,

$$0 = v_0 \sin \alpha\, T - \frac{1}{2} g T^2,$$

அதாவது $T = 0$, அல்லது $T = \dfrac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

$T = 0$ என்பது தொடக்கத்தில் எறியப்படும் நேரத்தைக் குறிப்பதால், பறப்பு நேரமானது

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \text{ ஆகும்.}$$

4·23-4. எறிபொருள் அடையும் பெரும உயரம்.

துகள் மிகப்பெரிய தொலைவிலுள்ளதாகில், நிலைக்குத்துத் திசையில், முடிவு வேகம் பூச்சியமாகும். எனவே,

$v^2 = u^2 + 2fs$ என்னும் இயக்கச் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$0 = v_0^2 \sin^2 \alpha - 2g$ (y பெருமம்) என்பது கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad y \text{ பெருமம்} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

இதுவே உச்சிப்புள்ளியின் (V-ன்), y அச்சுத்தொலைவாகும்.

4·23-5. பெரும உயரத்தை அடையத் தேவையான நேரம்,

பெரும உயரத்தை அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் T_1 என்றால், $v = u + ft$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$0 = v_0 \sin\alpha - gT_1$ என்பது கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad T_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$T_1 = \frac{1}{2} T$ என்பதால், பறப்பு நேரம், மிக உயர்ந்த புள்ளிக்குச் செல்லும் நேரத்தின் இருமடங்காகும்.

4·23·6. எறிதானத்தின் வழியாகச் செல்லும் கிடைத் தளத்தின் மீது வீச்சைக் காணல்.

(இரண்டாவது வழி)

t நேரத்தில் துகள் கடந்த கிடை மட்டத் தொலைவு

$$x = v_0 \cos \alpha \; t$$

எனவே, $T = \dfrac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$ என்னும் பறப்பு நேரத்தில் கடந்த தொலைவு,

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$= 2 v_0^2 \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

அக்கணத்தில், துகள் A-யில் உள்ளதால், கிடைத்தளத்தில் எறிதுகளின் வீச்சு, $OA = R$ எனின்,

$$R = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

மேலும் $$R = \frac{2 (v_0 \cos\alpha)(v_0 \sin\alpha)}{g}$$

என்பதால் கிடை வீச்சானது, தொடக்கக்கிடை, நிலைக்குத்து வேகங்களின் பெருக்கத்தின் இரு மடங்கை g-ஆல் வகுத்துவரும் மதிப்பளவாகும்.

தவிரவும்,

$$R = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

$$= v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{g}$$

$$= 2 \left[v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{2g} \right]$$

எனவே கிடைத்தள வீச்சானது, உச்சிப்புள்ளியின் கிடைத் தொலைவின் இருமடங்காகும்.

4·23-7. கொடுக்கப்பட்ட எறிதிசைவேகம் ஒன்றிற்கு, துகளின் கிடைவீச்சையும், எறியும் திசையையும் காணுதல்.

கிடை வீச்சானது

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad \text{ஆகும்.}$$

v_0, g என்பவை மாறிலிகளானதால், R பெருமம மதிப்பைப் பெற, $\sin 2\alpha$ பெரும மதிப்பைப் பெறவேண்டும்.

$\sin 2\alpha$ என்பதின் பெரும மதிப்பு ஒன்றுகும். அது $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ அல்லது $\alpha = \frac{\pi}{4}$ என்னும்போது பெரும மதிப்பைப் பெறும்.

எனவே R பெரும மதிப்பைப் பெற, $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ ஆக இருக்கவேண்டும்

ஆதலால் கிடைவீச்சின் பெரும மதிப்பு $= \frac{v_0^2}{g}$ ஆகும்.

4·23-8. கொடுக்கப்பட்ட ஓர் எறித்திசை வேகத்தோடு, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கிடைவீச்சிற்கு இரு எறிதிசைகள் (Directions of projections) **உள்ளனவென்றும், இவை பெரும வீச்சிற்குரிய எறிதிசைக்குச் சமமாக சாய்ந்துள்ளனவென்றும் காணுதல்.**

v_0, R என்பவை கொடுக்கப்பட்ட எறிதிசை வேகம் கிடை விச்சு ஆகியவற்றை குறிக்கட்டும்.

அப்போது, $R = v_0 \frac{\sin 2\alpha}{g}$ என்பது,

$$\sin 2\alpha = \frac{gR}{v_0^2} = \text{ஒரு மாறிலியாகும்.}$$

$gR < v_0^2$ எனின் 2α – என்பது 180°ஐ விடக் குறைவாக இரு மதிப்புக்களைப் பெறும். $2\alpha_1$ என்பது ஒரு மதிப்பாயின், $(180 - 2\alpha_1)$ என்பது மற்றொரு மதிப்பாகும்.

$$\therefore \quad 2\alpha_2 = 180 - 2\alpha_1 \text{ ஆகும்.}$$

$$\alpha_2 = 90 - \alpha_1$$

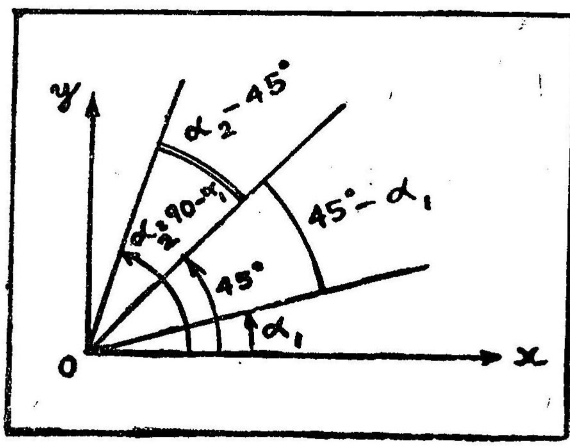
அல்லது $\alpha_2 - 45 = 45 - \alpha_1$ ஆகும்.

எனவே, இருதிசைகளும் உயர்வு வீச்சைத்தரும் திசையாகிய 45°க்கு சமச்சாய்வில் உள்ளன.

$gR = v_0^2$ எனின், 2α-க்கு ஒரே மதிப்புத்தான் உண்டு.

அதன் மதிப்பு $2\alpha = 90°$

அல்லது $\alpha = 45°$ ஆகும்.



படம் 4·23

இது v_0 என்ற எறிதிசை வேகத்திற்கு உயர்வீச்சைக் கொடுக்கக் கூடிய எறிகோணமாகும்.

$gR > v_0^2$ எனின், α-வானது உண்மை மதிப்பைப் பெறுது.

4·23-9 ஒரு குறிப்பிட்ட நேரம் கழிந்தபின், துகளின் திசைவேகத்தின் "எண்மதிப்பு" "திசை" ஆகியவற்றைக் காணுதல்.

t என்னும் நேரத்தில், துகளின் வேகமானது

$$\underline{v} = -gt\,j + \underline{v_0}$$

$$= v_0 \cos\alpha\, i + (v_0 \sin\alpha - gt)\,\underline{j} \quad \text{ஆகும்.}$$

எனவே $v^2 = (v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2$

$$= v_0^2 - 2v_0 g \sin\alpha \cdot t + g^2 t^2$$

∴ திசைவேகத்தின் எண்மதிப்பு

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g \sin\alpha \cdot t + g^2 t^2} \quad (1) \text{ ஆகும்.}$$

t என்னும் நேரத்தில்,

$\underline{v}$ என்னும் திசையி படம் (4·24 -ல் காட்டியவாறு கிடைத்திசையோடு θ என்னும் கோணச்சாய்விலிருக்குமெனில்,

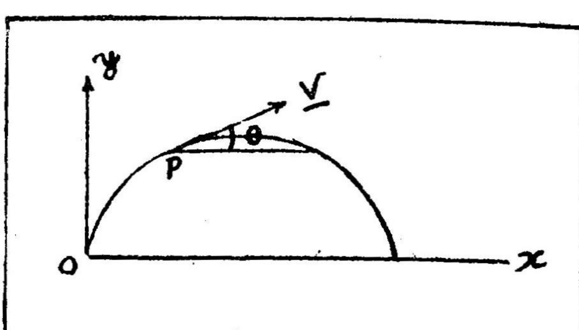
$$\tan\theta = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha} \quad (2) \text{ ஆகும்.}$$

(1), (2)-என்னும் சமன்பாடுகளில், $t = T = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ என எடுக்க,

$$v = \sqrt{v_0^2} = v_0$$

$$\tan\theta = -\tan\alpha = \tan(-\alpha)$$

$$\therefore \theta = -\alpha \text{ ஆகும்.}$$

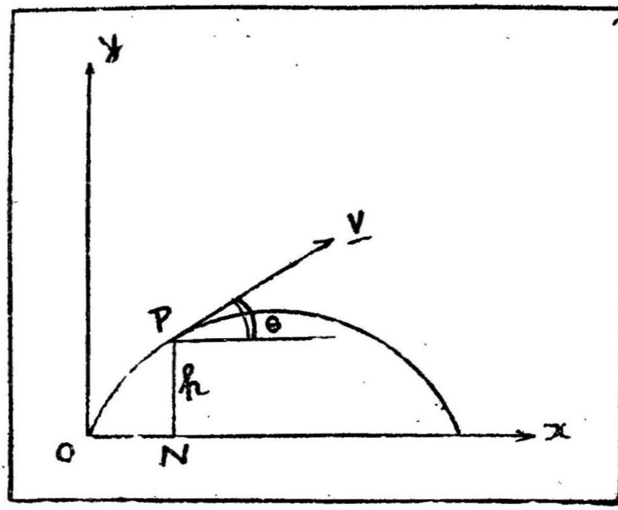


படம் 4·24

அதாவது, துகளானது கிடைத்தளத்தை A என்னும் புள்ளியில் கீழ்முகமாகத் தாக்கும்போது, அதன் திசைவேகம், தொடக்கத் திசைவேகத்தின் எண்மதிப்பிற்குச் சமமாக இருப்பதுடன், எறிகோணத்திற்குச் சமமான கோணத்தில் எதிர்த் திசையில் தரையைத் தாக்குகிறது.

4 23-10. எறிதானத்திலிருந்து, கொடுக்கப்பட்ட ஓர் உயரத்தில் துகளின் திசைவேகத்தைக் காணுதல்.

படம் (4·25)-ல் காட்டியவாறு, துகள் கொடுக்கப்பட்ட h என்னும் உயரத்தில் உள்ளபோது, அதன் திசைவேகம்



படம் 4·25

v எனவும், அது x அச்சுடன் θ என்னும் கோணச் சாய்வில் உள்ளதாகவும் கொள்க. துகளின் நிலைக்குத்து இயக்கத்தை நோக்குக. துகள் h உயரத்தில் உள்ளபோது,

$$v^2 \sin^2\theta = v^2 \sin^2 \alpha - 2gh \quad \text{ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad v \sin\theta = \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gh} \quad \text{ஆகும்.}$$

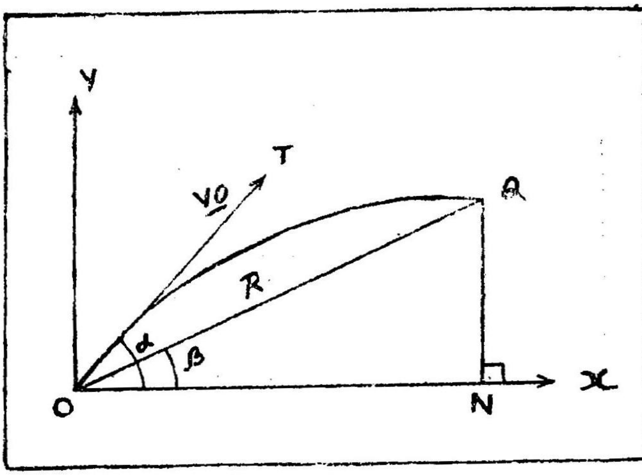
மேலும் கிடைத்திசையில், துகளின் இயக்கத்திற்குத் தடைவிசை ஒன்றும் இல்லாமையால், எப்போதும்,

$$v \cos\theta = v_0 \cos\alpha$$

எனவே, $$v = \sqrt{v_0^2 - gh}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gh}}{v_0 \cos\alpha} \quad \text{ஆகும்.}$$

4·24. எறிதானத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு சாய்தளத்தின் மீதுள்ள வீச்சைக் காணுதல்.



படம் 4·26

கிடைத்தளத்துடன் β என்ற கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் மிகப்பெரிய சாய்வுக்கோட்டின் (line of greatest slope) வழியாகச் செல்லும் செங்குத்துத் தளத்தில் கிடைமட்டக்கோட்டிற்கு α கோணச் சாய்வில் v_0 என்னும் திசை வேகத்துடன் ஒரு துகள் எறியப்படுவதாகக் கொள்க.

படம் (4.26)-ல், O என்பது எறிதளமாகுக.

துகள், சாய்தளத்தை Q என்னுமிடத்தில் தாக்கட்டும். OQ என்பது சாய்தளத்தின் மீதுள்ள வீச்சு ஆகும்.

O-வைத் தொடக்கப் புள்ளியாகவும். O-வழியாகச் செல்லும் கிடை மட்ட, நிலைக்குத்துக்கோடுகளை அச்சுகளாகவும் கொள்க.

இங்கும் துகளின் வீசுபாதையின் சமன்பாடு

$$y = x\tan\alpha - \frac{g\,x^2}{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha} \quad \text{ஆகும்.}$$

$OQ = R$ எனின், $Q\,(R\cos\beta,\ R\sin\beta)$ என்னும் புள்ளி இயங்குவரையிலுள்ளதால்,

$$R\sin\beta = R\cos\beta\tan\alpha - g\frac{R^2\cos^2\beta}{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha}$$

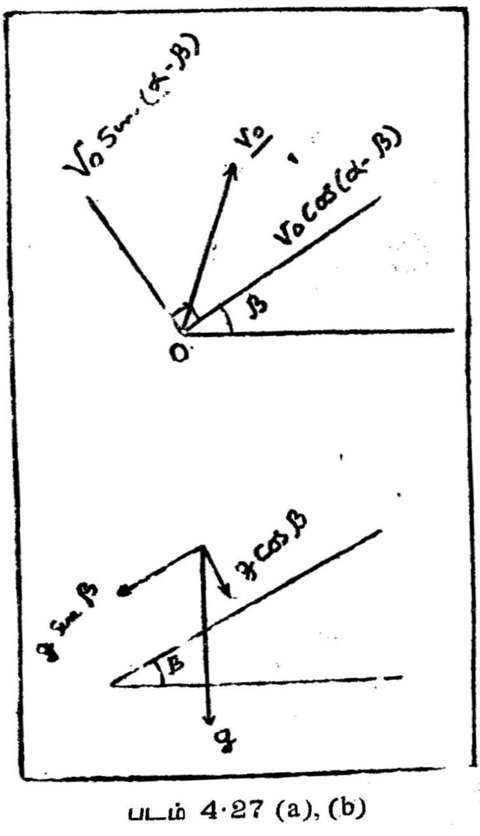
$$\text{அதாவது} \quad R = \frac{2v_0^{\,2}\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta} \quad \text{ஆகும்.}$$

[குறிப்பு : $\beta = 0$ எனின் கிடைவீச்சு

$$= \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \text{ ஆகும்.]}$$

மற்றொரு முறை :

தொடக்கத் திசைவேகத்தைச் சாய்தளத்திற்கு இணையான, மற்றும் அதற்குச் செங்குத்தான திசைகளில் பிரிக்க, அவைகள்



படம் 4·27 (a), (b)

$v_0 \cos(\alpha-\beta)$, $v_0 \sin(\alpha-\beta)$ என்றாகும். [படம் 4.27(a)-ஐப் பார்க்கவும்]

அவ்வாறே முடுக்கத்தின் பகிர்வுகள்

$$g \sin\beta,\ -g \cos\beta \text{ ஆகும்.}$$

[படம் 4.27(b)-ஐப் பார்க்கவும்]

துகள் O-விலிருந்து, Q-விற்குச் செல்ல எடுக்கும் நேரம் T ஆகுக. துகளின் இயக்கத்தை OQ விற்கு செங்குத்துத் திசையில் ஆராயும்போது, T என்னும் நேரத்தில், OQ விற்குச் செங்குத்துத் திசையில் சென்ற தொலைவு பூச்சியமாகும்.

எனவே, $O = v_0 \sin(\alpha - \beta) T - \frac{1}{2} g \cos\beta\, T^2$

$T \neq 0$ என்பதால்,

$$T = \frac{2v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos\beta} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

கிடைமட்டத்திசையில் துகளின் இயக்கத்திற்கு எவ்விதத் தடையுமில்லாததால், தொடக்கத்திலுள்ள கிடைமட்டத்திசை வேகம் $v_0 \cos\alpha$ மாறாதிருக்கும். எனவே T நேரத்தில் துகள் கடந்த கிடைமட்டத் தொலைவு,

$$ON = v_0 \cos\alpha\, T$$

$$= v_0 \cos\alpha \,.\, 2v_0 \frac{\sin(\alpha - \beta)}{g \cos\beta}$$

$$= 2v_0^2 \frac{\sin(\alpha - \beta)\cos\alpha}{g \cos\beta} \quad \ldots \quad (2)$$

எனவே, $R = OQ = ON \sec\beta$

$$= \frac{ON}{\cos\beta}$$

$$= \frac{2v_0^2 \sin(\alpha - \beta)\cos\alpha}{g \cos^2\beta} \quad \ldots \quad (3)$$

4 24-1. சாய்வுத் தளத்திலிருந்து எறிபொருளின் மிக உயர்வுத் தொலைவைக் காணல்.

சாய்வு தளத்திலிருந்து, துகள் மிக உயர்வுத் தொலைவிலுள்ள போது, அதற்குச் செங்குத்துத் திசையில், துகளின் முடிவு வேகம் பூச்சியமாகும். எனவே, சாய்தளத்திலிருந்து மிக உயர்வுத் தொலைவு Y எனின்,

$$O = v_0^2 \sin^2(\alpha - \beta) - 2g \cos\beta \,.\, Y$$

$$Y = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{2g \cos\beta}$$

4·24–2. சாய்தளத்தில் பெரும வீச்சைக்காணல்.

R என்பது சாய்தளத்தின் மீதுள்ள வீச்சு எனில்,

$$R = \frac{2v_0^2 \sin(\alpha - \beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta}$$

$$= \frac{v_0^2}{g\cos^2\beta}\left[\sin(2\alpha - \beta) - \sin\beta\right]$$

இங்கு v_0, β-என்பவை தெரிந்த கணியங்கள்.

எனவே R-ன் பெருமத்தைப் பெற, $\sin(2\alpha - \beta)$ என்பது மிகப்பெரிய மதிப்பை அடையவேண்டும். ஆனல் $\sin(2\alpha - \beta)$-வின் மிகப்பெரிய மதிப்பு ஒன்ருகும்.

அப்போது, $2\alpha - \beta = 90°$

அல்லது, $\alpha = 45° + \frac{\beta}{2}$ ஆகும்.

எனவே எறிகோணம் $45° + \frac{\beta}{2}$ என்ருல், சாய்தளத்திலமையும் வீச்சு பெருமத்தை அடையும்.

$$\therefore \text{ பெரும வீச்சு } = \frac{v_0^2}{g\cos^2\beta}(1 - \sin\beta)$$

$$= \frac{v_0^2}{g(1 + \sin\beta)}$$

மேலும் $2\alpha - \beta = 90°$ ஆகும்போது,

$$\alpha - \beta = 90 - \alpha$$

அதாவது $\hat{TOQ} = \hat{YOT}$

எனவே பெரும வீச்சுக்குரிய திசை, நிலைக்குத்துத்தளம், சாய்தளம் என்னும் இரண்டிற்குமிடையே உள்ள கோணத்தை இரு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும்.

4.24-3. கொடுக்கப்பட்ட எறிதிசை வேகத்துடன் கொடுக்கப் பட்ட ஒரு சாய்தள வீச்சுக்கு, ஏற்ப இரு திசைகள் உள. அவைகள் பெரும வீச்சுத் திசைக்குச் சமமாக சாய்ந்துள்ளன எனக் காணுதல்.

சாய்தளத்தில் வீச்சு,

$$R = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \beta} [\sin (2\alpha - \beta) - \sin \beta]$$

$$\therefore \quad \sin (2\alpha - \beta) = \frac{gR \cos^2 \beta}{v_0^2} + \sin \beta$$

இங்கு g, R, v_0, β என்பவைகள் குறிப்பிட்ட மதிப்பினைப் பெறுவதால்,

$\sin (2\alpha - \beta)$ என்பது ஒரு மாறிலியாகும்.

$\therefore$ $(2\alpha - \beta)$ என்பதற்கு $180°$-க்கு குறைந்த இரு மதிப்புக்கள் உண்டு. அவைகள் α_1, α_2 என்றால்,

$$\sin (2\alpha_1 - \beta) = \sin (2\alpha_2 - \beta)$$

$$\therefore \quad 2\alpha_1 - \beta = 180 - (2\alpha_2 - \beta)$$

$$\alpha_1 - \frac{\beta}{2} = 90 - \alpha_2 + \frac{\beta}{2}$$

$$\alpha_1 - \left(45 + \frac{\beta}{2}\right) = \left(45 + \frac{\beta}{2}\right) - \alpha_2$$

ஆனால் $45° + \frac{\beta}{2}$ என்னும் கோணம், பெரும சாய்தள வீச்சைப் பெறுவதற்கு உரிய திசையை வரையறுப்பதால், மற்ற இரு திசைகள் இத்துடன் சமமான கோணங்களை அமைக்கின்றன.

4·25. மாதிரிக்கணக்குகள்.

4 25-1. ஒரு துகளானது மட்டமான தரையில் (level ground), ஒரு புள்ளியிலிருந்து, வினாடிக்கு 84 மீட்டர் என்னும் திசை வேகத்தோடு, கிடைக்கோட்டுடன் 30° கோணச்சாய்வில் எறியப்படும். அது (1) அடைந்த மிகப்பெரிய உயரத்தையும் (2) பறப்பு நேரத்தையும் (3) கிடைத்தளத்தின் மீதுள்ள வீச்சையும் (4) 60 மீட்டர் உயரத்தில் இருக்கும்பொழுது அதன் திசை வேகத்தையும், இயக்கத் திசையையும் காண்க.

[g = 9·8 மீ/(வினாடி)^2 எனக் கொள்க.]

இங்கு $v_0 = 84$ மீ/வி, $\alpha = 30°$

(1) அடைந்த மிகப்பெரிய உயரம் $= \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$

$$= 84 \times 84 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{9 \cdot 8}$$

$= 90$ மீட்டர்கள்.

(2) பறப்பு நேரம் $= \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

$$= 2 \times 84 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{9 \cdot 8}$$

$= \dfrac{60}{7}$ வினாடிகள்.

(3) கிடைத்தளத்தின் மீதுள்ள வீச்சு $= \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

$$= 84 \times 84 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{9 \cdot 8}$$

$= 420\sqrt{3}$ மீட்டர்கள்.

(4) h உயரத்தில் திசைவேகம் v-எனின்,

$v^2 = v_0^2 - 2gh$ ஆகும்.

இங்கு $v_0 = 84$, $h = 60$ என்பதால்,

$$v^2 = 84 \times 84 - 2 \times 9 \cdot 8 \times 60$$

$$= 6048$$

$$v = \sqrt{6048}$$

$$= 12\sqrt{42}$$

$= 77 \cdot 772$ மீ/வினாடி

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{v_0 \sin^2\alpha - 2gh}}{v_0 \cos\alpha}$$

$v_0 = 84$, $h = 60$, $\alpha = 30°$ எனின்

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{84\times 84\times \frac{1}{2}\times \frac{1}{2} - 2\times 9{\cdot}8\times 60}}{84\times \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{7\sqrt{12}}{42\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \theta = 33^\circ\ 42'$$

4·25-2. கொடுக்கப்பட்ட கிடைவீச்சைக் கொண்டிருக்குமாறு எறியப்படும் ஒரு துகளின் மீச்சிறு ஆற்றல் (least energy) அத்துகளை, அவ்வீச்சின் பாதி அளவுக்குச் சமமான உயரத்திற்கு நிலைக்குத்தாக எடுத்துச் செல்லும் எனக்காட்டுக. துகளின் வேகம் v_0 எனவும், அதன் திசை கிடைக்கோட்டுடன் α கோணச் சாய்விலுள்ளது எனவும் கொள்க.

R என்பது கிடைத்தளத்தின் மீதுள்ள வீச்செனில்

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \text{ ஆகும்.}$$

$$v_0^2 = \frac{gR}{\sin 2\alpha}$$

$$\text{துகளின் ஆற்றல்} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$= \frac{1}{2}m\cdot\frac{gR}{\sin 2\alpha}$$

∴ துகளின் மீச்சிறு ஆற்றலானது, $\sin 2\alpha$ என்பது மிகப் பெரிய மதிப்பை பெறும்போது ஏற்படும். அப்போது

$$\sin 2\alpha = 1$$

அல்லது $\alpha = 45^\circ$ ஆகும்.

$$\text{மீச்சிறு ஆற்றல்} = \frac{m}{2}\times gR$$

மேலும் $v_0^2 = gR$

துகள் நிலைக்கோட்டில் மேல்முகமாக, h உயரம் செல்வதானால்,

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \quad \text{ஆகும்.}$$

இங்கு $h = \frac{gR}{2g} = \frac{R}{2}$ ஆகும்.

எனவே, துகள், கிடைவீச்சின் பாதி அளவுக்குச் சமமான உயரத்தை அடையக்கூடும்.

4·25-3. ஒரு துகள் விநாடிக்கு 14 மீட்டர் வேகத்தில் எறியப்பட்டு, கிடையாக 10 மீட்டர் தொலைவில் அடிப்பதாகில், துகளுக்கு இரு எறிதிசைகள் உள்ளன எனக்காண்பி.

தரப்பட்ட திசைவேகம் = 14 மீ/வி

தரப்பட்ட கிடைவீச்சு = 10 மீ

துகளானது α கோணச்சரிவில் எறியப்படுமாகில்,

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \text{ஆகும்.}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{gR}{v_0^2}$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \times 10}{14 \times 14}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$2\alpha = 30^\circ \quad \text{அல்லது} \quad 150^\circ$$

அல்லது $\alpha = 15^\circ$ அல்லது 75° ஆகும்.

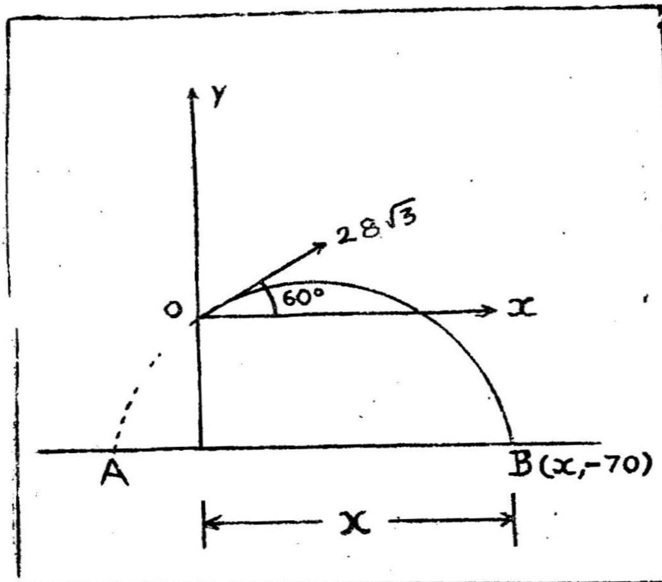
எனவே துகள், இரு எறிதிசைகளைப் பெற்றுள்ளது.

4·25-4. 70 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து விநாடிக்கு $28\sqrt{3}$ மீட்டர் திசைவேகத்தில் 60° ஏற்றத்தில் ஒரு பந்து எறியப்படுகின்றது. அக்கோபுரத்திலிருந்து அப்பந்து தரையை அடிக்கும் புள்ளியின் கிடைத்தொலைவு, திசைவேகம், இயக்கத்திசை ஆகியவற்றைக் காண்க.

இங்கு $v_0 = 28\sqrt{3}$,

$\alpha = 60^\circ$ ஆகும்.

துகள் தரையை $B(x_1 - 70)$ என்னும் புள்ளியில் படம் (4.28)-ல் காட்டியவாறு அடிக்கட்டும்.



படம் 4·28

இப்புள்ளி,

$$y = x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2\alpha}$$

என்னும் இயக்கப்பாதையில் உள்ளதாகையால்,

$$-70 = x \tan 60° - \frac{9 \cdot 8x^2}{2 \times 28 \times 28 \times 3 \times \cos^2 60°}$$

அதாவது,

$$-70 = x\sqrt{3} - \frac{x^2}{120}$$

அதாவது $x^2 - 120\sqrt{3}\, x - 8400 = 0$ ஆகும்.

$$x = \frac{120\sqrt{3} \pm 160\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ $x = -20\sqrt{3}$ அல்லது $x = 140\sqrt{3}$ ஆகும்.

$x = -20\sqrt{3}$ புறக்கணிக்கப்பட்டு.

$x = 140\sqrt{3}$ என்னும் மதிப்பு ஏற்கப்படும்

B என்னுமிடத்தில் துகளின் திசைவேகம் v எனவும், அது கிடைத்திசையுடன் θ கோணச்சரிவில் தரையை அடிப்பதாகவும் கொள்க.

$$\text{அப்போது} \quad v^2 = v_0^2 - 2gh$$
$$= 28 \times 28 \times 3 - 2 \times (9 \cdot 8) \times (-70)$$
$$= 2352 + 1372$$
$$= 3724$$
$$\therefore \quad v = 14\sqrt{19} \text{ மீ/வி}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh}}{v_0 \cos\alpha}$$

$$= \frac{\sqrt{28 \times 28 \times 3 \times \frac{3}{4} - 2 \times 9 \cdot 8 \times (-70)}}{28 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{2/3}$$

$$\therefore \quad \theta = 39^\circ 13'.$$

4·25-5. ஓர் எறிபொருளின் கிடைத்தளவீச்சு $1960\sqrt{3}$ மீட்டர்கள். அது காற்றில் இருக்கும் நேரம் 20 விநாடிகள் எனின், அதன் தொடக்க திசைவேகத்தின் அளவையும், திசையையுங் காண்க.

$$\text{இங்கு} \quad R = 1960\sqrt{3} \text{ மீட்டர்கள்.}$$
$$T = 20 \text{ விநாடிகள்.}$$
$$R = v_0 \cos\alpha \,.\, T$$
$$1960\sqrt{3} = (v_0 \cos\alpha)\, 20$$
$$v_0 \cos\alpha = 98\sqrt{3}$$
$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$
$$\therefore \quad v_0 \sin\alpha = \frac{gT}{2}$$
$$= \frac{9 \cdot 8 \times 20}{2}$$
$$= 98.$$

1970-71இல் மொத்தத்தில் இலாபம் ஈட்டின. 1969-70 இல் மத்திய கூட்டுறவு வங்கிகள் ஈட்டிய இலாபம் ரூ. 9·12 கோடி. 1970-71இல் ரூ. 9·08 கோடியாகச் சிறிதே குறைந்து நின்றது.

மத்திய வங்கிகள் செயற்பாட்டில் காணப்படும் குறைபாடுகளும் அவற்றை நீக்கலும்:

மத்திய வங்கிகள் உள்ளபடியே மாவட்ட அளவில் கூட்டுறவுத் துறையின் தலைமையிடம் போன்ற பெருமையுடன் செயலாற்றும் உரமும், வலிமையும், திறனும், திண்மையும் பெற்றுத் திகழ வேண்டும் என்ற அடிப்படையில்தான் மாவட்டத்துக்கொரு மத்திய வங்கி என்ற கொள்கை ஏற்கப்பட்டது. ஏட்டளவில் இக்கொள்கை செயல்படுத்தப்பட்ட போதிலும், உண்மையில் மத்திய வங்கிகள் மாவட்டக் கூட்டுறவு இயக்கத்தின் தலைமைப்பீடமாகக் கருதப்படும் நிலை பல இடங்களில் உருவாகவில்லை.

பிரதம சங்கங்களை மேற்பார்வை செய்யும் பொறுப்புக் கூட்டுறவு மத்திய வங்கியைச் சார்ந்ததே. இதற்கு வேண்டிய மேற்பார்வை அலுவலர்களை மத்திய வங்கி தானே நியமித்து அவர்கள் வழி தன்னுடன் இணைந்த சங்கங்களை மேற்பார்வை செய்யவேண்டும்.

பல காலமாக மத்திய வங்கிகள் வைப்புகளைத் திரட்டுவதில் அக்கறை செலுத்தவில்லை. அண்மையில் ரிசர்வு வங்கி ஒவ்வொரு மத்திய வங்கியும் குறிப்பிட்ட ஓர் அளவு வைப்புகளைத் திரட்டினால் மட்டுமே சலுகை வட்டி விகிதத்தில் தரப்படும் கடன் வசதிகளைப் பெறும் தகுதிபெறும் என்று புதியதொரு விதியை உருவாக்கியதன் காரணமாக இவ் வங்கிகள் வைப்புகளைத் திரட்ட முயற்சிகளை மேற்கொண்டுள்ளன. பொதுமக்களை ஈர்த்து வைப்புகளை அவர்களிடமிருந்து திரட்ட வங்கிகள் வாடிக்கையருக்குப் பல்வகைப் பணிகளை அளிக்கவேண்டும். இதிலும் கூட்டுறவு மத்திய வங்கிகள் மிகுதியான ஈடுபாடு காட்டவில்லை.

எல்லோராலும் மிகவும் சிறந்தது; விரும்பத்தக்கது என்று பாராட்டப்பட்டு ஏற்கப்பட்ட பயிர்க் கடன் திட்டத்தைச் சரியாகப் பல மத்திய வங்கிகள் செயல்படுத்தவில்லை. நேரத்தில் கடன் கொடுத்து நேரத்தில் வசூலிப்பது என்பது சில வங்கிகளில் மட்டுமே காணக்கிடக்கும் நிகழ்ச்சியாக அமைந்துள்ளது. கடன் வழங்குவதிலுள்ள சுற்றி வளைக்கும் நடைமுறை காரணமாக எல்லா நிலைகளிலும் தாமதம் ஏற்படுகின்றது. காலங் கடந்து கிடைக்கும் கடனை விவசாயிகள் வேளாண்மயல்லாத பிற நோக்

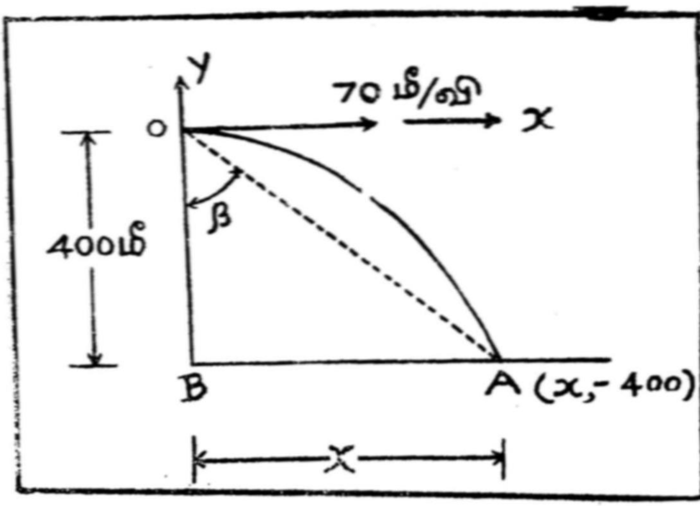
கங்களுக்குப் பயன்படுத்திவிடுகின்றனர். இதனல் விவசாயியின் திருப்பிச் செலுத்துந் திறன் குறைந்து கடனைத் திருப்பிச் செலுத்த வேண்டிய நேரத்தில் தவணை தவறிய கடனாளியாக நிற்கிருர். இதன் விளைவாக வங்கியின் தவணை தவறிய கடன் அளவு ஆண்டுக்கு ஆண்டு உயர்ந்து செல்லுகின்றது. இந்த நிலை மாறவேண்டும். பல வங்கிகளில் குறித்த காலத்தில் பணம் வசூலிக்கப்பட்டது போலவும் சில நாட்கள் கழித்துப் புதிய கடன் வழங்கப்பட்டது போலவும் புனை பதிவுகளைக் கணக்கில் காட்டித் தவணை தவறி நிற்கும் உண்மை நிலையை மறைக்கின்றனர் என்று கூறப்படுகிறது. இது கூட்டுறவு இயக்கத்தின் மேம்பாட்டுக்கும் வளர்ச்சிக்கும் ஊறு விளைவிக்கும் புற்று நோயாகும். இந்தத் தவருன முறைகளைக் கையாண்டுக் குறைகளை மறைத்து வைத்தால் நாளடைவில் நோய் முற்றித் தீராத பாடாகிவிடும்.

தமது நிதிகளை மத்திய வங்கிகள் சரியான முறையில் முதலீடு செய்வதில்லை என்ற குறையும் அடிக்கடிச் சுட்டிக்காட்டப் படுகிறது. வங்கிய ஒழுங்காற்றுச் சட்டப் (Banking Regulation Act) படிக் குறிப்பிட்ட விகித அளவு (கேட்பு, தவணைப் பொறுப்புகளில் இத்தனைச் சதவிகிதம் என்று) எளிவரல் சொத்துகள் (liquid assets) ரொக்கக் காப்பு (Cash reserve) முதலியவை வைத்திருப்பது போக மீதி தொகையை நல்ல வகையில் முதலீடு செய்வது அவசியம். கூட்டுறவு நிறுவனங்களின் நிதிகள் கூட்டுறவு இயக்கத்துக்குள்ளேயே முதலீடு செய்யப்பட வேண்டுமென்ற கொள்கையை எல்லோரும் ஏற்கின்றனர்; வற்புறுத்துகின்றனர். ஆனல், சில மத்திய வங்கிகள் கணிசமான தொகையை வாணிக வங்கிகளில் கேட்பு அல்லது அழைப்பு வைப்புகளில் வைத்திருக்கின்றனர். மற்றும் சில வங்கிகள் செல்வாக்குள்ள இயக்குநர்களின் வற்புறுத்தலின் பேரில் புதிய நிறுவனங்களில், அவற்றின் வெற்றிவாய்ப்பைக் கருதாது, முதலீடு செய்கின்றன. சில வங்கிகள் பெருமளவு தொகையினைக் கூட்டுறவு நூற்பு ஆலை, சர்க்கரை ஆலைபோன்ற நிறுவனங்களில் பங்குகள் எடுக்கப் பயன்படுத்தியுள்ளன.

பொதுவாக மத்திய வங்கிகளின் நிருவாகம் செய்திகளறிந்த வல்லுநர்கள் வசமுள்ளது என்று கூறுவது அரிது. நிருவாகக் குழுவில் பெரும்பாலோர் அரசியல் தொடர்புள்ளவர்களாயிருக்கின்றனர். இவர்களுக்கு வங்கியின் முன்னேற்றம் குறித்துச் சிந்தித்துச் செயல்பட வாய்ப்பு மிகுதி இருப்பதில்லை. ஊழியர் வேலை சேர்ப்பு, பதவி உயர்வு, பயிற்சி போன்ற செய்திகள் குறித்துத் திட்டவட்டமான கொள்கைகள் இருப்பதில்லை. இதனல் ஊழியர்களிடையே உற்சாகமும் ஊக்கமும் குறைந்து திறம்படச் செயலாற்றும் திற

$A\ (x_1 - 400)$ என்னும் புள்ளி

$$y = x \tan\alpha - \frac{g^2 x^2}{2u^2 \cos^2\alpha}$$



படம் 4·29

என்னும் இயங்குவரையில் உள்ளதால்,

$$-400 = 0 - \frac{9{\cdot}8x^2}{2 \times 70 \times 70 \times 1}$$

அதாவது $$x^2 = \frac{400 \times 2 \times 70 \times 70}{9{\cdot}8}$$

$$= 400{,}000$$

$$\therefore \quad x = 200\sqrt{10} \text{ மீ}$$

4·25-8. மேலே சொல்லப்பட்ட (4·25-7) என்னும் கணக்கில் (1) குண்டு விடுவிக்கப்படும்போது, விமானத்தையும் இலக்கையும் சேர்க்கும் தொடக்கப் பார்வைக்கோடு (Initial line of sight), நிலைக்குத்துக்கோட்டுடன் தாங்கும் β என்னும் கோணத்தைக் காண்க.

(2) குண்டு இலக்கை அடிக்கும் தருணத்தில், விமானம் எவ்விடத்திலிருக்கும் ?

$$(1)\quad \tan\beta = \frac{BA}{BO} = \frac{200\sqrt{10}}{400} = 1{\cdot}581$$

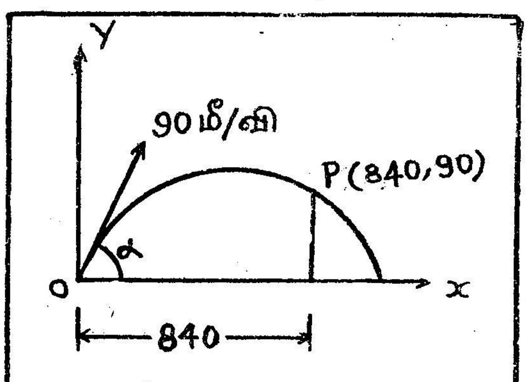
$$\therefore \qquad \beta = 57^\circ\ 41'$$

(2) விமானம் இயங்கும் கிடைத்திசையில், எவ்விதத் தடை விசையுமில்லாமையால், அது மணிக்கு 252 கி.மீட்டர் வேகத்தி லேயே குண்டு இலக்கை அடிக்கும் தருணத்தில் அதனுடைய உச்சிக்கு நேராகப் பறந்து கொண்டிருக்கும்.

4·25-9. துப்பாக்கி ஒன்று விநாடிக்கு 98 மீட்டர் என்னும் முகப்பு வேகத்துடன் (muzzle velocity) எத்திசையில் ஒரு குண்டைச் சுட்டால், அது 840 மீட்டர் தொலைவில், 90 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியில் வைக்கப்பட்டிருக்கும் ஓர் இலக்கை அடிக்கும் எனக் காண்க.

வீசுபாதையின் சமன்பாடு

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha}$$



படம் 4·30

படம் (40·30)-ல் காட்டியவாறு, $P(840,\ 90)$ என்னும் புள்ளி பாதையில் உள்ளதால்,

$$90 = 840\tan\alpha - \frac{9{\cdot}8\times 840\times 840}{2\times 98\times 98\times\cos^2\alpha}$$

அதாவது $90 = 840\tan\alpha - 360\,(1+\tan^2\alpha)$

அதாவது $3 = 28\tan\alpha - 12\,(1+\tan^2\alpha)$

அதாவது $12\tan^2\alpha - 28\tan\alpha + 15 = 0$

$$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{28 \pm \sqrt{28\times 28 \times - 4\times 12\times 15}}{24}$$

$$= \frac{28 \pm 8}{24}$$

$$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{36}{24} \text{ அல்லது } \frac{20}{24}$$

$$= \frac{3}{2} \text{ அல்லது } \frac{5}{6}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \text{ அல்லது } \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$= 56^\circ\ 19' \text{ அல்லது } 39^\circ\ 48'$$

4·25-10. இரு இணையான சுவர்களின் உச்சிகளை உராய்ந்து செல்லுமாறு ஒரு பந்து எறியப்படுகின்றது. முதல் சுவர் "a" உயரமுள்ளதாயும், எறிதானத்திலிருந்து "b" தொலைவிலும் உள்ளது. இரண்டாவது சுவர் 'b' உயரமுடையதாயும் எறிதானத்திலிருந்து 'a' தொலைவிலும் உள்ளது. பந்தின் பாதை இரு சுவர்களுக்கும் நேர்க்குத்தான தளத்தில் அமையுமாயின், கிடைத்தளத்தில் பந்தின் வீச்சைக் காண்க. எறிகோணம், $\tan^{-1}(3)$ ஐ விட அதிகமானது எனக் காட்டுக.

வீசுபாதையின் சமன்பாடு

$$y = x\tan\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} \text{ ஆகும்.}$$

படம் (4.31)-ல் காட்டியவாறு, (b, a), (a, b) என்னும் புள்ளிகள் இப்பாதையில் உள்ளன. எனவே,

$$b = a\tan\alpha - \frac{g a^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} \qquad (1)$$

$$a = b\tan\alpha - \frac{g b^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} \quad \cdots \qquad (2)$$

கிடைத்தளத்தில் பந்தின் வீச்சு, R எனில்,

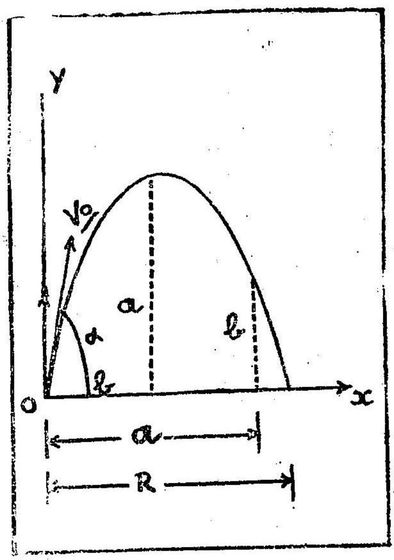
$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha \tan\alpha}{g}$$

$$\therefore \quad 2 v_0^2 \cos^2\alpha = \frac{gR}{\tan\alpha} \quad \cdots \qquad (3)$$

∴ (1)வது சமன்பாடு,

$$b = a \tan \alpha - \frac{g a^2 \tan \alpha}{g R}$$

$$= a \tan \alpha \left(\frac{R - a}{R} \right) \quad \ldots \quad (4)$$



படம் 4 31

இதேபோல்,

$$a = b \tan \alpha \left(\frac{R - b}{R} \right) \text{ ஆகும்.} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

∴ 4 ÷ 5 என்பது,

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(R - a)}{(R - b)} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $R(a^2 - b^2) = a^3 - b^3$

$$\therefore \quad R = \frac{a^2 + ab + b^2}{(a + b)} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

மேலும் $\tan \alpha = \dfrac{aR}{b(R-b)}$

$$= \frac{a(a^2+ab+b^2)(a+b)}{b(a+b)(a^2+ab+b^2-ab-b^2)}$$

$$= \frac{a^2+ab+b^2}{ab}$$

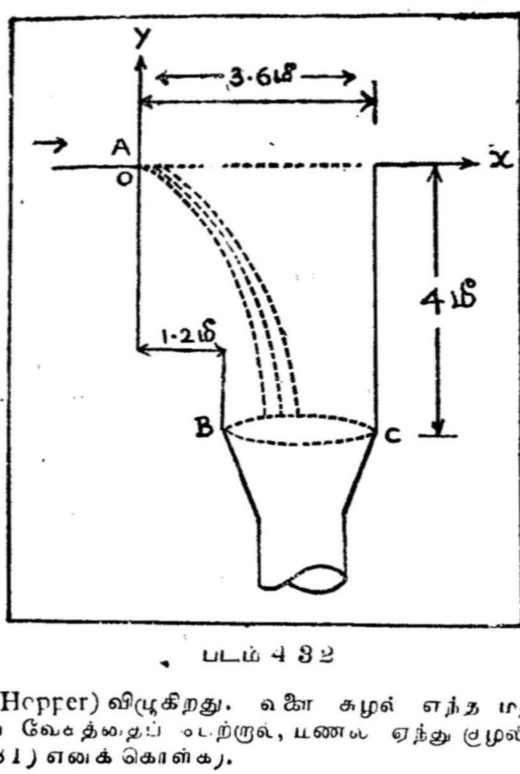
$$= \frac{(a-b)^2+3ab}{ab}$$

$$= 3 + \frac{(a-b)^2}{ab}$$

$$> 3 \qquad (\because\ a, b > 0,\ (a-b)^2 > 0)$$

$\therefore\ \alpha > \tan^{-1}(3)$ ஆகும்.

4·25-11. கிடையாக இயங்கிச் செல்லும் வளை சுழல் (conveyer belt) மூலமாக மணலானது, A என்னுமிடத்தில் விடுவிக்கப்பட்டு படம் (4·32)-ல் காட்டியவாறு, BC என்னும் ஏந்து



படம் 4 32

குழலில் (Hopper) விழுகிறது. வளை சுழல் எந்த மதிப்புகளுக்கு இடையே வேகத்தைப் பெற்றால், மணல் ஏந்து குழலில் விழும் ? ($g = 9·81$) எனக் கொள்க).

விடுவிக்கப்பட்ட மணல் $B(1\cdot2, -4)$, $C(3\cdot6, -4)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கு இடையில் விழவேண்டி வருகிறது. மணல் B-க்குப் பின்பாக விழாமலிருப்பதற்கு உரிய மிகச்சிறிய வேகத்தை u_1 எனவும், C-க்கு அப்பால் விழாமலிருப்பதற்கு உரிய மிகப் பெரிய வேகத்தை u_2 எனவும் கொள்க; எனவே, மணலின் திசைவேகமானது,

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2$$

என்றிருக்கவேண்டும்.

$B(1\cdot2, -4)$, $C(3\cdot6, -4)$ என்னும் புள்ளிகள்

$$y = x \tan\alpha - \frac{g x^2}{2u^2 \cos^2\alpha}$$

என்னும் வீசுபாதையில் இருக்குமெனில்

$$-4 = -\frac{9\cdot81 \times (1\cdot2)^2}{2{u_1}^2}$$

$${u_1}^2 = \frac{9\cdot81 \times (1\cdot2)^2}{8}$$

$$u_1 = \frac{1\cdot2}{2}\sqrt{4\cdot905}$$

$$= 0\cdot6 \times 2\cdot215$$

$$= 1\cdot3290$$ மீ/வி என்றும்,

$$-4 = \frac{9\cdot81 \times (3\cdot6)^2}{2{u_2}^2}$$

$${u_2}^2 = \frac{9\cdot81 \times (3\cdot6)^2}{8}$$

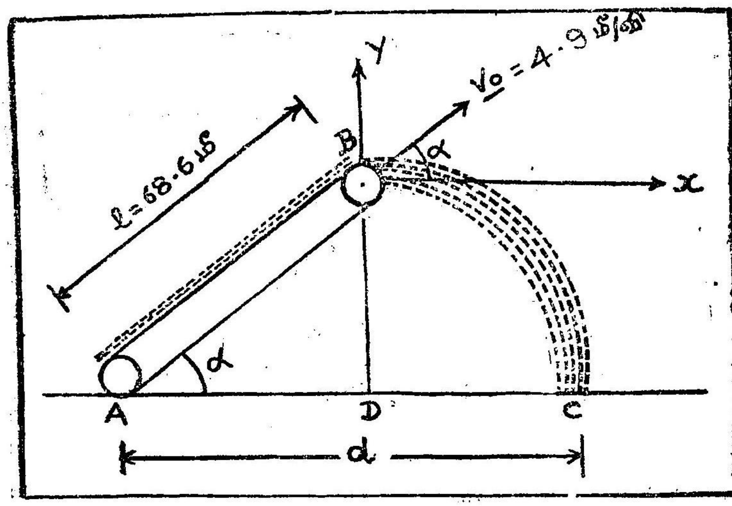
$$u_2 = \frac{3\cdot6}{2}\sqrt{4\cdot905}$$

$$= 1\cdot8 \times 2\cdot215$$

$$= 3\cdot9870$$ மீ/வி என்றும் ஆகும்.

4·25-12. 68·6 மீட்டர் நீளமுள்ள AB என்னும் வளைசுழல் (Conveyer belt) A என்னுமிடத்தில் அமைத்துள்ள பிணையல் (hinge) ஒன்றில் படம் (4.33)-ல் காட்டியவாறு பொருத்தப்பட்டு, கிடைத்தளத்துடன் எவ்வித கோணச்சரிவையும் பெறத்தக்கதாக

உள்ளது. வளைசுழல் விநாடிக்கு 4·9 மீ என்னும் சீரான வேகத்துடன் இயங்குகிறது. தானிய மணிகள் அவ்வளை சுழல் மூலமாகச் செலுத்தப்பட்டு, B-யில் அவைகள் தானாகவே இயங்குமாறு விடப்பட்டு C-ஐ அடைகின்றன. A-க்கும் C-க்கும் இடையே உள்ள தொலைவின் உச்ச மதிப்பையும் அதற்கேற்ற கோணச் சரிவையும் காண்க.



படம் 4·33

B யை தொடக்கப் புள்ளியாகவும், B யின் வழியே வரையும் கிடை, நிலைக்கோடுகளை முறையே x, y அச்சுக்களாகவும் கொள்க. AB, என்னும் வளைகுழல், கிடைத்தளத்துடன் α என்னும் கோணச் சரிவைப் பெற்றுள்ளதாகக் கொள்க. அப்போது, தானிய மணிகள் ஒவ்வொன்றும், B-யிலிருந்து, v_0 என்னும் திசைவேகத்தையும், α என்னும் எறிகோணத்தையும் பெற்று இயங்குகிறது

தானியத்தின் கிடைத்திசையியக்கம்

$$x = v_0 \cos \alpha \, t$$

என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

தானியம் B-யிலிருந்து C ஐ அடைய எடுத்த நேரம் t எனில்,

$$DC = d - l \cos \alpha = v_0 \cos \alpha \, t \quad \text{ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \cos \alpha = \frac{d}{l + v_0 t} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

தானியத்தின் நிலைக்குத்துத் திசையில் இயக்கம்

$$y = v_0 \sin \alpha \, t - \frac{1}{2} g t^2$$

என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

$$BD = -l \sin \alpha = V_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\therefore \quad \sin \alpha = \frac{g t^2}{2(l + v_0 t)} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ என்பதைப் பயன்படுத்த,

$$d^2 = (l + v_0 t)^2 - \frac{g^2}{4} t^4 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

ஆகும்.

d ஆனது t யின் சார்பலனாகிறது.

இங்கு $l = 68 \cdot 6$ மீட்டர்

$v_0 = 4 \cdot 9$ மீ/வினாடி

$g = 9 \cdot 8$ மீ/(வினாடி)^2

$$\therefore \quad d^2 = (68.6 + 4 \cdot 9t)^2 - \frac{(9 \cdot 8)^2}{4} t^4$$

$$= (4 \cdot 9)^2 \left((4 + t)^2 - t^4 \right) \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$\therefore \quad 2d \frac{d\text{“}d\text{”}}{dt} = (4 \cdot 9)^2 \left\{ 2(14 + t) - 4t^3 \right\}$$

$$= 2(4 \cdot 9)^2 \left(14 + t - 2t^3 \right) \quad \dots \quad (5)$$

d யின் மதிப்பு பெருமத்தைப் பெற,

$\frac{d\text{“}d\text{”}}{dt} = 0$ என்றாக வேண்டும்.

$$\therefore \quad 14 + t - 2t^3 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

$t = 2$ என்பது இச்சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு ஆகும். ... (7)

∴ (5)-வது சமன்பாட்டிற்கு மறுமுறை t-யில், வகைக் கெழுவைக் காண,

$$2d \cdot \frac{d^2 \text{``}d\text{''}}{dt^2}\Bigg|_{t=2} + 0 = 2\,(4\cdot9)^2\,(1 - 6t)\Bigg|_{t=2} < 0$$

$t = 2$ என்பது, d-யின் மதிப்பைப் பெருமமாக்கும்.

$$\text{``}d\text{''}\text{-யின் பெருமதிப்பு} = 98\sqrt{\frac{3}{5}} \text{ மீட்டர்.}$$

அப்போது எறிகோணமானது $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4} = 0\cdot9682$ என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

$$\therefore \quad \alpha = 14^\circ\, 19'.$$

4·26 பயிற்சி

4·26-1. ஒரு துகள், நேரம் $t = 0$ வினாடியிலிருந்து, $t = 3$ வினாடி வரை $\underline{v} = 1\cdot2t\,\underline{i} - t^2\,\underline{j}$ என்னும் திசைவேகத்துடன் இயங்குகிறது. அத்துகளின் இடப்பெயர்ச்சி யாது ?

[விடை : $\dfrac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v} = 1\cdot2t\,\underline{i} - t^2\,\underline{j}$

$$\therefore \quad \underline{r} = \int_{t=0}^{t=3} \left(1\cdot2t\,\underline{i} - t^2\,\underline{j}\right) dt$$

$$= \left[\, 1\cdot2\,\frac{t^2}{2}\,\underline{i} - \frac{t^2}{3}\,\underline{i} \,\right]_{t=0}^{t=3}$$

$$= 5\cdot4\,\underline{i} - 27\,\underline{j}$$

4·26-2. 32 மீட்டரைக் கிடை வீச்சாகக் கொண்டிருக்கும்படி எறியப்படும் ஒரு துகளின் வேகம் வினாடிக்கு 28 மீட்டர் எனில் அதன் எறிகோணத்தைக் காண்க.

($g = 9\cdot8$ மீ/வி^{2} எனக் கொள்க)

[விடை : $\alpha_1 = 11^\circ\, 47\cdot5'$, $\alpha_2 = 78^\circ\, 1\cdot25'$]

4·26-3. தந்ததோர் எறிதிசை வேகத்தோடு, தந்ததொரு கிடை வீச்சிற்குரிய இருபாதைகளின் மிகப் பெரிய உயரங்கள் முறையே H_1, H_2 எனில்,

$$R = 4\sqrt{H_1 H_2}$$ எனக் காட்டுக.

4·26-4. ஒரு கல்லானது $\sqrt{2gh}$ என்னும் திசை வேகத்தோடு h உயரத்திலுள்ள ஒரு கோபுரத்தினது உச்சியிலிருந்து கிடையாக எறியப்படுகின்றது. அது கோபுரத்தின் அடி வழியாகச் செல்லும் மட்டமான தரையை எங்கு தாக்குமென்று காண்க. அது தாக்கும் வேகம் என்ன ?

(விடை : $2h$; $2\sqrt{gh}$)

4·26-5. ஒரு மனிதன் ஒரு பந்தை நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி 56 மீட்டர் உயரத்திற்கு எறியக்கூடுமானால், அதை அவன் எவ்வளவு மிகப்பெரிய கிடைத் தொலைவிற்கு எறியக்கூடு மெனக் காண்க.

[விடை : 112 மீ

4·26-6. 150 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு குன்றின் உச்சியி லிருந்து விநாடிக்கு 284 மீட்டர் என்னும் வேகத்தோடு $30°$ ஏற்றத்தில் ஒரு ரவை, துப்பாக்கியிலிருந்து சுடப்படுகிறது. சுடப் பட்ட புள்ளியின் வழியே செல்லும் நிலைக்குத்துக்கோட்டிலிருந்து அந்த ரவை, குன்றினது அடிப்பாகத்திலிருக்கும் நீரை அடிக்கும் புள்ளியின் கிடைத்தூரத்தைக் காண்க. அது எப்போது நீரை அடிக்கும் என்பதையும் காண்க.

(காற்றின் தடை புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்க)

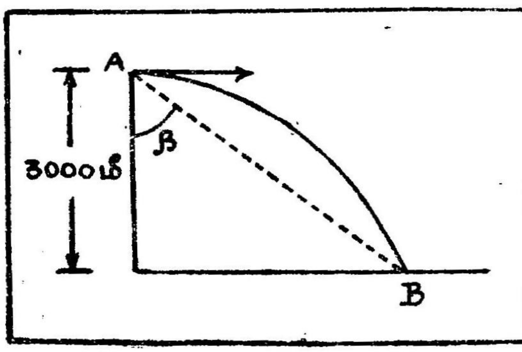
[விடை : $4260\sqrt{3}$ மீட்டர், 30 விநாடிகள்]

4·26-7. தரையில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து துப்பாக்கி விநாடிக்கு 300 மீட்டர் என்னும் முகப்பு வேகத்துடன் ஒரு குண்டைச் சுடுகிறது. அக்குண்டு எறிதானத்திலிருந்து 4000 மீட்டர் தொலைவிலும், 200 மீட்டர் உயரத்திலும் உள்ள ஓர் இலக்கை அடிக்குமாயின், துப்பாக்கியின் ஏற்றகோணம் யாது ?

[விடை : $\alpha_1 = 15° 38'$ அல்லது $\alpha_2 = 77°$]

4·26-8. ஒரு வெடிகுண்டு விமானம், 3000 மீட்டர் உயரத்தில் மணிக்கு 500 கி. மீட்டர் வேகத்தில் படம் (4.34)-ல் காட்டியவாறு கிடையாக ஒரு நேர்கோட்டில் செல்கிறது.

(i) தரையிலுள்ள ஓர் இலக்கை (B)ச்சரியாக அடிக்கும் வண்ணம் அந்த இலக்கைக் கடப்பதற்கு எவ்வளவு தொலைவிற்கு முன்னால் விமானத்திலிருந்து குண்டு விடுவிக்கப்படவேண்டுமெனக் காண்க.



படம் 4·34

(ii) குண்டு விடுவிக்கப்படும்போது விமானத்தையும் இலக்கையும் சேர்க்கும் தொடக்கப் பார்வைக்கோடு, நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன் அமைக்கும் β என்னும் கோணத்தைக் காண்க.

[விடை : (i) 3435 மீ, $\beta = 41° 8'$]

4.26-9. h மீட்டர் உயரத்தில், வினாடிக்கு v_0 மீட்டர் வேகத்தில் கிடையாக ஒரு நேர்கோட்டில் செல்லும் விமானத்திலிருந்து அஞ்சல் கட்டு (bundle of mail) ஒன்று விடுவிக்கப்படுகின்றது. அது எப்போது, எங்கே தரையை அடிக்குமென்றும், அது தரையை அடிக்கும்போதுள்ள திசை வேகத்தினளவையும், திசையையும் காண்க.

[விடை : $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $x = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$,

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2gh}{v_0}\right)$]

4·26-10. 60 மீட்டருக்கு அப்பாலுள்ள 30 மீட்டர் உயரமான ஒரு சுவரின் உச்சிக்கு மேலாக தடவலாகக் கிடைத்திசையில் செல்லும் ஒரு ரவையினுடைய திசை வேகத்தையும், எறி திசையையும் காண்க. ($g = 9 \cdot 81$ மீ/வி^{2})

(விடை : $v_0 = 108 \cdot 5$ மீ/வி ; $\alpha = 45°$)

4·26-11. 51 மீட்டர் உயரமான ஒரு கோட்டைக் கோபுர உச்சியைக் கிடையாக அடிக்குமாறு ஒரு துப்பாக்கி ரவை சுடப்படுகிறது. எறிகோணம் $\cot^{-1}(4)$, எறிதிசைவேகம் சுமார் 130·4 மீ/வினாடி எனக்காட்டுக.

($g = 9 \cdot 81$ மீ/வி^{2})

4·26-12. தரையிலிருந்து கிடைமட்டத்துடன் $\tan^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)$ என்னும் கோணச் சாய்வில் எறியப்பட்ட துகள் ஒன்று எறிதானத்திலிருந்து கிடைதளத்தில் 48 மீட்டர் தொலைவில் இருக்கும் 21 மீட்டர் உயரமுள்ள கோபுர உச்சியைத் தடவலாகத் தாண்டிச் செல்கிறது. துகளின் எறிதிசை வேகம் என்ன?

($g = 9 \cdot 81$ மீ/வி^{2})

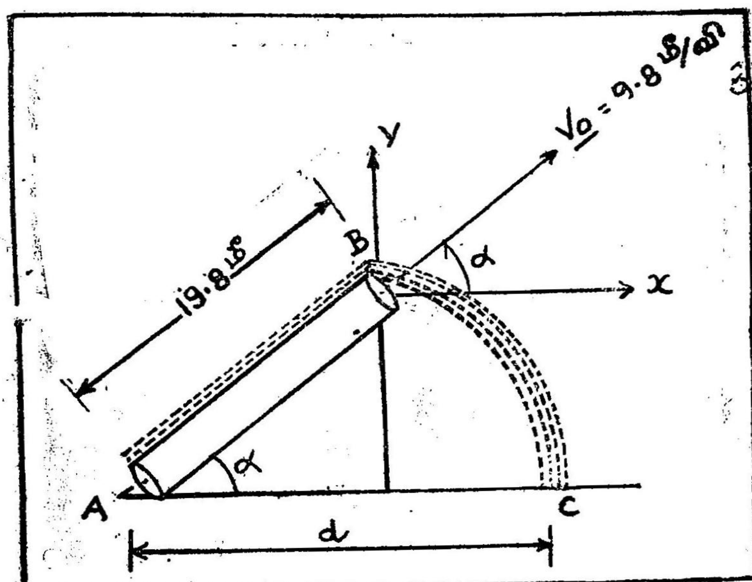
(விடை : 34·293 மீ/வி)

4·26-13. தரையில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வினாடிக்கு 28 மீ வேகத்தில் எறியப்படும் ஒரு துகள் எறிதானத்திலிருந்து கிடைத்தளத்தில் 32 மீட்டர் தொலைவிலிருக்கும் 14 மீட்டர் உயரமுள்ள சுவரின் உச்சியைத் தடவலாகத் தாண்டிச் செல்கிறது. எறிகோணத்தைக் கணக்கிடுக.

$$\left[\text{விடை : } \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \text{ அல்லது } \tan^{-1}\left(\frac{17}{4}\right)\right]$$

4·26-14. 19·8 மீட்டர் நீளமுள்ள *AB* என்னும் வளைசுழல் (Conveyer belt) *A* என்னுமிடத்திலமைந்துள்ள பிணையில் (hinge) ஒன்றில் படம் (4·35)-ல் காட்டியவாறு பொருத்தப்பட்டுக் கிடைத்தளத்துடன் எவ்விதக் கோணச்சரிவையும் பெறத்தக்கதாக உள்ளது. வளை சுழல், வினாடிக்கு 9·8 மீட்டர் என்னும் சீரான வேகத்தில் இயங்குகிறது. தானிய மணிகள் அவ்வளை சுழல்

மூலமாகச் செலுத்தப்பட்டு, *B*-யில் அவைகள் தானாகவே இயங்குமாறு விடப்பட்டு, *C*-ஐ அடைகின்றன. *A*-க்கும், *C*-க்கும்



படம் 4·35

இடையேயுள்ள தொலைவின் கூடுமான உச்ச மதிப்பைக்காண்க. அதற்கேற்ற கோணச்சரிவையும் காண்க.

($g = 9\cdot8$ மீ/(வினாடி)^2 எனக்காண்க.)

[விடை : $d = 33\cdot94$ மீ; $\alpha = 30°$]

5. திசையிகளுக்கு உரிய தொகை நுண் கணிதம்

(Integral calculus for vectors)

5-1. வரையறுத் தொகையிடு

t என்பது நேரத்தைக் குறிக்கும் ஒரு தொடர் எண் கணியமாகுக. $\underline{r}$ என்னும் திசையியை, t-யின் சார்பலனுகக் கொள்க. அது t-யின் மதிப்புகளுக்கு ஏற்றவாறு, அளவிலும் திசையிலும் மாறுபடக் கூடும். இத்தகைய $\underline{r}(t)$ என்னும் திசையி ஒவ்வொன்றிற்கும், $\frac{d\,\underline{r}(t)}{dt}$ என்னும் திசையி வகைக்கெழு முன்னரே வரையறுக்கப்பட்டது.

இதுவும் t-யில் மற்றொரு $\underline{v}(t)$ என்னும் சார்பலனைக் குறிக்கும். எனவே,

$$\underline{v}(t) = \frac{d}{dt}\,\underline{r}(t) \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் $\underline{C}$ என்பது ஒரு திசையி மாறிலியாகில் (constant vector).

$$\frac{d\,\underline{C}}{dt} = \underline{0} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \underline{v}(t) = \frac{d}{dt}\left\{\underline{r}(t) + \underline{C}\right\} \text{ என்றுமாகும்.}$$

இதற்குமாருக, $\underline{v}(t)$ என்னும் ஒரு திசையிச்சார்பலன் கொடுக்கப்பட்டால், அதற்கு ஏற்றதான, $\underline{r}(t)$ என்னும் திசையியைப் பொதுவாக, $\underline{C}$ என்னும் தொகையீட்டு மாறிலி

(constant of integration) யுடன் வரையறுக்க முடியும். அப்போது, $\underline{r}(t)$ என்பது, $v(t)$-யின், வரையருத் தொகை எனக் கொள்ளப் படும். (Indefinite integral).

எண்கணியங்களுக்குப் பயன்படுத்தப்படும் தொகை நுண் கணிதக் குறியீடுகளே, திசையிகளுக்கும் ஏற்றதாகும்.

எனவே,

$$\underline{r}(t) = \int v(t)\, dt \text{ என்று,} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

அல்லது $$\underline{r}(t) = \int \underline{v}(t)\, dt + C \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்று எழுதலாம்.

$\int \underline{v}(t)\, dt$ என்பது வரையருத்தொகை எனக் கொள்ளப் படும்.

$\underline{C}$ என்பது முன்கூறியவாறு, தொகையீட்டு மாறிலியாகும்.

மேலும் $\underline{r}_1(t)$, $\underline{r}_2(t)$ என்னும் திசையிகளின் வகைக் கெழுக்களை $\underline{v}_1(t)$, $\underline{v}_2(t)$ எனக்கொண்டால்,

$$\frac{d}{dt}\left\{\underline{r}_1(t) + \underline{r}_2(t)\right\} = \frac{d\,\underline{r}_1(t)}{dt} + \frac{d}{dt}\underline{r}_2(t)$$

$$= \underline{v}_1(t) + \underline{v}_2(t) \text{ ஆகும்.}$$

எனவே,

$$\int\left\{\underline{v}_1(t) + v_2(t)\right\} dt = \underline{r}_1(t) + \underline{r}_2(t) + c \quad \ldots \quad (2)$$

ஆகும்.

a, $\underline{A}$ என்பவை முறையே எண்ணி, திசையி மாறிலிகளையும் u, $\underline{v}$ என்பவை t-யில் எண்ணி, திசையிச் சார்பலன்களையும், குறிப்பதாலும்,

$$\int a\,\underline{v}\, dt = a\int \underline{v}\, dt \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$\int \underline{A}\, u\, dt = \underline{A}\int u dt \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

$$\int \underline{A} \cdot \underline{v}\, dt = \underline{A} \cdot \int \underline{v}\, dt \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

$$\int \underline{A} \wedge \underline{v}\, dt = \underline{A} \wedge \int \underline{v}\, dt \quad \dots \quad \dots \quad (7)$$

எனக்காணலாம்.

இவ்விதிகளைப் பயன்படுத்தி, திசையித் தொகையிடல் கணக்குகளை மதிப்பீடு செய்யலாம்.

$\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ என்னும் நிலையான ஓரலகுத் திசையிகளைப் பயன்படுத்தும்போது, $\underline{v}\ (t)$ என்னும் திசையியை

$\underline{v}\ (t) = v_x (t) \underline{i} + v_y (t) \underline{j} + v_z (t) \underline{k}$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \int \underline{v}\, dt = \underline{i} \int v_x (t)\, dt + j \int v_y (t)\, dt + \underline{k} \int v_z (t)\, dt \dots (8)$$

ஆகும்.

எனவே

$$r (t) = \underline{i} \int v_x (t)\, dt + j \int v_y (t)\, dt + \underline{k} \int v_z (t)\, dt$$

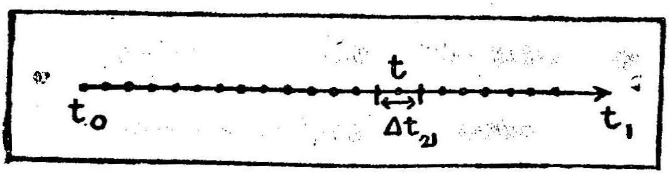
ஆகும்.

அதாவது,

$$x = \int v_x (t)\, dt, \ y = \int v_y (t)\, dt, \ z = \int v_z (t)\, dt \dots (9)$$

என்பவை வரையறுக்கப்படும்.

5·2 திசையிகளுக்கான வரையறுத்த தொகையீடு (Definite integral for vectors)



படம் 5·1

t என்னும் தொடர்மாறி, $(t_0 \cdot t_1)$ என்னும் இடைவெளியில், $v (t)$ என்னும் திசையிச் சார்பலனை வரையறுக்கட்டும்.

Δt_r, $v = 1, 2, \ldots\ldots n$ என்பது, (t_0, t_1)-ல் ஏதேனும் ஒரு கழிநுண் இடைவெளியை (infinitesimal)ப் படம் (5·1)-ல் காட்டிய வாறு குறிக்கட்டும். Δt_v — இல், t_v-க்கு உரிய $v(t)$ யின் மதிப்பைக் கண்டு, $\underline{v}(t_v)\,\Delta t_v$ என்னும் பெருக்குத் தொகையின் கூடுதலை வரையறுக்கவும். அத்தொகை

$\sum \underline{v}(t_v)\,\Delta t_v$ என்று குறிக்கப்படும். Δt_v-ன் மதிப்பைச் சீராக குறைத்துக் கொண்டே சென்று, இறுதியாக அது பூச்சிய மதிப்பை அணுகும்போது, $\sum \underline{v}(t_v)\,\Delta t_v$ என்பது ஒரு முடிவுள்ள மதிப்பைப் பெறுமானல், அப்போது,

$$\underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \sum \underline{v}(t)\,\Delta t = \left[\underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \sum v_x(t)\,\Delta t\right]\underline{i} + \left[\underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \sum v_y(t)\,\Delta t\right]\underline{j} + \left[\underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \sum v_z(t)\,\Delta t\right]\underline{k}$$

$$= \underline{i}\int_{t_0}^{t_1} v_x(t)\,dt + \underline{j}\int_{t_0}^{t_1} v_y(t)\,dt + \underline{k}\int_{t_0}^{t_1} v_z(t)\,dt \quad \ldots \quad (10)$$

ஆகும்.

எனவே, இவ்வெல்லை மதிப்பு,

$$\underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \sum \underline{v}(t)\,\Delta t = \int_{t_0}^{t_1} \underline{v}(t)\,dt \quad \ldots \quad (11)$$

என்னும் வரையறுத்த தொகையீடு சங்கேதக் குறியீட்டில் குறிக்கப்படும்.

எனவே,

$$\int_{t_0}^{t_1} \underline{v}(t)\,dt = \underline{i}\int_{t_0}^{t_1} v_x(t)\,dt + \underline{j}\int_{t_0}^{t_1} v_y(t)\,dt + \underline{k}\int_{t_0}^{t_1} v_z(t)\,dt$$

$$= \underline{r}(t_1) - \underline{r}(t_0) \text{ ஆகும்.} \quad \ldots \quad (12)$$

ஆகவே, எண்ணிகளுக்கு உரிய வரையறுத்த தொகையீடு முறைப் பண்புகளே, திசையிகளுக்கும் ஏற்றவையாக உள்ளன.

5·3 மாதிரிக்கணக்குகள்

5·3-1. $\underline{A}(t) = 16t^2\,\underline{i} + 10t\,\underline{j} - 16\,\underline{k}$ எனின், $A(t)$யின் வரையறுத் தொகையைக் காண்க.

$$\int A(t)\,dt = \int (16t^2\,\underline{i} + 10t\,\underline{j} - 16\,\underline{k})\,dt$$

$$= 16\,\underline{i}\int t^2\,dt + 10\,\underline{j}\int t\,dt - 16\,\underline{k}\int dt$$

$$= 16\,\underline{i}\left(\frac{t^3}{3}\right) + 10\,\underline{j}\left(\frac{t^2}{2}\right) - 16\,\underline{k}\,(t) + \underline{C}$$

$$= \frac{16t^3}{3}\,\underline{i} + \frac{10t^2}{2}\,\underline{j} - 16t\,\underline{k} + \underline{C},$$

$\underline{C}$ என்பது ஒரு திசையிமாறிலியாகும்.

5·3-2. $A(t) = 16t^2\,\underline{i} + 10t\,\underline{j} - 16\,\underline{k}$ எனின் $20t^2\,\underline{A}$ என்பதின் வரையறுத்தொகையைக் காண்க.

$$\int 20t^2\,\underline{A}\,dt = 20\int t^2(16t^2\,\underline{i} + 10t\,\underline{j} - 16\,\underline{k})\,dt$$

$$= 20\left[16\,\underline{i}\int t^4\,dt + 10\,\underline{j}\int t^3\,dt - 16\,\underline{k}\int t^2\,dt\right]$$

$$= 20\left[\frac{16}{5}t^5\,\underline{i} + \frac{10}{4}t^4\,\underline{j} - \frac{16}{3}t^3\,\underline{k}\right] + \underline{C}$$

$$= 20\left[\frac{16}{5}t^5\,\underline{i} + \frac{5}{2}t^4\,\underline{j} - \frac{16}{3}t^3\,\underline{k}\right] + \underline{C}.$$

5·3-3. கீழ்காணும் திசையிகள் நேரத்தைச் சார்ந்தவை.

$\underline{A}(t) = (2t^3 + 5t)\,\underline{i} - 10t\,\underline{j}$

$B(t) = 5t\,\underline{i} + 3t^2\,\underline{k}$

(i) இவ்வகைத்திசையிகளின் கூடுதலுக்குரிய வரையருத் தொகையைக் காண்க.

(ii) இவ்விரு திசையிகளின் எண்ணிப்பெருக்கி, திசையிப் பெருக்கி ஆகியவற்றின் வரையருத் தொகையைக் காண்க.

$$\underline{A} + \underline{B} = (2t^3 + 5t)\,\underline{i} - 10t\,\underline{j} + 5t\,\underline{i} + 3t^2\,\underline{k}$$
$$= (2t^3 + 10t)\,\underline{i} - 10t\,\underline{j} + 3t^2\,\underline{k}$$

$$\int(\underline{A} + \underline{B})\,dt = \int\left\{(2t^3 + 10t)\,\underline{i} - 10t\,\underline{j} + 3t^2\,\underline{k}\right\}dt$$
$$= \underline{i}\int(2t^3 + 10t)\,dt - 10\,\underline{j}\int t\,dt + 3\,\underline{k}\int t^2 dt$$
$$= \left(\frac{t^4}{2} + 5t^2\right)\underline{i} - 5t^2\,\underline{j} + t^3\,\underline{k} + \underline{C}$$

$$\underline{A}\cdot\underline{B} = (2t^3 + 5t)(5t)$$
$$= 5\,(2t^4 + 5t^2)$$

$$\int(\underline{A}\cdot\underline{B})\,dt = \int 5\,(2t^4 + 5t^2)\,dt$$
$$= 5\int(2t^4 + 5t^2)\,dt$$
$$= 5\left(\frac{2}{5}t^5 + \frac{5}{3}t^3\right) + C$$
$$= 2t^5 + \frac{25}{3}t^3 + C$$

$$\underline{A}\wedge\underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2t^3 + 5t & -10t & 0 \\ 5t & 0 & 3t^2 \end{vmatrix}$$
$$= 30t^3\,\underline{i} + (60t^5 + 15t^3)\,\underline{j} + 50t^2\,\underline{k}$$

$$\int(\underline{A}\wedge\underline{B})\,dt = \int\left\{30t^3\,\underline{i} + (60t^5 + 15t^3)\,\underline{j} + 50t^2\,\underline{k}\right\}dt$$
$$= 30\,\underline{i}\int t^3\,dt + \underline{j}\int(60t^5 + 15t^3)\,dt + 50\,\underline{k}\int t^2\,dt$$

$$= \frac{15}{2} t^4 \underline{i} + \left(10t^6 + \frac{15}{4} t^4\right) \underline{j} + \frac{50}{3} t^3 \underline{k} + \underline{C}$$

$$\underline{A}(t) = 3t^2 \underline{i} + (t-4)\underline{j} - t^3 \underline{k}$$

$$\underline{B}(t) = 6t \underline{i} + \underline{j} - 3t^2 \underline{k}$$ எனின்

5·3–4. கீழ்காணும் வரையறுத்த தொகையீடுகளை மதிப்பிடுக.

(i) $\int_1^3 (\underline{A} + \underline{B})\, dt$

(ii) $\int_1^3 (\underline{A} \cdot \underline{B})\, dt$

(iii) $\int_1^3 (\underline{A} \wedge \underline{B})\, dt$

$$\underline{A} + \underline{B} = (3t^2 + 6t)\underline{i} + (t-3)\underline{j} - (t^3 + 3t^2)\underline{k}$$

$$\int_1^3 (\underline{A} + \underline{B})\, dt = \int_1^3 \left\{(3t^2 + 6t)\underline{i} + (t-3)\underline{j} - (t^3 + 3t^2)\underline{k}\right\} dt$$

$$= \underline{i} \int_1^3 (3t^2 + 6t)\, dt + \underline{j} \int_1^3 (t-3)\, dt - \underline{k} \int_1^3 (t^3 + 3t^2)\, dt$$

$$= \underline{i}\left(t^3+3t^2\right)_1^3 + \underline{j}\left(\frac{(t-3)^2}{2}\right)_1^3 - \underline{k}\left(\frac{t^4}{4}+t^3\right)_1^3$$

$$= 50\,\underline{i} - 2\,j - 46\,\underline{k}$$

$$\underline{A}\cdot\underline{B} = \left\{3t^2\,\underline{i} + (t-4)\,\underline{j} - t^3\,\underline{k}\right\} \cdot \left\{6t\,\underline{i} + \underline{j} - 3t^2\,\underline{k}\right\}$$

$$= 18t^3 + (t-4) + 3t^5$$

$$= 3t^5 + 18t^3 + t - 4$$

$$\therefore \int_1^3 (\underline{A}\cdot\underline{B})\,dt = \int_1^3 (3t^5 + 18t^3 + t - 4)\,dt$$

$$= \left(\frac{1}{2}t^6 + \frac{9}{2}t^4 + \frac{t^2}{2} - 4t\right)_1^3$$

$$= \left(\frac{1443}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= 720.$$

$$\underline{A} \wedge \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3t^2 & t-4 & -t^3 \\ 6t & 1 & -3t^2 \end{vmatrix}$$

$$= (12t^2 - 2t^3)\,\underline{i} + 3t^4\,\underline{j} + (24t - 3t^2)\,\underline{k}$$

$$\therefore \int_1^3 (\underline{A} \wedge \underline{B})\,dt$$

$$= \int_1^3 \left\{ (12t^2 - 2t^3)\,\underline{i} + 3t^4\,\underline{j} + (24t - 3t^2)\,\underline{k} \right\} dt$$

$$= \underline{i}\int_1^3 (12t^2 - 2t^3)\,dt + 3\,\underline{j}\int_1^3 t^4\,dt + \underline{k}\int_1^3 (24t - 3t^2)\,dt$$

$$= \left(4t^3 - \frac{1}{2}t^4\right)_1^3 \underline{i} + \frac{3}{5}\left(t^5\right)_1^3 \underline{j} + \left(12t^2 - t^3\right)_1^3 \underline{k}$$

$$= 64\,\underline{i} + \frac{726}{5}\,\underline{j} + 70\,\underline{k}$$

5·3–5. t என்னும் நேரத்தில், துகள் ஒன்றின் முடுக்கத்தை $\underline{a} = 12\cos 2t\,\underline{i} - 8\sin 2t\,\underline{j} + 16t\,\underline{k}$ என்னும் திசையி வரையறுக்கிறது. துகளின் திசைவேகம், $\underline{v}$ யும், இடப்பெயர்ச்சி, $\underline{r}$-உம், $t = 0$ என்றுள்ளபோது பூச்சியமாகில், $\underline{v}$, $\underline{r}$ என்னும் திசையிகளைக் காண்க.

$$\left[\text{இங்கு } \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{a},\ \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v} \text{ எனவும் கொள்க.}\right]$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{a} = 12\cos 2t\,\underline{i} - 8\sin 2t\,\underline{j} + 16t\,\underline{k}$$

$$\therefore \int_0^{\underline{v}} d(\underline{v}) = \int_0^t (12\cos 2t\,\underline{i} - 8\sin 2t\,\underline{j} + 16t\,\underline{k})\,dt$$

$$\underline{v} = 12\,\underline{i}\int_0^t \cos 2t\,dt - 8\,\underline{j}\int_0^t \sin 2t + 16\,\underline{k}\int_0^t t\,dt$$

$$= 12\,\underline{i}\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)_0^t - 8\,\underline{j}\left(\frac{-\cos 2t}{2}\right)_0^t + 16\,\underline{k}\left(\frac{t^2}{2}\right)_0^t$$

$$\underline{v} = 6\sin 2t\,\underline{i} + 4(\cos 2t - 1)\,\underline{j} + 8t^2\,\underline{k}$$

மேலும் $\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v} = 6\sin 2t\,\underline{i} + 4(\cos 2t - 1)\,\underline{j} + 8t^2\,\underline{k}$

$$\int_0^{\underline{r}} d\underline{r} = \int_0^t \underline{v}\, dt = \int_0^t \left\{ 6 \sin 2t\, \underline{i} + 4(\cos 2t - 1)\, \underline{j} + 8t^2\, \underline{k} \right\} dt$$

$$\therefore \quad \underline{r} = 6\, \underline{i} \int_0^t \sin 2t\, dt + 4\, \underline{j} \int_0^t (\cos 2t - 1)\, dt + 8\, \underline{k} \int_0^t t^2 dt$$

$$= 6\, \underline{i} \left(\frac{-\cos 2t}{2} \right)_0^t + 4\, \underline{j} \left(\frac{\sin 2t}{2} - t \right)_0^t + 8\, \underline{k} \left(\frac{t^3}{3} \right)_0^t$$

$$= 3(1 - \cos 2t)\, \underline{i} + 2(\sin 2t - 2t)\, \underline{j} + \frac{8}{3} t^3\, \underline{k}$$

5·4. பயிற்சி

5·4-1. $\underline{A} = t\, \underline{i} - t^2\, \underline{j} + (t-1)\, \underline{k}$,

$\underline{B} = 2t^2\, \underline{i} + 6t\, \underline{k}$ எனின்,

கீழ்காணும் வரையறுத்த தொகையீடுகளை மதிப்பிடுக.

(i) $\int_0^2 (\underline{A} \cdot \underline{B})\, dt$; (iii) $\int_0^2 (\underline{A} \wedge \underline{B})\, dt$

5·4-2. $\underline{A} = t\, \underline{i} - 3\, \underline{j} + 2t\, \underline{k}$

$\underline{B} = \underline{i} - 2\, \underline{j} + 2\, \underline{k}$

$\underline{C} = 3\, \underline{i} + t\, \underline{j} - \underline{k}$ எனின், பின் வருவனவற்றைக் கணக்கிடுக.

(i) $\int_{1}^{2} \left\{ (\underline{A} \cdot \underline{B}) + (\underline{B} \cdot \underline{C}) + (\underline{C} \cdot \underline{A}) \right\} dt$

(ii) $\int_{1}^{2} \left\{ (\underline{A} \wedge \underline{B}) + (\underline{B} \wedge \underline{C}) + (\underline{C} \wedge \underline{A}) \right\} dt$

(iii) $\int_{1}^{2} \left\{ A \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) \right\} dt$

(iv) $\int_{1}^{2} \left\{ \underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) \right\} dt.$

6. வேலை, திறன், ஆற்றல்

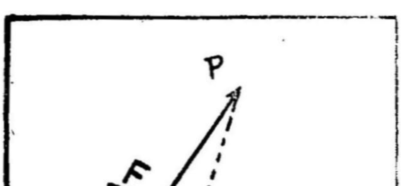
(Work, Power, Energy)

விசை ஒன்றை வரையறுக்க அதன் எண் மதிப்பு, திசை, செயற்படும் புள்ளி ஆகியவை தேவைபடும். விசை செயற்படும் போது அதன் செயற்படு புள்ளி இயங்கினல், அவ்விசை வேலை செய்வதாகக் கொள்ளப்படும்.

விசையானது, அதனுடைய செயற்படுபுள்ளி தன்திசையிலோ அல்லது வேறு திசைகளிலோ இடப்பெயர்ச்சி பெறுமாறு செயற்படக்கூடுமாதலால், அது செய்யும் வேலையின் மதிப்பை வரையறுக்க வேண்டிவருகிறது.

6·1. விசை செய்யும் வேலையின் மதிப்பு

விசை ஒன்று செய்யும் வேலையின் மதிப்பானது, விசையின் எண் மதிப்பு, அதன் திசையில் செயற்படுபுள்ளி சென்ற தொலைவு, ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனுல் அளவிடப்படும்.



படம் 6·1

ஒரு துகளின் மீது (அல்லது ஒரு பொருளின் மீது) செயற்படும் F என்னும் ஒரு விசையின் செயற்படு புள்ளி A ஆனது, A' என்னும் புள்ளிக்குச் சென்ருல், செயற்படு புள்ளி $AA' = d$ என்னும் இடப்பெயர்ச்சியைப் படம் (6·1)-ல் காட்டியவாறு பெற்றிடும். $\bar{F}$, AA' ஆகிய திசைகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் θ ($<90°$) ஆருக. A'-லிருந்து, F செயற்படும் கோட்டிற்கு $A'M$ என்னும் செங்குத்துக் கோட்டை வரைக.

$AM = AA' \cos\theta = d \cos\theta$ ஆகும் ... ...

எனவே வரையறைப்படி, $\underline{F}$ செய்த வேலை $= F \times AM$

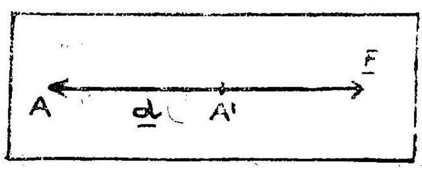
$= F \times d\cos\theta$

$= Fd\cos\theta$

$\underline{F}$, $\underline{d}$ என்னும் திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கியின் மதிப்பும், $Fd\cos\theta$ என்பதால், விசை செய்த வேலையை எண்ணிப் பெருக்கியாலும் குறிப்பிடலாம். அப்போது,

$U =$ விசை செய்த வேலை $= Fd\cos\theta = \underline{F} \cdot \underline{d}$ ஆகும்.

இடப்பெயர்ச்சி $AA' = \underline{d}$, $\underline{F}$-ன் திசையிலேயே படம் (6 2)-ல் காட்டியவாறு ஏற்படுமாகில்,



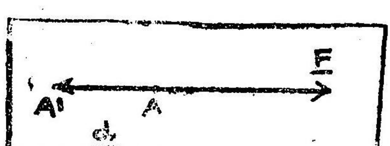
படம் 6·2

$U =$ விசை செய்த வேலை $= \underline{F} \cdot \underline{d}$

$= Fd\cos\theta = Fd\cos 0°$

$= Fd$ ஆகும்.

இடப்பெயர்ச்சி $AA' = \underline{d}$, $\underline{F}$-ன் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் படம் (6-3)-ல் காட்டியவாறு ஏற்படுமெனில்,



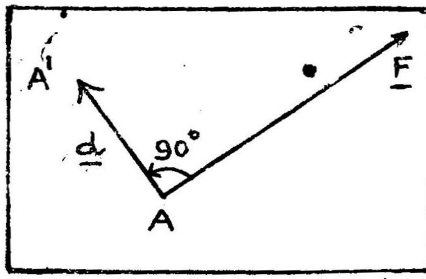
படம் 6·3

$U =$ விசை செய்த வேலை $= \underline{F} \cdot \underline{d}$

$= Fd\cos 180°$

$= -Fd$ ஆகும்.

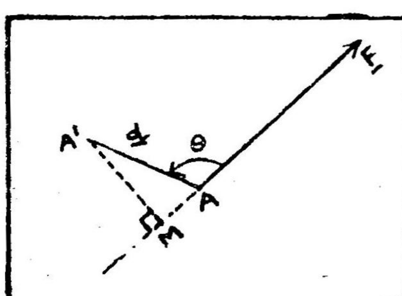
இடப்பெயர்ச்சி $AA' = \underline{d}$, $\underline{F}$-ன் திசைக்குச் செங்குத்துத் திசையில், படம் (6·4)-ல் காட்டியவாறு ஏற்படும் போது,



படம் 6·4

$$U = \text{விசை செய்த வேலை} = \underline{F} \cdot \underline{d}$$
$$= Fd \cos 90°$$
$$= 0 \text{ ஆகும்.}$$

இடப்பெயர்ச்சி $AA' = \underline{d}$, $\underline{F}$-உடன் $\theta\ (> 90°)$ என்னும் விரிகோணத்தை படம் (6-5)-ல் காட்டியவாறு அமைத்தால்,



படம் 6·5

$$U = \text{விசை செய்த வேலை} = \underline{F} \cdot \underline{d}$$
$$= Fd \cos \theta$$
$$= F \times AM \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு இடப் பெயர்ச்சியின் தள நேரிணை (Projection), $\underline{F}$-ன் திசைக்கு எதிராக அமைவதால், விசை வேலை செய்வதற்குப் பதிலாக, விசைக்கு எதிராக வேலை செய்யப்பட்டுள்ளதாகக்

கொள்ளப்படும். எனவே விசையின் திசையில் துகள் (பொருள்) நகர்ந்தால், விசை வேலை செய்கிறதென்றும், எதிர்த் திசையில் துகள் (பொருள்) நகர்ந்தால், விசையை எதிர்த்து வேலை செய்யப் படுகிறது என்றும் கூறுவது வழக்கம்.

இடப் பெயர்ச்சியின் பகிர்வை, விசையின் திசையில் கண்டு, விசை செய்த வேலையை வரையறுப்பதற்குப் பதிலாக, விசையின் பகிர்வை இடப் பெயர்ச்சியின் திசையில் கண்டும் விசை செய்த வேலையைக் காணலாம். இவ்விரு வழிகளிலும் விசை செய்த வேலையானது, $\underline{F} \cdot \underline{d}$ என்னும் திசையி எண்ணிப் பெருக்கி யாலேயே குறிக்கப்படும். மேலும் எல்லா வகையான இடப் பெயர்ச்சிக்கும் ஏற்றதாக திசையி எண்ணிப் பெருக்கி அமைவதால், விசை செய்த வேலையை, $\underline{F} \cdot \underline{d}$ என திசையி முறையில் எழுதுவது சிறந்ததாகும்.

ஒரு துகளானது $\Delta \underline{r_1}, \Delta \underline{r_2}, \dots \Delta \underline{r_n}$ என்னும் இடப் பெயர்ச்சிகளை அடுத்தடுத்து பெற்றால், துகளின்மேல் $\underline{F}$ செய்த வேலை

$$U = \underline{F} \cdot \Delta \underline{r_1} + \underline{F} \cdot \Delta \underline{r_2} + \dots + \underline{F} \cdot \Delta \underline{r_n}$$

$$= \underline{F} \cdot (\Delta \underline{r_1} + \Delta \underline{r_2} + \dots \Delta \underline{r_n}), \text{ (பங்கீட்டு விதியால்)}$$

$$= \underline{F} \cdot (\Delta \underline{r}) = \underline{F} \cdot \Delta \underline{r} \text{ என்றாகும்.}$$

[இங்கு $\Delta \underline{r}$ என்பது எல்லா இடப்பெயர்ச்சிகளின் தொகுபயன் (Resultant) ஆகும்.]

மேலும், ஒரு துகளில் $\underline{F_1}, \underline{F_2}, \dots \underline{F_n}$ என்னும் விசைகள் செயற்பட்டு, துகள் $\Delta \underline{r}$ என்னும் இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறும் போது விசைகளனைத்தும் செய்த வேலை

$$U = \underline{F_1} \cdot \Delta \underline{r} + \underline{F_2} \cdot \Delta \underline{r} + \dots + \underline{F_n} \cdot \Delta \underline{r}$$

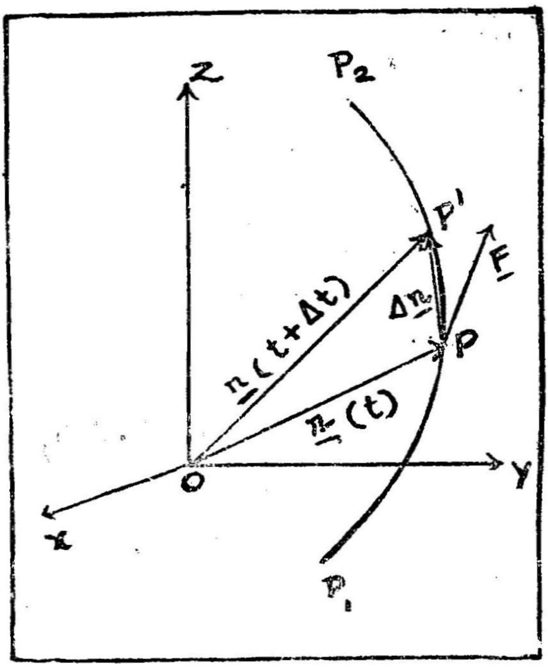
$$= (\underline{F_1} + \underline{F_2} + \dots + \underline{F_n}) \cdot \Delta \underline{r}, \text{ (பங்கீட்டு விதியால்)}$$

$$= \underline{R} \cdot \Delta \underline{r} \text{ ஆகும்.}$$

[இங்கு $\underline{R}$ என்பது ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் $\underline{F_1}, \underline{F_2}, \dots \underline{F_n}$ என்னும் விசைகளின் தொகுபயனாகும்]

6·2. மாறுபடும் விசை செய்யும் வேலையை நுண்கணித முறையில் காணுதல் :

துகள் ஒன்றானது. பரந்தவெளியில் P_1PP_2 என்னும் மென்மையான வளைவுப்பாதையில், அளவிலும் திசையிலும் மாறுபடும் $\underline{F}$ என்னும் விசையால் இயங்கட்டும். t என்னும் நேரத்தில்,



படம் 6·6

துகளின் நிலையை $\underline{OP} = \underline{r}(t)$ என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கட்டும். $\underline{F}$ என்பது, P-யில் படம் (6.6)-ல் காட்டியவாறு, செயல்படுவதாகக் கொள்க. அடுத்து வரும் Δt என்னும் நேரத்தில், துகளானது P' என்னும் இடத்திற்குச் செல்லட்டும்.

$\underline{OP'} = \underline{r}(t + \Delta t)$ எனின், துகள் பெற்ற இடப்பெயர்ச்சி $\underline{PP'} = \Delta \underline{r}$ ஆகும். இவ்வித மிகச்சிறிய இடப்பெயர்ச்சியில், விசையின் அளவு மாறாமலிருக்கிறது எனக்கருதலாம். எனவே $\Delta \underline{r}$ என்னும் இடப்பெயர்ச்சியில், $\underline{F}$ செய்யும் வேலை

$$\Delta U \simeq \underline{F} \cdot \Delta \underline{r}$$

துகள் இயங்கும் பாதையை, $\Delta \underline{r}$ அளவுள்ள மிகச்சிறிய இடப் பெயர்ச்சிப்பகுதிகளாகப் பிரித்து, விசை செய்யும் வேலையை ஒவ்வொரு பகுதியிலும் கணக்கிட்டு மொத்த வேலையை

$$U = \sum \Delta U \simeq \sum \underline{F} \cdot \Delta \underline{r}$$

என்னும் சமன்பாடு தோராயமாக மதிப்பிடுகிறது. $\Delta \underline{r}$ -ன் மதிப்பைச் சீராகக் குறைத்து வந்து. இறுதியாக பூச்சிய மதிப்பைப் பெறுவதாகில், '$\sum \underline{F} \cdot \Delta \underline{r}$' -ன் எல்லை மதிப்பு, பாதைவழித் தொகை (Line integral) யால் வரையறுக்கப்படும். எனவே விசை செய்த மொத்த வேலை

$$U = \lim_{|\Delta \underline{r}| \to 0} \sum \underline{F} \cdot \Delta \underline{r} = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

[குறிப்பு : (i) இங்கு $\underline{r}_1$ $\underline{r}_2$ என்னும் நிலைத்திசையிகள் துகளின் தொடக்க, இறுதியான நிலைப்புள்ளிகளைக் குறிக்கின்றன.

(ii) $\underline{F}$ என்னும் விசை இயக்கப்பாதையில் இடத்திற்கிடம் மாறுவதால், அதை $\underline{r}$ என்னும் நிலைத்திசையின் சார்பலனகக் கருதலாம்.

(iii) துகள் இயங்கும் வளைவுப்பாதையின் சமன்பாடு தெரியுமெனக் கொள்ளப்படும்]

எனவே மாறுபடும் விசை செய்யும் வேலையை,

$$U = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$ என்னும் 'பாதை வழித்தொகை'யால் வரையறுக்கலாம்.

மேற் கூறிய திசையிக்கு உரிய வரையறுத்த தொகையை (Definite integral), அதன் எண்ணிப் பகிர்வுர்களாலும் குறிக்கலாம். அதற்காக,

$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k},$$

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad \underline{F} \cdot d\underline{r} = (F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}) \cdot (d_x i + d_y \underline{j} + d_z \underline{k})$$

$$= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

எனவே $U = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$

$$= \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z\,dz$$ ஆகும்.

ஒருபுள்ளி வழியே செயல்படும் விசைகள் ஒவ்வொன்றும் செய்யும் வேலையின் இயற்கணிதக் கூடுதலானது, அவ்விசைகளின் தொகுபயன் விசை செய்யும் வேலைக்குச்சமமாகும் என்பதும் பின்வருமாறு பெறப்படும்.

$\underline{F}_1, \underline{F}_2, \ldots, F_n$ என்பவை ஒருபுள்ளி வழியே செல்லும் விசைகளாகுக. அவற்றின் தொகுபயனை $\underline{R}$ என்னும் திசையில் வரையறுக்கட்டும். எனவே,

$$\sum_{R=1}^{n} \underline{F_R} = \underline{R}$$ ஆகும்.

விசைகளனைத்தும் செய்யும் வேலை,

$$= \sum_{R=1}^{n} \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F_R} \cdot d\underline{r} = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \left(\sum \underline{F_R} \right) \cdot dr$$

$$= \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{R} \cdot d\underline{r}$$ ஆகும்.

6·3. மாறிலி விசை (Constant force) ஒன்று செய்யும் வேலை:

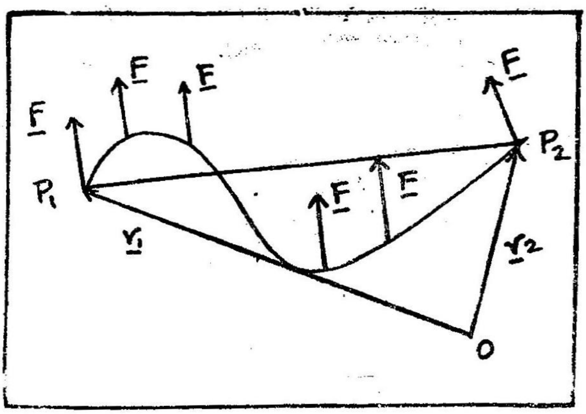
படம் (6·7)-ல் காட்டியவாறு, $\underline{F}$ என்பது மாறிலி விசையாயின், அது செய்த வேலை,

$$= \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

$$= \underline{F} \cdot \int_{r_1}^{r_2} d\underline{r} = \underline{F} \cdot (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)$$

$$= \underline{F} \cdot \underline{P_1 P_2}$$

ஆகும்.



படம் 6·7

எனவே மாறிலி விசை செய்த வேலை, துகளின் தொடக்க, இறுதிநிலைப்புள்ளிகளை மட்டும்தான் சார்ந்திருக்கிறதேயன்றி, துகள் இயங்கும் பாதையைச் சார்ந்திருப்பதில்லை என்றாகும். இவ்வித நிலைமைகளில், மாறிலிவிசை செய்த வேலையை, துகளின் தொடக்க, இறுதிப்புள்ளிகளைச்சேர்த்து உண்டாகும் நேர்கோட்டு இடப்பெயர்ச்சியில் (Straight line displacement) அது செய்யும் வேலையால் கணக்கிடமுடியும்.

6·4. வேலையின் தனி அலகுகள் (Absolute Units of Force)

ஒரு பொருளின்மீது ஓரலகு விசை செயற்படும்போது, அதன் செயற்படுபுள்ளியானது விசையின் திசையிலே ஓர் அலகுத் தொலைவு நகர்ந்தால், அது ஓர் அலகு வேலை செய்ததாகக் கொள்ளப்படும்.

மெட்ரிக் 'C.G S' முறையில். ஒரு டைன் விசை, பொருளில் செயற்பட்டு, அது விசையின் திசையிலே ஒரு சென்டிமீட்டர் தொலைவு நகர்ந்தால், ஓர் எர்க் (Erg) வேலை செய்ததாகும்.

மெட்ரிக் 'M. K. S.' முறையில், ஒரு நியூட்டன் (Newton) விசை அதன் திசையிலே பொருளை ஒரு மீட்டர் நகர்த்தினல், அது செய்த வேலை, ஒரு ஜுல் (Joule) எனப்படும்.

1 ஜுல் $= 10^7$ எர்க்குகள் ஆகும்.

பிரிட்டன் முறையில் வேலையின் அலகு அடி-பவுண்டல் (Foot-Poundal) ஆகும்.

6·5. புவியீர்ப்பு சார்ந்த வேலை அலகுகள் (Gravitational units of Force)

ஒரு குறிப்பிட்ட எடையை புவியிலிருந்து, ஒரு குறிப்பிட்ட தொலைவு தூக்குவதற்குச் செய்யவேண்டிய வேலை புவியீர்ப்பு அலகு ஆகும்.

மெட்ரிக் 'C. G. S.' முறையில், ஒரு கிராம் எடையை, ஒரு சென்டிமீட்டர் உயரம் புவியிலிருந்து தூக்குவதற்கோ, அல்லது விசையின் திசையில் ஒரு சென்டிமீட்டர் நகர்த்தவோ செய்ய வேண்டிய வேலைக்கு ஒரு கிராம்-சென்டிமீட்டர் என்று பெயர்.

1 கிராம்-சென்டிமீட்டர் $= g$ எர்க்குகள்.

அவ்வாறே 'M.K.S.' முறையில், ஒரு கிலோகிராம் எடையை அதன் செயற்படும் திசையில் ஒருமீட்டர் நகர்த்தசெய்ய வேண்டிய வேலை, ஒரு மீட்டர்-கிலோகிராம் எனப்படும்.

பிரிட்டன் முறையில். ஒரு பவுண்டு எடை, விசையின் செயற்படுபுள்ளி ஒரு அடி நகரும்போது, செய்யப்படும் வேலை ஓர் அடி-பவுண்டாகும்.

$\therefore$ **1 அடி-பவுண்டு $= g$ அடி-பவுண்டல்கள் ஆகும்.**

இயக்க விசையியல் கணக்குகளில், பின்வரும் விசைகளின் வகைகள் செய்யும் வேலை அடிக்கடி தேவைப்படும்.

(i) **புவியீர்ப்பு விசை செய்யும் வேலை** (Work done by Gravitational Force)

(ii) **சுருளிவில்லின் மீள் சக்திவிசையால் செய்யப்படும் வேலை** (Work done by the Elastic Force of a spring)

(iii) உராய்வு விசைகள் செய்யும் வேலை (Work done by Frictional Forces)

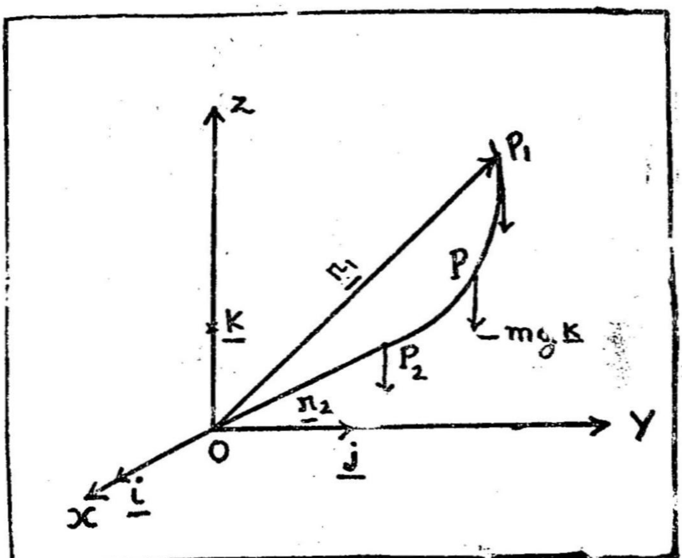
(iv) ஒரு சுழலிணையால் (Couple) செய்யப்படும் வேலை (Work done by a Couple)

இவைகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் கீழே விளக்கம் தரப்பட்டுள்ளது.

6·6. புவியீர்ப்பு விசை செய்யும் வேலை.

6·6-1. துகளின் எடை செய்யும் வேலை.

m நிறையுடைய துகள் ஒன்று, பரந்தவெளியில், புவியீர்ப்புக் களத்தில் (Earth's Gravitational Field) உள்ளதாகக் கொள்க.



படம் 6 8

அத்துகளானது $\underline{F} = -w\,\underline{k} = -mg\,\underline{k}$ என்னும் புவியீர்ப்பு விசையைப் பெற்றுள்ளது. துகளை $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ என்னும் புள்ளிக்கு நகர்த்தும் போது, $\underline{F}$ என்னும் விசை செய்த வேலை

$$U_{1-2} = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F} \cdot d\,\underline{r}$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} (-mg\,\underline{k}) \cdot (\underline{i}\;dx + \underline{j}\;dy + \underline{k}\;dz)$$

$$= -mg \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$= mg\,(z_1 - z_2)$$

இங்கு விசைசெய்த வேலை, துகள் இயங்கும் பாதையைச் சார்ந்திராமல். படம் (6·8)-ல் காட்டியவாறு (x, y) தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அளவிடப்படும் அதன் தொடக்க, இறுதி நிலைப்புள்ளிகளின் உயரங்களை மட்டுமே சார்ந்துள்ளதாகும்.

$z_1 > z_2$ என்றுள்ளபோது. பொருளின் எடை வேலை செய்ததாகவும், $z_1 < z_2$ என்றுள்ளபோது, பொருளின் எடைக்கு எதிராக வேலை செய்யப்பட்டதாகவும் கொள்ளப்படும்.

6·6-2. ஈர்ப்பு விசை செய்யும் வேலை.

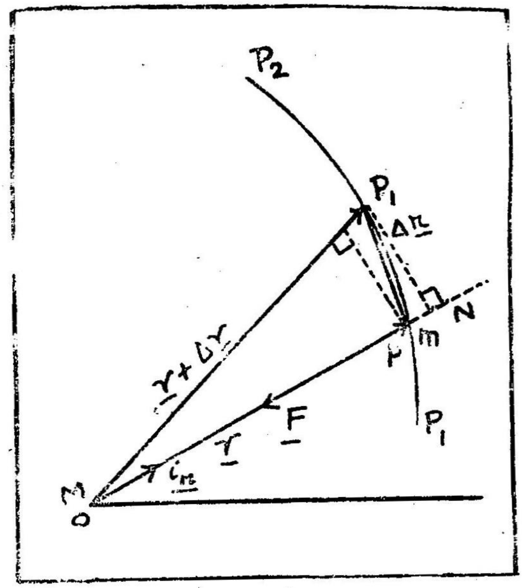
M, m என்ற நிறைகளைப்பெற்ற இரு பொருள்களின் இடையிலுள்ள தொலைவு r எனில் நியூட்டனின் ஈர்ப்பு விதிப்படி, ஒன்று மற்றொன்றை ஈர்க்கும் விசையின் எண்மதிப்பானது,

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad \text{ஆகும்.}$$

M நிறையைப் பெற்ற துகள் O-என்னும் இடத்தில் நிலையாக உள்ளதெனவும், அதைக் குறித்து m நிறையைப் பெற்ற துகள் P என்னுமிடத்தில் படம் (6·9)-ல் காட்டியவாறு உள்ளதெனவும் கொள்க. m-ன் மேல் செயல்படும் ஈர்ப்புவிசை, $\underline{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\underline{i_n}$ ஆகும். துகள் P என்னுமிடத்திலிருந்து, P' என்னுமிடத்திற்கு $\Delta\,\underline{r}$ கழி நுண் அளவு இடப் பெயர்ச்சியைப் பெற்று நகர்வதாகில், ஈர்ப்பு விசை, அதன்மேல் செய்யும் வேலை

$$\Delta U = \underline{F} \cdot \Delta\,\underline{r}$$

$$= -\frac{GMm}{r^2}\,\Delta r \quad \text{ஆகும்.}$$



படம் 4·22

எனவே துகள், P_1-லிருந்து, P_2-வுக்குச் செல்லும்போது, அதன் மேல் ஈர்ப்புவிசை செய்த வேலை

$$U = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{G M m}{r^2}\, dr$$

$$= -G M m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \text{ ஆகும்.}$$

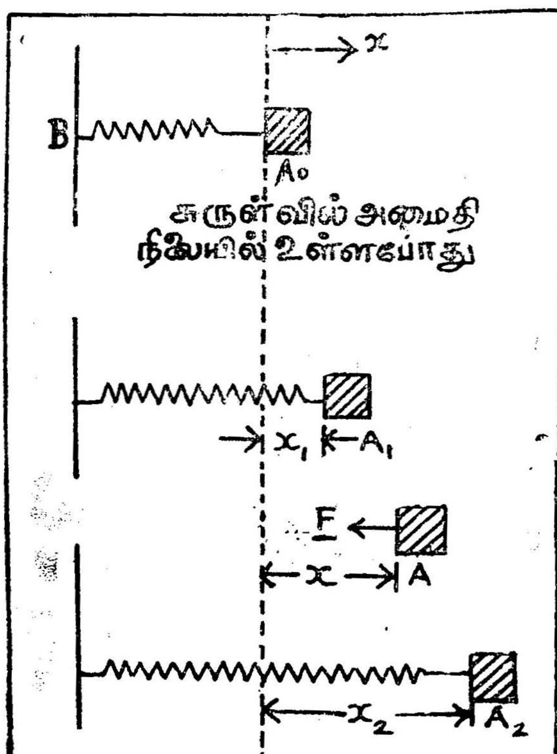
6·7. சுருள்வில்லின் மீள்சக்தி விசையால் செய்யப்படும் வேலை.

சுருள்வில் (Spring) ஒன்றில் நிகழும் இழுவிசையானது, ஹூக்கின் விதிப்படி (Hooke's Law) நீட்சியின் நேர்விகிதத்தி லிருக்கும்.

x என்பது நீட்சி எனில், இழுவிசையானது $T = kx$ என வரையறுக்கப்படும். இங்கு k என்பது மீட்சி அல்லது வில் மாறிலி யாகும். (Elastic or Spring Constant) இதன் மதிப்பு சுருள்வில்லில் ஓரலகு மீட்சியை ஏற்படுத்தக்கூடிய விசையின் அளவாகும்.

எனவே அது கிலோகிராம்/செ.மீ என்னும் அலகால் அளவிடப்படும்.

B என்னும் நிலையான புள்ளியிலே ஒருமுனை பொருத்தப்பட்ட சுருள்வில்லின் மற்றொரு முனையில் A என்னும் பொருளானது படம் [6-10-(a)]யில் காட்டியவாறு கட்டப்பட்டிருக்கிறது. படத்தில் BA_0 என்பது சுருள் வில்லின் இயல்பான நீளத்தைக் குறிக்கிறது



படம் 6·10 (a)

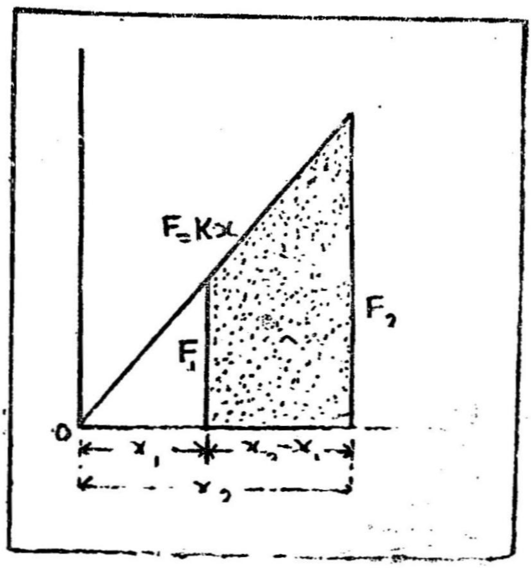
A_0 என்பது பொருளின் சமநிலையாகும் (Equilibrium position). பொருளை BA_0 திசையில் $x\ (> 0)$ தொலைவு சற்று அசைத்து விட்டால், அது, A_0-ஐப்பற்றி முன்னும், பின்னும் இயங்கும். சுருள்வில் மீள்சக்தி உடையதால், அது A என்னும் பொருளில் செயற்படுத்தும் விசையானது, ஹூக்கின் விதிப்படி,

$F = kx$ என்னும் எண்மதிப்பால் வரையறுக்கப்படும். சுருள் வில்லின் இழுவிசை இடப்பெயர்ச்சியின் திசைக்கு எதிராகச் செயல்படுவதால், $\underline{F} = -kx\,\underline{i}$ ஆகும். சுருள்வில்லின் நீளத்தை மேலும் $dx\,i$ என்னும் நுண்ணிய இடப்பெயர்ச்சி அளவுக்கு நீட்டினால் அதன் காரணமாக, சுருள்வில் செய்த நுண்ணிய வேலை,

$$dU = \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

$$= -kx\,\underline{i} \cdot dx\,\underline{i}$$

$$= -kx\,dx \quad \text{ஆகும்.}$$



படம் 6·10 (b)

எனவே A என்னும் பொருள் A_1 லிருந்து, A_2-விற்கு இடம் பெயரச் செய்யும்போது, சுருள் வில் செய்த வேலை,

$$U_{1-2} = \int_{A_1}^{A_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = -k \int_{x_1}^{x_2} x\,dx = -k \left(\frac{x^2}{2}\right)_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2 \quad \text{ஆகும்.}$$

(i) கிணறு, குளம் தோண்டல், பழுது பார்த்தல்.

(ii) பாசன வசதிக்கு நிலத்தைத் தயாரித்தல்.

(iii) நிலமீட்பு, கரை கட்டுதல், நிலச் சீரமைப்பு.

(vi) கால்நடைக் கொட்டில், பொறிகள் வைக்கும் அறை, களத்தில் வீடு முதலிய கட்டுதல்.

(v) தோட்டம் அமைத்தல் (Horticulture).

(vi) எண்ணெய் எஞ்சின் (Oil Engine) வாங்கல்.

(vii) டிராக்டர் (Tractor), வேளாண்மைக்குரிய இயந்திரங்கள் வாங்கல்.

(viii) வெல்லம், பழுப்புச் சர்க்கரை தயாரிக்கத் தேவைப்படும் கரும்பு பிழியும் பொறிகள் வாங்க.

(ix) உள்ள நிலத்தையொட்டிய துண்டு நிலங்களை வாங்கல்.

(x) விவசாயத் தேவைகளையொட்டி வீடுகளைக் கட்டல், பழுதுபார்த்தல்.

(xi) குத்தகைதாரர் விவசாய நிலத்தை விலைகொடுத்து வாங்கல்.

(xii) கடன்களைத் தீர்த்தல்.

கடந்த சில ஆண்டுகளாக, நீண்டகாலக் கடன் உற்பத்தி நோக்கங்களுக்கே கொடுக்கப்பட வேண்டுமென்ற கொள்கையும், நன்கு ஆராய்ந்து தீட்டப்பட்ட விவசாய வளர்ச்சித் திட்டங்களுக்கே கடன் வழங்கப்பட வேண்டுமென்ற கொள்கையும் செயல்படுத்தப்பட்டு வருகின்றன. திட்டவட்டமான கண்டறியக் கூடிய உற்பத்தி நோக்கங்களுக்கே கடன் வழங்கப்பட வேண்டுமென்றும், நான்காம் திட்ட காலத்தில் வழங்கப்படும் கடனில் 90% அளவாகிலும் கீழ்க்காணும் இனங்களுக்கு இருத்தல்வேண்டும் என ரிசர்வு வங்கி பணித்துள்ளது:

(அ) கிணறுகள் தோண்டல்.

(ஆ) நீரேற்றுப் பொறி (Pumpset) வாங்கிப் பொருத்துதல், அதை வைத்துப் பொருத்த அறை கட்டுதல், கால்வாய்கள் வெட்டுதல்.

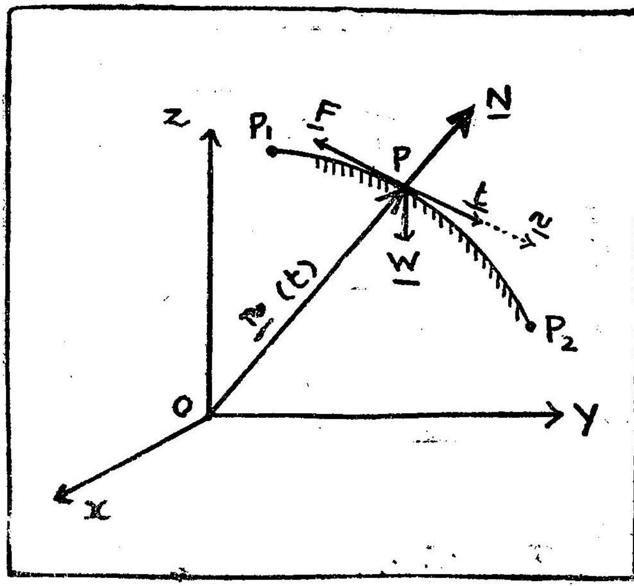
(இ) டிராக்டர், விசை - ஏர் (power - tiller), தெளிப்புப் பொறி (mechanical sprinkler), போரடிப்பான் (thresher), அறுவடைப் பொறி (combine), கரும்பு

உராய்வு விசையின் எண் மதிப்பு,

$$F = \mu N \quad \text{ஆகும்.}$$

துகள் இயங்கும் திசைக்கு எதிர்த் திசையில் செயற்படும்.

$$\therefore \quad \underline{F} = -\mu N \underline{t} \quad \text{ஆகும்.}$$



படம் 6·11

எனவே, துகளானது P_1 லிருந்து P_2 என்னும் நிலைக்குச் செல்லும் போது, இவ்வுராய்வு விசை செய்யும் வேலை

$$U_{1-2} = \int_{P_1}^{P_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{P_1}^{P_2} -\mu N \underline{t} \cdot \frac{d\underline{r}}{ds} ds$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} -\mu N \underline{t} \cdot \underline{t} \, ds$$

$$= -\int_{P_1}^{P_2} \mu N \, ds \quad \text{ஆகும்.}$$

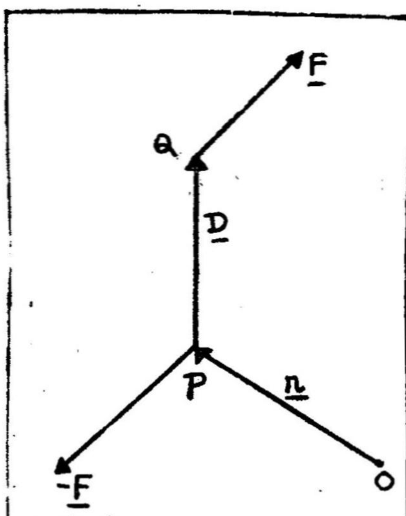
இங்கு உராய்வு விசையின் எதிர்த்திசையில் பொருள் நகர்வதால், உராய்வு விசையை எதிர்த்து வேலை செய்யப்படுகிறது எனப் பொருள் கொள்ளவேண்டும்.

6·9. ஒரு சுழலிணையால் (Couple) செய்யப்படும் வேலை.

தந்ததொரு சுழலிணையின் விசைகளான $-\underline{F}$, $\underline{F}$ என்பவை, ஒரு சட்டிறுக்கப்பொருளில் முறையே $\underline{r}$, $(\underline{r}+\underline{D})$ என்னும் நிலைத்திசையிகள் வரையறுக்கும் புள்ளிகளில், படம் (6·12)-ல் காட்டியுள்ளபடி செயற்படுவதாகக் கொள்க. P, Q ஆகிய புள்ளி களின் திசை வேகங்கள் முறையே

$$\frac{d\underline{x}}{dt}, \quad \frac{d\underline{r}}{dt} + \underline{\omega} \wedge \underline{D} \quad \text{ஆகும்.}$$

இங்கு $\underline{\omega} = w\underline{k}$ எனக்கொள்க.



படம் 6·12

எனவே இரு விசைகளுக்கு உரிய திறன்களின் கூடுதல்

$$= -\underline{F} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} + \underline{F} \cdot \left(\frac{d\underline{r}}{dt} + \underline{\omega} \wedge \underline{D}\right)$$

$$= \underline{F} \cdot (\underline{\omega} \wedge \underline{D})$$

$$= (\underline{D} \wedge \underline{F}) \cdot \underline{\omega}$$

$= \underline{M} \cdot \underline{\omega}$, ($M_P$ என்பது P பற்றி $\underline{F}$ ன் திருப்புத் திறன்)

$= M_P \underline{k} \cdot w \underline{k}$

$= M_P\ \omega$ ஆகும்.

$$\therefore \text{ வேலை} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{M_P} \cdot \underline{\omega}\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \underline{M_P} \cdot \omega \underline{k}\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} M_P\, \omega\, dt$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta_1} M_P \frac{d\theta}{dt}\, dt = \int_{\theta_0}^{\theta_1} M_P\, d\theta \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $(-\underline{F}, \underline{F}, \underline{D})$ என்ற தந்தவொரு சுழலிணையால் செய்யப்பட்ட வேலை,

$$= \int_{\theta_0}^{\theta_1} M_P\, d\theta.$$

சுழலிணையை வரையறுக்கும் விசைகள் மாறிலிகளானால் சுழலிணையால் செய்யப்பட்ட வேலை

$$= M_P \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta = M_P(\theta_1 - \theta_0).$$

$= (\theta_1 - \theta_0) \times$ சுழலிணையின் திருப்புத்திறன்.

6·10. திறன் (POWER)

வேலை செய்யப்படும் வீதமே திறன் எனப்படும்.

$$\text{திறன்} = \frac{d}{dt}(\text{வேலை})$$

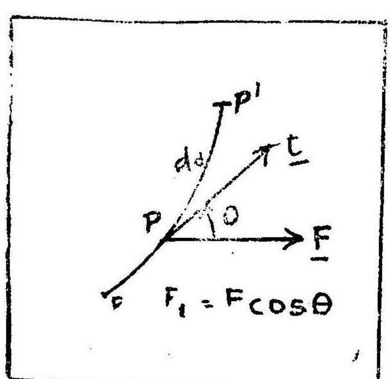
$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\underline{F} \cdot \Delta \underline{r}}{\Delta t} = \underline{F} \cdot \left(\underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} \right)$$

$$= \underline{F} \cdot \underline{v}$$

$$\text{மேலும் வேலை} = \int_{t_0}^{t_1} \text{திறன்} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F} \cdot \underline{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F} \cdot \frac{ds}{dt} \underline{t}\, dt$$

$$= \int_{s_0}^{s_1} F_t\, ds \quad \text{ஆகும்.}$$

இங்கு F_t என்பது, விசை $\underline{F}$-ன் தொடுகோட்டுத் திசையிலமையும் எண்ணிப்பகிர்வு ஆகும். $\underline{F}$-க்கும் ஓரலகு தொடுகோட்டுத்திசையி $\underline{t}$-க்கும் இடையில் அமையும் கோணம் θ எனில், $F_t = F \cos \theta$ ஆகும். [படம் (6·13)-ஐக் கவனிக்க.]



படம் 6·13

மெட்ரிக் '*MKS*' முறையில், திறனின் அலகு வாட் (Watt) எனப்படும்.

ஓர் இயந்திரம் 1 விநாடிக்கு ஒரு ஜூல் (Joule) வீதம் வேலை செய்யுமாயின், அதன் திறன் ஒரு வாட் எனப்படும்.

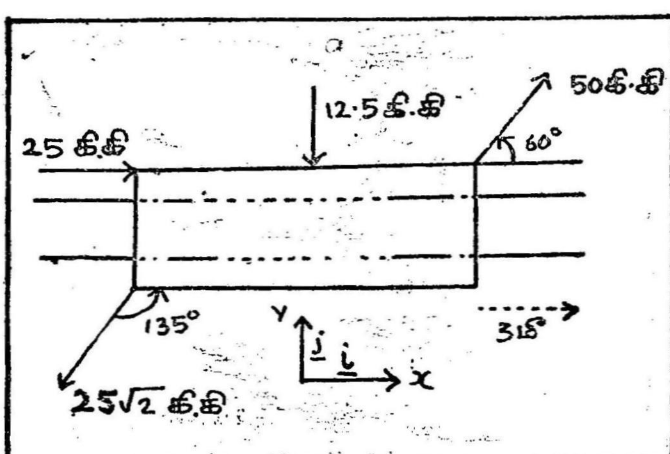
பிரிட்டன் '*FPS*' முறையில் திறனின் அலகு 'குதிரைத்திறன்' (Horse Power) ஆகும்.

ஓர் இயந்திரம், விநாடிக்கு 550 அடி-பவுண்டுகள் வீதம் வேலை செய்யுமாயின் அதன் திறன் ஒரு குதிரைத்திறன் ஆகும். குதிரைத்திறன் *H. P.* எனச் சுருக்கமாகக் குறிக்கப்படும்.

1 குதிரைத்திறன் = 746 வாட்டுகள் = 0·746 கிலோவாட்டுகள்.

6.11. மாதிரிக் கணக்குகள்.

6.11-1. நிலையான இரு தண்டவாளங்களில் தானாகவே இயங்கக் கூடிய கோச்சு வண்டி ஒன்றில், படம் (6·14)-ல் காட்டியவாறு மாறிலி விசைகள் செயற்பட்டு, வண்டியை 3 மீட்டர் நகரச் செய்கின்றன. விசைகளனைத்தும் செய்த வேலையைக் காண்க.



படம் 6·14

முதல் வழி

கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் கோச்சு வண்டியில் செயற்படும் விசைகளும், வண்டியியங்கும் திசையில் அவை பெற்ற இடப் பெயர்ச்சிகளும் செய்த வேலைகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை :

விசை $\underline{F}$ (கி.கி)	இயங்கும் திசையில் இடப்பெயர்ச்சி (மீட்டரில்) $\underline{d}$	செய்த வேலை $\underline{F} \cdot \underline{d}$ (மீ.கி.கி)
$\underline{F}_1 = 25\,\underline{i}$	$3\,\underline{i}$	75
$\underline{F}_2 = -12{\cdot}5\,\underline{j}$	0	0
$\underline{F}_3 = 25\,\underline{i} + 25\sqrt{3}\,\underline{j}$	$3\,\underline{i}$	75
$\underline{F}_4 = -25\,\underline{i} - 25\,\underline{j}$	$3\,\underline{i}$	-75

எனவே விசைகள் செய்த மொத்த வேலை $= 75$ மீ.கி.கி.

இரண்டாவது வழி

இங்கு விசைகளனைத்தும் மாறிலிகளானதால், அவற்றின் தொகு பயனைக் கண்டும் செய்த வேலையை வரையறுக்கலாம்.

$$\text{இங்கு } \underline{R} = \sum_{k=1}^{4} \underline{F_k} = 25\,\underline{i} + (25\sqrt{3} - 37{\cdot}5)\,\underline{j} \text{ கி.கி.}$$

இடப்பெயர்ச்சி $\underline{d} = 3\,\underline{i}$ மீ.

$\therefore$ தொகு பயன் விசை செய்தவேலை $\underline{R} \cdot \underline{d} = 75$ மீ.கி.கி.

6·11-2. $\underline{F} = 2y\,\underline{i} + xy\,\underline{j}$ என்னும் மாறுபடும் விசையின் செயற்படுபுள்ளி O-என்னும் தொடக்கப்புள்ளியில் உள்ளது. O-விலிருந்து, $\underline{r} = 2\,\underline{i} + \underline{j}$ என்னும் நிலைத்திசையியைப் பெற்ற P என்னும் புள்ளிக்கு, ஒரு நேர்கோட்டில் இடப்பெயர்ச்சி ஏற்படுவதாகில், விசை செய்த வேலை யாது?

இங்கு $\underline{F} = 2y\,\underline{i} + xy\,\underline{j}$

$O\,(0,\,0)$, $P\,(2,\,1)$ என்னும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$2y = x \quad \text{ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad d\underline{r} = \underline{i}\ dx + \underline{j}\ dy$$

$$= \underline{i}\ dx + \underline{j}\ \frac{dx}{2}$$

$$\underline{F} = 2y\,\underline{i} + xy\,\underline{j} = x\,\underline{i} + \frac{x^2}{2}\,\underline{j}$$

$$\therefore \text{ விசை செய்த வேலை } = \int_0^r \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left(x\,\underline{i} + \frac{x^2}{2}\,\underline{j}\right) \cdot \left(dx\,\underline{i} + \frac{1}{2}dx\,\underline{j}\right)$$

$$= \int_0^2 xdx + \frac{x^2}{4}dx = \int_0^2 \left(x + \frac{x^2}{4}\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12}\right)_1^2 = \frac{8}{3} = 2{\cdot}67$$

விசை செய்த வேலை $= 2{\cdot}67$

6-11·3. 6, 3, -2 கி.கி என்பவைகளை x, y, z பகிர்வுகளாகப் பெற்ற விசை ஒன்று $A(1, 2, 3)$ மீ. என்னுமிடத்திலிருந்து, $B(2, -3, 1)$ மீ. என்னுமிடத்திற்குக் கடத்தப்படுகிறது விசை செய்த வேலை யாது ?

$$F = 6\,\underline{i} + 3\,\underline{j} - 2\,\underline{k} \text{ கி.கி.}$$

$$d\underline{r} = dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\,\underline{k} \text{ மீ.}$$

$$\text{விசை செய்த வேலை } = \int_A^B \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

$$= \int_A^B (6\,\underline{i} + 3\,\underline{j} - 2\,\underline{k}) \cdot (\underline{i}\,dx + \underline{j}\,dy + \underline{k}\,dz)$$

$$= \int_{1}^{2} 6\,dx + \int_{2}^{-3} 3\,dy + (-2)\int_{3}^{1} dz$$

$$= 6 + 3(-5) - 2(1-3)$$

$$= 6 - 15 + 4$$

$$= -5 \text{ மீ. கி.கி.}$$

6·11-4. ஒரு துகள் $\underline{r}(t) = 2t\,\underline{i} + t^2\,\underline{j}$ (நேரம் வினாடியிலும், தொலைவு சென்டிமீட்டரிலும் அளவிடப்படும்) என்னும் பாதையில் இயங்குகிறது. $\underline{F} = (2 + t)\,\underline{i} + 2t^2\,\underline{j}$ கி. கி. விசை ஒன்று, அதன்மேல் செயல்படுகிறது. $t = 0$-விலிருந்து $t = 3$ வினாடிக்குள் அவ்விசை செய்த வேலை யாது?

$$\text{வேலை} = \int_{t_0}^{t} \underline{F} \cdot \underline{v}\,dt$$

$$= \int_{0}^{3} [(2+t)\,\underline{i} + 2t^2\,\underline{j}] \cdot \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right) dt$$

$$= \int_{0}^{3} [(2 + t)\,\underline{i} + 2t^2\,\underline{j}] \cdot [2\,\underline{i} + 2t\,\underline{j}]\,dt$$

$$= \int_{0}^{3} [2(2 + t) + 4t^3]\,dt$$

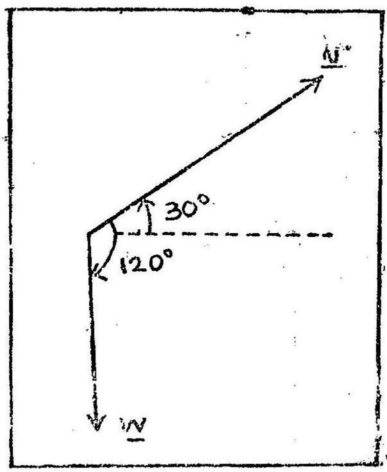
$$= \left(4t + t^2 + t^4\right)_0^3$$

$$= 12 + 9 + 81$$

$$= 102 \text{ செ.மீ.-கி.கிராம்.}$$

6·11-5. 3 மெட்ரிக்டன் எடையுள்ள ஓர் உந்துவண்டி, கிடைத்தளத்துடன் 30° கோணச் சாய்விலுள்ள சாய்தளத்தில்

மணிக்கு 48 கிலோமீட்டர் சீரான வேகத்துடன் மேல்நோக்கி, 300 மீட்டர் செல்லுகிறது. உந்து வண்டியின் திறனைக் காண்க



படம் 6·15

திறன் $= F \cdot v$ (படம் 6·15)-ல் காட்டியவாறு)

$$= 3 \times 1000 \; \frac{48 \times 1000}{60 \times 60} \cos 120^\circ$$

$$= 3000 \times \frac{40}{3} \times -\frac{1}{2}$$

$= -$ 2000 மீ. கி.கி./விநாடி

$= -$ 200 ஜூல்கள்.

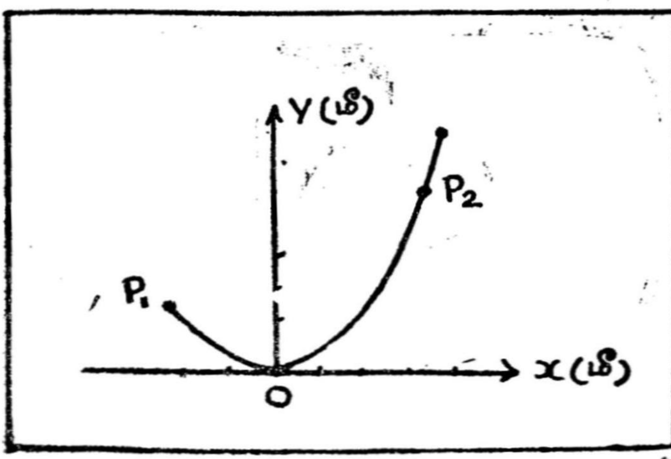
6·12 பயிற்சி

6·12-1. $(4\underline{i} + \underline{j} - 3\underline{k})$ கி. கி. $(3\underline{i} + \underline{j} - \underline{k})$ கி.கி. என்னும் மாறுவிசைகள், ஒரு துகளின்மேல் செயற்பட்டு அதை $(\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k})$ மீ என்னும் புள்ளியிலிருந்து, $(5\underline{i} + 4\underline{j} + \underline{k})$ என்னும் புள்ளிக்கு இடப்பெயரச் செய்கின்றன. இவைகள் செய்யும் மொத்த வேலையைக் காண்க.

[விடை : 40 மீ-கி.கி.]

6·12-2. $x^2 = 4y$ என்னும் பரவளைவுப்பாதையில் இயங்கு துகள் ஒன்றின் மேல் $F = 15\ \underline{i}$ கி கி. என்னும் விசை செயல்ப கிறது. படம் 6.16-ல் காட்டியவாறு, துகள் $P_1\ (-2, 1$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து, $P_2\ (4, 4)$ என்னும் புள்ளிக்கு செல்லும்போது, விசை செய்த வேலை யாது ?

[விடை : 90 மீட்டர் கிலோகிராம்



படம் 6·16

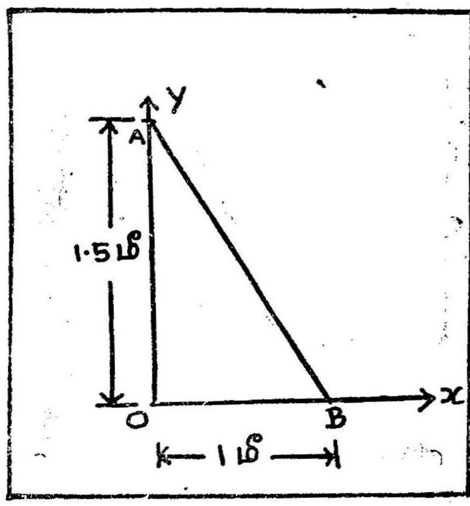
6·12-3. (6·12-2)-வது கணக்கில், F என்னும் விசை யானது $6xy\ \underline{i} - 4y^2\ \underline{j}$ என்றிருக்குமெனில், அவ்விசை செய் வேலையாது ?
[விடை : 8 மீட்டர்-கி கி

6·12-4. ஒருதுகள் $r(t) = 2t\ \underline{i} + t^2\ \underline{j}$ (நேரம் விநா யிலும், தொலைவு சென்டிமீட்டரிலும் அளவிடப்படுபர்) என்னு பாதையில் இயங்குகிறது. $\underline{F} = 2t^2 \underline{i} + (2 + t)\ \underline{j}$ கி.கி என்னு விசை அதன்மேல் செயல்படுகிறது. $t = 0$ விநாடியிலிருந்து $t = 3$ விநாடிக்குள் விசை செய்த வேலையாது ?

[விடை : 72 செ.மீ-கி.கி

6·12-5. தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து, படம் (6·17)- காட்டியவாறு, A என்னும் புள்ளிக்கு இயங்கும் துகள் ஒன்றி $F = x^2y\ \underline{i} + (x + y)\ \underline{j}$ கி.கி என்னும் விசையானது செயல்ப கிறது.

(i) துகள் OA என்னும் பாதையில் இயங்கும்போது,



படம் 6.17

(ii) OBA என்னும் பாதையில் இயங்கும்போது விசை செய்த வேலையை, முறையே காண்க.

[விடை : (i) 1·125 மீ-கி.கி, (ii) 1·75 மீ-கி.கி]

6·12-6. $\bar{F} = x^2\,\bar{i} + (2x^2 + y^2)\,\bar{j}$ கி. கி. என்னும் விசை O-விலிருந்து, A-வுக்குச் செல்லும் துகளின் மேல், படம் (6 18) (238ஆம் பக்கத்தில்) காட்டியவாறு செயற்படுகிறது. துகள்,

(i) OBA என்னும் அரைவட்டப்பகுதி,

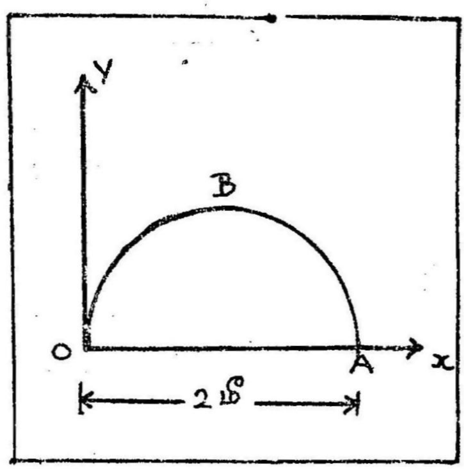
(ii) OA என்னும் நேர்கோடு,

ஆகிய பாதைகளில் இயங்குவதற்கு ஏற்றவாறு, விசை செய்த வேலையைக் காண்க.

[விடை : (i) $\left(\frac{8}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ மீ-கி.கி., (ii) $\frac{8}{3}$ மீ-கி.கி.]

6·12-7. 50 கிலோகிராம் பளுவான கட்டை ஒன்று கிடைத் தளத்துடன் 30° கோணச்சரிவுள்ள மழமழப்பற்ற சாய்தளத்தின் மேல், செங்குத்து உயரம் 1 மீட்டர் உள்ளவாறு கடத்தப்படுகிறது.

சாய்தளத்திற்கும், கட்டைக்கும் இடையேயுள்ள உராய்வுக்கெழு 0·3 எனில், துகளின் மேல் செய்யப்பட்ட வேலையாது?



படம் 6·18

[விடை : $U = 50 \cos 60° \times 2 + 0{\cdot}3 \times 25\sqrt{3} \times 2$
$= 75{\cdot}98$ மீ-கி.கி]

6·12·8 ஒருவன் 7·5 மீட்டர் ஆழக்கிணற்றிலிருந்து ஒரு சீராக ஒழுகும் வாளியைக்கொண்டு தண்ணீர் இழுக்கிறான். தண்ணீர் நிரப்பியிருக்கும்போது வாளியின் எடை 20 கி.கி. அது கிணற்று வாய்மட்டத்திற்கு வந்ததும், வாளியில் பாதி தண்ணீரே இருக்கிறது. செய்யப்பட்ட வேலையைக் கணக்கிடுக.

[விடை : செய்யப்பட்ட வேலை $= \int_0^{7\cdot5} \left(20 - \frac{4}{3} h\right) dh$

$= 112{\cdot}5$ மீட்டர்-கி.கி]

6·12·9. $P (x, y)$ மீட்டர் என்னுமிடத்திலுள்ள ஒரு பொருளை, $\underline{F} = y\underline{i} + 5\underline{j}$ நியூட்டன் என்னும் விசையானது $(-5, 0)$ மீ-என்னுமிடத்திலிருந்து $(5, 0)$ மீ-என்னுமிடத்திற்கு நகரச்செய்வதாகில, அது செய்த வேலை,

(i) ஒரு நேர்கோட்டுப்பாதையில் செல்லும்போதும்

(ii) ஒரு நேர்கோட்டுப்பாதையில் (—5, 0) மீ-லிருந்து (0, 5) மீ-க்கும், பிறகு மற்றொரு நேர்கோட்டுப்பாதையில் (0, 5) மீ லிருந்து (5, 0) மீ-க்கும் செல்லும்போதும் காண்க.

[விடை : (i) 0, (ii) —25 ஜூல்கள்]

6·13. ஆற்றல் (ENERGY)

ஒரு பொருளின் ஆற்றல் என்பது அது வேலை செய்யும் திறமை ஆகும். எனவே, ஆற்றலும் வேலைக்கு உரிய அலகுகளால் அளவிடப்படும்.

ஆற்றல் பலவகைப்படும். வெப்பம், மின்சாரம், ஒளி, அணு ஆகிய யாவையும் வேலை செய்யக் கூடியவை. ஆகவே அவை வெப்ப ஆற்றல், மின் ஆற்றல், ஒளி ஆற்றல், அணு ஆற்றல் எனக் கூறப்படும்.

ஆற்றலைக்கொண்டு பொருள்களை இருவகையாகப்பிரிக்கலாம்.

(i) தம்முடைய இயக்கத்தினுல் (Motion) வேலை செய்யக் கூடிய திறமை பெற்றவை.

(ii) தம்முடைய நிலையினுல் (Position) வேலை செய்யும் திறமை பெற்றவை.

விழும் பொருள், ஓடும் ஊசல், விசைச்சக்கரம் (Fly wheel), இயங்கும் பீரங்கிக்குண்டு ஆகியவற்றிற்கு இயக்க ஆற்றல் (Kinetic Energy) உண்டு. இங்கு ஆற்றல் இயக்கத்தினுல் ஏற்படுகிறது.

வளைந்தவில் ஒன்றில் நிலை ஆற்றல் (Potential Energy) உண்டு. ஒரு கடிகாரத்திற்கு சாவி கொடுத்து அதனுடைய எஃகு வில்லை (Steel Spring) முறுக்கிவைப்பதால், அது தன் இயல்பான வடிவத் திற்கு மீளும்போது, அது உள்ளமைப்பில் உள்ள வெவ்வேறு சக்கரங்களை இயக்கிக் கடிகாரத்தை ஓட்டவைக்கிறது. ஆகவே அதற்கு வேலை செய்யக்கூடிய ஆற்றல் அதன் முறுக்கிய நிலையில் ஏற்படுகிறது. அந்நிலையில் அதற்கு நிலை ஆற்றல் உண்டு.

இது போலவே, உயரத்தில் சேமித்து வைத்துள்ள நீர்த் தேக்கத்தில் நிலை ஆற்றல் உள்ளது. இவ்விதத் தேக்கநீர் சுழலிகளை (Turbines) ஓட்டி வேலை செய்யக்கூடும்.

மேலும் மின்வலி (Electrical), காந்தசக்தி (Magnetic) அல்லது இயந்திர (Mechanical) பொறி அமைப்புகளைக்கொண்டும் ஆற்றலைச் சேமித்து வைக்கலாம்.

6·13-1. இயக்க ஆற்றல் (Kinetic Energy)

ஒரு பொருளின் இயக்க ஆற்றல், அதன் இயக்கத்தால் ஏற்படக்கூடிய ஆற்றலாகும். அவ்வாற்றலானது அப்பொருளின் வேகம் அழிவதற்குமுன் அதன்மேல் பொருத்தப்பட்ட விசைகளுக்கு (Impressed Forces) எதிராக அப்பொருள் செய்யக்கூடிய வேலையால் அளக்கப்படும்.

m நிறையைப்பெற்ற துகள் (அல்லது பொருள்), ஏதேனும் t என்னும் நேரத்தில் v என்னும் திசை வேகத்துடன், தன் பாதையில் ஏதேனும் ஒரு நிலை ஆன P_0 என்னும் புள்ளியிலிருந்து இயங்கட்டும்.

அதன்மீது $\underline{F}$ என்ற விசை, துகள் இயங்கும் எதிர்த்திசையில் செயற்படட்டும். நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

$$\underline{F} = m\,\underline{a} = m\frac{d\,\underline{v}}{dt}$$

துகள் பாதையில், ஒரு கழிநுண் அளவு, $\triangle t$ என்னும் நேரத்தில், $\triangle \underline{r}$ தொலைவு நகர்வதாகில், விசைக்கு எதிராகச் செய்யப்பட்ட வேலை :

$$= -\underline{F}\cdot d\,\underline{r}$$

$$= -\underline{F}\cdot\underline{v}\,dt \qquad \left(\because \quad \underline{v} = \frac{d\,\underline{r}}{dt}\right)$$

$$= -m\frac{d\,\underline{v}}{dt}\cdot\underline{v}\;dt$$

$$= -m\,(d\,\underline{v}\cdot\underline{v})$$

ஆகவே துகள் ஓய்வுபெறுமுன், விசைக்கு எதிராகச் செய்கிறவேலை,

$$= -\int_{\underline{r}}^{r_0} \underline{F}\cdot d\,\underline{r}$$

$$= -\int_{\underline{v}}^{0} m\,(d\,\underline{v}\cdot\underline{v})$$

$$= -\frac{1}{2} m \int_{\underline{v}}^{0} d(\underline{v} \cdot v)$$

$$= -\frac{1}{2} m \left[\underline{v} \cdot \underline{v} \right]_{\underline{v}}^{0}$$

$$= +\frac{1}{2} m (\underline{v} \cdot \underline{v})$$

$$= \frac{1}{2} mv^2 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே திசை வேகம் $\underline{v}$ உடன் இயங்கும் m நிறையுள்ள துகளின் (அல்லது பொருளின்) இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} mv^2$.

அதாவது, ஒரு துகளின் இயக்க ஆற்றலானது, அதன் நிறை, அதன் திசைவேக வர்க்கம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனில் அரைபங்காகும்.

6·13-2. ஆற்றலின் அலகு.

துகளின் நிறை கிராமிலும், வேகம் சென்டிமீட்டர்/வினாடியிலும் கொடுக்கப்பட்டால், இயக்க ஆற்றல் எர்க்குகளில் அறிவிக்கப் படும். நிறை கிலோகிராமிலும், வேகம் மீட்டர்/வினாடியிலும் கொடுக்கப்பட்டால், இயக்க ஆற்றல் ஜூல்களில் (Joules) வரை யறுக்கப்படும்.

6·13-3. ஒரு துகளுக்கு உரிய வேலை-ஆற்றல் முறை (Work-Energy Method for a Particle.)

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

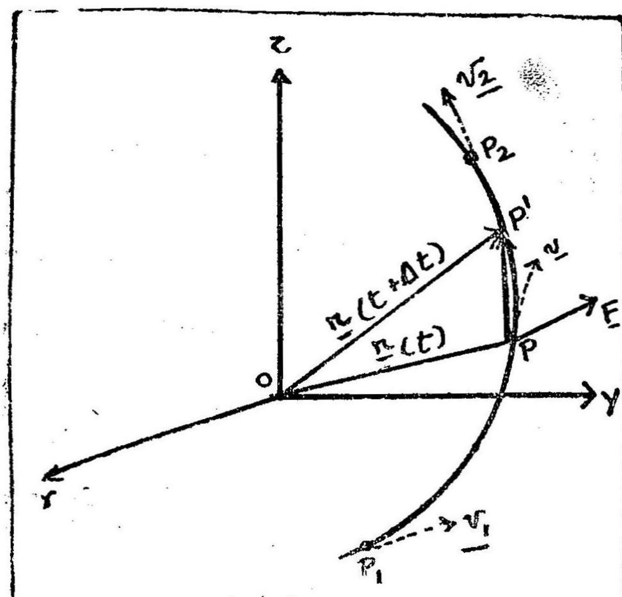
$$\underline{F} = m\,\underline{a} \text{ ஆகும்.}$$

இந்நியதியின்படி, துகளின் இயக்க நிலைகளை அறிவது, விசை சடத்துவமுறை (Force-Inertia Method) எனப்படும். சில சமயங் களில் இம்முறையைப் பயன்படுத்தி இயக்க இயல் சமன்பாடுகளைத் தருவிப்பது இயலாத செய்கையாகும். அப்போது ஆற்றல்-அழிவின்மைத்தன்மையின் அடிப்படையில் 'ஆற்றல்' அல்லது 'வேலை ஆற்றல்' முறையினைப் பயன்படுத்தலாம். இம்முறையில், ஒருபக்கம் விசை இடப்பெயர்ச்சி என்பவைகளுக்கும், மற்றொரு பக்கம் துகளின் நிறை, திசைவேகம் என்பவைகளுக்கும் உள்ள தொடர்பு வரையறுக்கப்படும்.

இயக்க இயல் நிலைகளை அறிய மற்றொரு முறையும் உண்டு. அதுவே உந்தமுறை (Method of Momentum) ஆகும். இம்முறை தாக்கீடு, திருப்புத்திறன் என்னும் கருத்துக்களின் அடிப்படையில் உருவானதாகும். பொதுவாக, துகளின் முடுக்க சார்பந்தமான கணக்குகளில், திசை-சடத்துவமுறை பயன் தரக்கூடியதாகும். இடப்பெயர்ச்சி, திசைவேகம் ஆகியவை தெரியும்போது, ஆற்றல் முறை சிறந்ததாகும். துகள் இயங்குவதற்கு எடுக்கும் நேரம், திசைவேகம் ஆகியவைகளுக்கு முக்கியத்துவம் அளிக்கப்படும் நேரங்களில் தீர்வுகளை எளிதாகப் பெறுவதில் 'தாக்கீடு முறை' சிறப்புடையதாகும்.

6.13.4. வேலை-ஆற்றல் தத்துவம் (Work-Energy Principle)

ஒரு துகளின் ஏதேனுமொரு இடப்பெயர்ச்சியில், அதன் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் மாறுதல், அதன்மீது பொருத்தப்பட்ட விசைகள் செய்யும் வேலைக்குச் சமமாகும்.



படம் 6.19

P என்னும் துகளானது, பரந்தவெளியில், $P_1\ P\ P_2$ என்னும் பாதையில் படம் (6.19)-ல் காட்டியவாறு இயங்குவதாகக்

கொள்க. t என்னும் ஏதேனுமொரு நேரத்தில். துகள் P என்னுமிடத்திலுள்ளபோது, அதன் மேல் புறத்திருந்து தாக்கும் விசைகளின் தொகுபயன்விசை (Resultant of all external Impressed Forces) யை $\underline{F}$ எனவும், துகளின் திசைவேகம் $\underline{v}$ எனவும் கொள்க. நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

$$\underline{F} = m\,\underline{a} \quad \text{ஆகும்.}$$

$$\text{அதாவது,}\quad \underline{F} = m\,\frac{d\,\underline{v}}{dt} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \text{(i)}$$

துகள், $\triangle t$ என்னும் நேரத்தில், $\triangle\,\underline{r}$ என்னும் இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறுவதாகில்,

$$d\,\underline{r} = \frac{d\,\underline{r}}{dt} \quad \text{ஆகும்.} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \text{(ii)}$$

இவ்விரண்டு திசைகளின் எண்ணிப்பெருக்கியை வரையறுக்க,

$$\underline{F}\cdot d\,\underline{r} = m\,\frac{d\,\underline{v}}{dt}\cdot\frac{d\,\underline{r}}{dt}$$

$$= m\,\frac{d\,\underline{v}}{dt}\cdot\underline{v}\,dt$$

$$= m\,d\,\underline{v}\cdot\underline{v} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \text{(iii)}$$

என்பது கிடைக்கும்

துகளானது P_1-லிருந்து, P_2-க்குச் செல்லும்போது, அதன் தொடக்க, இறுதி நிலைகளை $r_1(t)$, $r_2(t)$, என்னும் நிலைத்திசையிகளும், அவற்றின் திசை வேகங்களை, $\underline{v_1}$, $\underline{v_2}$ என்பவைகளும் வரையறுப்பதாகக் கொள்க.

அப்போது, (iii) சமன்பாட்டின் இருபுறங்களையும் தொகையிடல் செய்தால்,

$$\int_{P_1}^{P_2} F\cdot d\,r = \int_{P_1}^{P_2} = m\,d\,\underline{v}\cdot\underline{v}$$

$$= \int_{\underline{v_1}}^{\underline{v_2}} m\,\underline{v}\cdot d\,\underline{v}$$

$$= \frac{1}{2} m \int_{\underline{v}_1}^{\underline{v}_2} d(\underline{v} \cdot \underline{v})$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\underline{v} \cdot \underline{v} \right]_{v_1}^{v_2}$$

$$\therefore \int_{r_1}^{r_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2 \right) \quad \ldots \quad (iv)$$

(iv)-வது சமன்பாட்டின் இடதுபுறம், $\underline{F}$ என்னும் விளைவுவிசை துகளின்மேல் செய்த மொத்த வேலையைக் குறிப்பிடுகிறது. வலது புறம், இறுதி தொடக்க இயக்க ஆற்றல்களின் வேறுபாட்டை அறிவிக்கிறது. எனவே,

'செய்தவேலை = இயக்க ஆற்றலின் மாறுதல்'

என்றாகிறது. இத்தத்துவம், **வேலை-ஆற்றல் தத்துவம்** (Work-Energy Principle), அல்லது பொதுவாக **ஆற்றல் தத்துவம்** (Principle of Energy) என்றும் கூறப்படும்.

குறியீடு முறையில் இத்தத்துவம்

$U_{1-2} = T_2 - T_1$ என எழுதப்படும்.

6·13-5. இயக்க ஆற்றலின் கூறுகள்.

இயக்க ஆற்றலின் (x, y, z)-பகிர்வுகளைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

T = இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} m (\underline{v} \cdot \underline{v})$$

$$= \frac{1}{2} m (v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k}) \cdot (v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k})$$

$$= \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

6·13-6. வேலை-ஆற்றல் தத்துவச் சமன்பாட்டின் கூறுகள்.

வேலை ஆற்றல் தத்துவச் சமன்பாட்டை (x, y, z)-பகிர்வுகளுக்கு உரிய சமன்பாடுகளாகப் பிரிக்க முடியும்.

வேலை ஆற்றல் தத்துவச் சமன்பாடு

$$\int_{\underline{r_1}}^{\underline{r_2}} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \frac{1}{2} m (\underline{v_2} \cdot \underline{v_2}) - \frac{1}{2} m (\underline{v_1} \cdot \underline{v_1})$$ ஆகும்.

இங்கு $\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}$

$\underline{r} = x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k}$

$\underline{v} = v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k}$ எனின், மேலே உள்ள சமன்பாடு,

$$\int_{P_1 (x_1, y_1, z_1)}^{P_2 (x_2, y_2, z_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \frac{1}{2} m \left[\left(v_x \right)_2^2 - \left(v_x \right)_1^2 \right] + \frac{1}{2} m \left[\left(v_y \right)_2^2 - \left(v_y \right)_1^2 \right] + \frac{1}{2} m \left[\left(v_z \right)_2^2 - \left(v_z \right)_1^2 \right]$$

ஆகும்.

$$\therefore \int_{x_1}^{x_2} F_x \, dx = \frac{1}{2} m \left[\left(v_x \right)_2^2 - \left(v \right)_1^2 \right]$$

$$\int_{y_1}^{y_2} F_y \, dy = \frac{1}{2} m \left[\left(v_y \right)_2^2 - \left(v_y \right)_1^2 \right]$$

$$\int_{z_1}^{z_2} F_z \, dz = \frac{1}{2} m \left[\left(v_z \right)_2^2 - \left(v_z \right)_1^2 \right]$$

எனவே விசையின் குறிப்பிட்ட அச்சுப்பகிர்வு செய்யும் வேலை அவ்வச்சில் நிகழும் இயக்க ஆற்றல் மாறுதலுக்குச் சமமாகும்.

6·13 7. நிலை ஆற்றல் (Potential Energy)

ஒரு பொருளின் நிலை ஆற்றலானது. அதன் நிலையைப் பொருத்து அது பெறும் ஆற்றலாகும். ஒரு பொருளின் நிலை பொருளின் நிலை ஆற்றல், அப்பொருள் அந்நிலையிலிருந்து தன் இயல்பான நிலைக்குத் திரும்பும்போது அது செய்யக்கூடிய வேலை யாகும்.

எல்லா வகையான விசைகளும் நிலை ஆற்றலைப் பிறப்பிக்கக் கூடியன என்று சொல்லுவதற்கில்லை. மிகையான (Positive) அல்லது குறையான (Negative) வேலையைச் செய்யக்கூடிய விசைகள் மட்டுமே நிலை ஆற்றலைப் பிறப்பிக்கக் கூடியவை. மறைந்திடும் விசைகள் (Dissipative Forces) மிகையான வேலையைச் செய்யாது எனவே, அவ்வித விசைகள் புறக்கணிக்கத் தக்கவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக. ஒரு துகள் உராய்வுள்ள கிடைத்தளத்தில் F என்னும் ஒரு மாறுத உராய்வுத்தடைக்கு எதிராக 's' தொலைவு நகரும்போது, செய்யும் வேலை Fs ஆகும். அத்துகளை மீண்டும் அதன்பாதையில், தன் தொடக்க நிலைக்குக் கொண்டுவர மறுமுறையும் சம அளவு வேலையே செய்யப்படவேண்டும். ஏனெனில் பொருளின் இயக்கதிசை மாறும்போது, உராய்வுத் திசையும் மாறுவதால் செய்யவேண்டிய வேலை 'Fs' ஆகும். எனவே இவ்வகையில், மொத்தம் செய்ய வேண்டிய வேலை $2\,Fs$ ஆகும்.

மேலும் நிலை ஆற்றலைப்பிறப்பிக்க மற்றொரு தேவையான பண்பு, விசைகள் தனித்தன்மை வாய்ந்தவையாக (Uniqueness) இருக்கவேண்டும்.

செய்யும் வேலையை அளவிடுவதற்குப் பயன்படுத்தக்கூடிய ஓர் அளவையாக, நிலை ஆற்றலைக் கருதிடும்போது, ஆற்றலைப் பெற்ற பொருளின் ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட நிலை (Position) அல்லது நிலைமை (State)க்கு ஒத்திருக்கக்கூடிய ஒரு தனித்த நிலை ஆற்றல் மதிப்பு, கணிப்பு முறையைச்சாராமல் இருக்கவேண்டியதாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக நிலைக்குத்துத் தளத்தில் 2 கிலோ கிராம் எடையுள்ள துகளின் இயக்கம், முதல் 1 மீட்டர் கிழக்கு நோக்கி பிறகு ஒரு மீட்டர்மேல் நோக்கி, அதன்பிறகு ஒரு மீட்டர் தெற்கு நோக்கி முன்பு இருந்த நிலைக்கு வருவதாகக் கொள்க. ஒவ்வொரு இடப்பெயர்ச்சியும், புவியீர்ப்புக்காரணமாக துகளின் எடை

செய்த வேலையை மதிப்பிடுக. துகளின் எடையானது. கிழக்குப் புறம் இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறும்போது பூச்சிய வேலையைச் செய்கிறது. மேல் நோக்கிச் செல்லும்போது 2 மீட்டர்-கிலோ கிராம் வேலையைச்செய்து. அந்த நிலையில் 2 மீட்டர் கிலோகிராம் அளவுள்ள நிலை ஆற்றலைச் சேமித்து வைத்துள்ளது. மேற்குப் புறமாக உள்ள இடப்பெயர்ச்சியில், எடை ஒரு வேலையையும் செய்வதில்லை. துகள் இறுதியாக, தெற்குநோக்கிக் கீழே இயங்கும் போது, சேமித்து வைத்த நிலையாற்றல் பயன்படுத்தப்பட்டு, எடை 2 மீட்டர் கிலோகிராம் அளவுள்ள வேலையைச்செய்கிறது.

இங்கு, துகளானது ஒரு குறிப்பிட்ட மூடிய பாதையில், நிலை ஆற்றல் ஒரு வித குறைபாடின்றி சரிகட்டப்பட்டு, இயங்குகிறது. மேலும் எடை செய்த வேலையின் குறியில் கூட்டுத்தொகை பூச்சிய மாகிறது. எனவே ஒரு குறிப்பிட்ட விசை வகையைச் சேர்ந்த எடை, துகளை ஒரு மூடிய பாதையில் இயங்கச்செய்யும்போது, இவ்விதச்சரிகட்டுதல், நிலை ஆற்றலில் நிறைவேறுகிறது. இவ்வித மான விசையே, காப்பு விசை (Conservative Force) எனப்படும்.

6·14. காப்பு விசை (Conservative Force).

ஆய்வுக்கு எடுத்த துகள் அல்லது பொருள் ஒன்று உறைவிடம் கொள்ளும் எல்லா நிலைகளிலும் $\underline{F}$ என்னும் விசையானது வரை யறுக்கப்பட்டு, ஒவ்வொரு மூடிய பாதையில் எடுக்கும் இடப் பெயர்ச்சியில், அவ்விசை செய்யும் நிகர வேலை பூச்சியம் எனில், அவ்வகையான விசை, காப்பு விசை எனப்படும்.

குறியீடு முறையில், இது

$$\int_{r_0}^{r_0} \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0 \quad \text{அல்லது} \quad \oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$$

என அறிவிக்கப்படும்.

காப்பு விசையானது, மிகையான வேலையையும், குறைவான வேலையையும் செய்யக்கூடியதாகும். ஏனெனில் நிகர வேலை பூச்சியமாவதற்கு இருவழிகள் உள. முதல் வழியில், அது எப்போதும் பூச்சிய வேலையைச் செய்கிறது. அல்லது, இரண்டா வது வழியில் அது மிகை, குறை என்னும் இருவகையான வேலை களையும் செய்யவேண்டும்.

விசை எப்போதும் பூச்சிய வேலையைச்செய்வதாகில், ஆற்றலை மனத்திற்கொண்டு நோக்கும்போது, அவ்வித விசையைக் கருதத் தேவையில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு சாய்தளத்திற்கும், அதில் வழுக்காமல் உருளும் பொருளுக்கும், இடையே அமையும் நேர் தத்து எதிர்த் தாக்கவிசை பூச்சிய வேலை செய்கிறது. இவ்விதவிசை, கட்டுப்பாடு (Constraint) விசை எனப்படும். அத்தகைய விசை, நிலையாற்றலுக்கு ஒருவிதத்திலும் உதவுவதில்லை. அவ்வித விசை நிலை ஆற்றல் கணிப்புகளில் விலக்கப்படும்.

இதற்கு மாருக, காப்பு விசை, குறைவான வேலையை ஒரு இடப்பெயர்ச்சியின் பகுதியில் செய்வதாகில், அது மற்ற பகுதியில் மிகையான வேலையைச் செய்தாலன்றி, நிகர வேலை பூச்சியமாகாது.

எனவே $\underline{F}$ என்பது ஒரு காப்பு விசை எனில்,

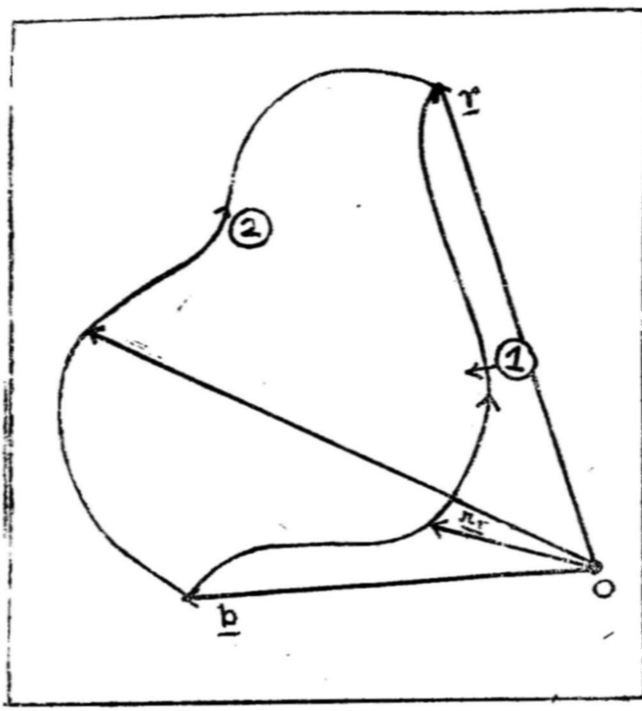
$\oint \underline{F} \cdot d\,\underline{r} = 0$ என்பது தேவையானதும், போதியதுமான நிபந்தனையாகும்.

6·14-1. காப்பு விசைக்கு உரிய நிலை ஆற்றலை வரையறுத்தல்

எந்த காப்பு விசைக்கும், பொருள் பெறும் நிலை ஆற்றலை வரையறுக்க முடியும். $\underline{F}$ என்னும் காப்பு விசை, கொடுக்கப்பட்ட துகள் அல்லது பொருள் ஒன்றில் செயல்படுவதாகக் கொள்க. $\underline{b}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியின் நிலைத்திசையி ஆகுக. பொதுவாக, இப்புள்ளி தேவைக்கு ஏற்றவாறு அடிப்படைப் புள்ளியாக (Base Point) எடுக்கப்படும். $\underline{F}$-ன் காரணமாக $\underline{b}$-ஐக்குறித்து, பொருள் அல்லது துகள் $\underline{r}$ என்னும் நிலைத்திசையியையுடைய ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் இருக்கும்போது, அது ஒரு குறிப்பிட்ட நிலை ஆற்றலைப் பெற்றுள்ளது. அதன் மதிப்பு $\underline{F}$ என்னும் விசை $\underline{b}$ யிலிருந்து $\underline{r}$ க்குச் செல்லும் இடப்பெயர்ச்சியில் செய்யும் வேலையின் எதிர்க்குறி அளவால் அளவிடப்படும். எனவே,

$$V = \text{நிலையாற்றல்} = -\int_{b}^{r} \underline{F} \cdot d\,\underline{r}$$

மேலும் $\underline{b}$ -ஐக்குறித்துத் துகள் பெறும் நிலை ஆற்றல் தனித்தன்மை (Unique) வாய்ந்துள்ளதா, அல்லது துகள் $\underline{b}$ லிருந்து $\underline{r}$ க்குச் செல்லும் பாதையைச் சார்ந்துள்ளதா எனவும் நோக்குதல் பயன்



படம் 6·20

தருவதாகும். அதற்காக படம் (6·20)-ல் காட்டியவாறு (1), (2) என்று குறிக்கப்பட்டுள்ள இரு பாதைகளை எடுக்கவும், $\underline{F}$ என்பது காப்புவிசை யானதால்,

$$\oint \underline{F} \cdot d\,\underline{r} = 0$$

அதாவது $$\int_{\underline{b}}^{r} \underline{F} \cdot d\,\underline{r_1} + \int_{\underline{r}}^{b} \underline{F} \cdot d\,\underline{r_2} = 0$$

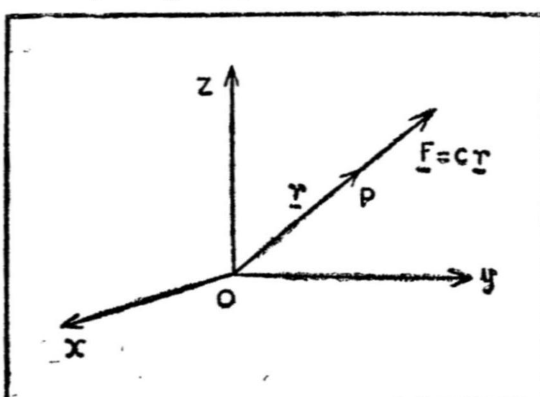
அதாவது $\int_{b}^{r} \underline{F} \cdot d\,\underline{r_1} - \int_{b}^{r} \underline{F} \cdot d\,\underline{r_2} = 0$

அதாவது $\int_{b}^{r} \underline{F} \cdot d\,\underline{r_2} = \int_{b}^{r} \underline{F} \cdot d\,\underline{r_2} = 0$

எனவே, ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றொரு புள்ளிக்குச் செல்லும்போது, காப்பு விசை செய்யும் வேலை, துகள் இயங்கிச் சென்ற பாதையைச் சார்ந்திராமல், தொடக்க, இறுதி நிலைப்புள்ளிகளைத்தான் சார்ந்திருக்கிறது. ஆகவே நிலையாற்றலின் மதிப்பு தனித்தன்மை வாய்ந்ததாகும் (Unique).

6·14-2. காப்பு விசைக்களங்கள் (Conservative Force Fields)

பரந்த வெளியில், (x, y, z) என்னும் நிலையான குறிப்பிட்டச்சு அமைப்பில், துகள் ஒன்றின்மேல், $\underline{P}$ என்னுமிடத்தில், படம் (6·21)-ல் காட்டியவாறு, அதன் அச்சுத் தொலைவுகளாலேயே



படம் 6·21

வரையறுக்கப்பட்ட $\underline{F}$ என்னும் விசையானது செயற்படுவதாகக் கொள்க. அப்போது $\underline{F}$ ஐ,

$$\underline{F} = \underline{F}\,(x, y, z) = X(x, y, z)\,\underline{i} + Y(x, y, z)\,\underline{j} + Z(x, y, z)\,k$$

என்று அதன் எண்ணிப்பகிர்வுகளின் வாயிலாகவும் எழுதலாம். இவ்வித விசையானது ஒரு விசைக்களத்தை (Force Field) வரையறுப்பதாகவும் கொள்ளப்படும். எனவே ஒவ்வொரு புள்ளியின் நிலையை அறியும்போது, அப்புள்ளியில் செயல்படும் விசையை, அதன் அச்சுத் தொலைவுகளாலேயே முற்றிலும் வரையறுக்க இயலும்.

துகள் அல்லது பொருள் அதன் பாதையில் ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையிலிருந்து (1வது நிலையிலிருந்து) மற்றொரு குறிப்பிட்ட நிலைக்கு (2வது நிலைக்கு) நகர்வதாகில், அத்தகைய விசை செய்யும் வேலை,

$$U_{1-2} = \int_{1\text{-வது நிலை}}^{2\text{-வது நிலை}} \underline{F} \cdot d\,\underline{r} \quad \text{ஆகும்.}$$

மேலும் $\underline{F}(x, y, z)$ என்னும் விசையை ஏதேனும் $\phi(x, y, z)$ என்னும் எண்ணிச் சார்பலனின் சரிவாக (அதாவது $\nabla\phi(x, y, z)$ $=\text{grad}\,\phi$, gradient of a Scalar Function) வெளியிட முடியுமானால்,

$$U_{1-2} = \int_{1\text{வது நிலை}}^{2\text{வது நிலை}} \nabla\phi \cdot d\,\underline{r}$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\underline{k} \right) \cdot (\underline{i}\,dx + \underline{j}\,dy + \underline{k}\,dz)$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \right)$$

$$= \int_1^2 d\phi = \phi_2 - \phi_1$$

ஆகவே இத்தகைய விசை செய்யும் வேலை, துகள் இயங்கும் பாதையைச் சார்ந்திராமல், அதன் தொடக்க, இறுதிப்புள்ளிகளையே சார்ந்திருக்கிறது. $\phi(x, y, z)$ என்னும் சார்பலனை, நிலைப்பண்புச் சார்பலன் (Potential Function) என்றும் கூறுவது வழக்கம்.

தொடக்க, இறுதிப்புள்ளிகள் ஒன்றுபடும்போது, துகளின் பாதை ஒரு மூடிய பாதையாவதால்,

$$U_{1-2} = \int_{1\text{-வது நிலை}}^{2\text{-வது நிலை}} d\phi = \phi_1 - \phi_1 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $\underline{F}\ (x, y, z)$ என்னும் விசை செய்த வேலை பூச்சியமாவதால், $\underline{F}$ என்பது ஒரு காப்பு விசையாகிறது. எனவே நிலையாற்றலின் வரையரைப்படி,

$$U_{1-2} = \int_{1\text{வது நிலை}}^{2\text{வது நிலை}} \underline{F} \cdot d\,\underline{r} = \int_1^2 \underline{F} \cdot d\,\underline{r}$$

$$= \int_0^2 \underline{F} \cdot d\,\underline{r} - \int_0^1 \underline{F} \cdot d\,\underline{r}$$

$$= -V_2 - (-V_1)$$

$$= V_1 - V_2 \quad \text{ஆகும்}$$

$\therefore\ U_{1-2} = \phi_2 - \phi_1 = -V_2 + V_1$ என்றாகிறது.

இதிலிருந்து, $V(x, y, z) = -\phi\,(x, y, z)$ என்பது கிடைக்கிறது.

அதாவது, நிலையாற்றலானது நிலைப்பண்புச்சார்பலனின் எதிர் மதிப்பைப் பெற்றுள்ளதாகும்.

எனவே விசை, காப்பு விசையாவதற்கு மற்றொரு வரையறை,

$$\underline{F} = \nabla \phi = \text{grad}\,\phi \quad \text{ஆகும்.}$$

மற்றும் துகளின் ஒரு கழிநுண் இடப்பெயர்ச்சிக்கு, காப்புவிசை செய்யும் வேலை,

$dv = \underline{F} \cdot d\,\underline{r} = d\,\phi\,(x, y, z) = -dv\,(x, y, z)$ என்றாவதால்

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

$$= -\frac{\partial v}{\partial x}dx - \frac{\partial v}{\partial y}dy - \frac{\partial v}{\partial z}dz$$

$$\therefore \quad X = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\therefore \quad \underline{F} = X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k}$$

$$= -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\underline{k}\right)$$

$= -$ grad V ஆகும்.

தவிரவும், இங்கு

$$X = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad Z = -\frac{\partial v}{\partial z}$$ என்பதால்

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = 0$$ என்பது கிடைக்கிறது.

அவ்வாறே,

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$ என்றும்

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0$$ என்றும் காணலாம்.

எனவே $\underline{F} = X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k}$ என்பது ஒரு காப்புவிசை யாவதற்கு, அதன் எண்ணிப்பகிர்வுகளான X, Y, Z என்பவை

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$$

என்னும் சமன்பாடுகளை நிறைவேற்ற வேண்டும்.

$\underline{F}$ என்னும் திசையி-இன் சுழல் (Curl of Vector $\underline{F}$)

$$\text{Curl } \underline{F} = \nabla \wedge \underline{F} = \underline{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)$$

$$+ \underline{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{zx}\right) + \underline{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படுவதால், மேற்கூறிய சமன்பாடுகள் Curl $\underline{F} = 0$ என்பதற்கு சரிநிகராகும்.

ஆகவே $\underline{F}$ என்னும் ஒரு விசை, காப்பு விசையாக இருப்பதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனைகள் :

(i) $\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$, அல்லது

(ii) $\underline{F} = \nabla \phi = -\nabla V$, (v) அல்லது

(iii) Curl $\underline{F} = 0$ ஆகும்.

6·43. காப்பு விசைகளுக்கு ஒரு சில எடுத்துக்காட்டுகள்

(அ) மாறுவிசை (Constant Force) ஒரு காப்பு விசையாகும்.

$$\text{மாறு விசை செய்த வேலை} = \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}_1} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

$$= \underline{F} \cdot \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}_1} d\underline{r} = \underline{F} \cdot (\underline{r}_1 - \underline{r}_0)$$

துகள் ஒரு மூடிய பாதையில் இயங்கிடும்போது. நிகர இடப்பெயர்ச்சி பூஜ்சியமாகும். அதாவது $\underline{r}_1$ ஆனது $\underline{r}_0$ உடன் ஒன்றுபடும். அப்போது, மாறு விசை செய் வேலை,

$$= \underline{F} \cdot (\underline{0}) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அல்லது $\underline{F} = a\,\underline{i} + b\,\underline{j} + c\,\underline{k}$ என்னும் மாறுவிசையை எடுக்கவும் (a, b, c) என்பவை இங்கு மாறிலிகளாகும். இவ்விசையை ϕ என்னும் எண்ணிச்சார்பலனின் சரிவாக (Gradient)ப் பெறலாம். காட்டாக $\phi = ax + by + cz$ எனக்கொள்.

$$\therefore \quad \nabla \phi = a\,\underline{i} + b\,\underline{j} + c\,\underline{k} = \underline{F} \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore$ $\underline{F}$ என்பது ஒரு காப்பு விசையாகும்.

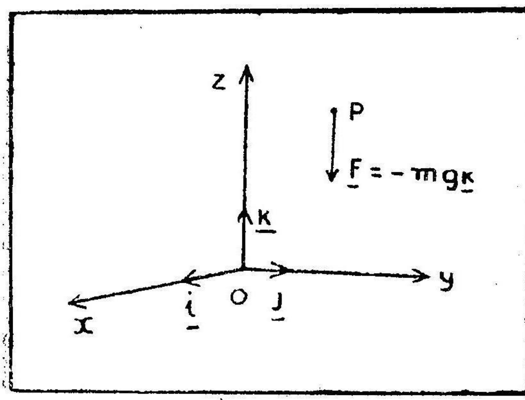
(ஆ) புவியின் வளைபரப்பிற்கு அருகாமையில் m நிறையைப் பெற்ற துகளின் மேல் செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசையானது ஒரு மாறுவிசையாகக் கருதப்படும்.

எனவே $\underline{F} = -mg\,\underline{k} = -W\,\underline{k}$

$\phi = -mgz$ எனக்கொள்க.

$V = -\phi = mgz$

$\nabla v = -\nabla\phi = mg\,\underline{k} = \underline{F}$ ஆகும்.



படம் 6·22 (a)

மேலும் $U_{1-2} = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F} \cdot d\,\underline{r}$

$$= \int mg\,\underline{k} \cdot d\,\underline{r}$$

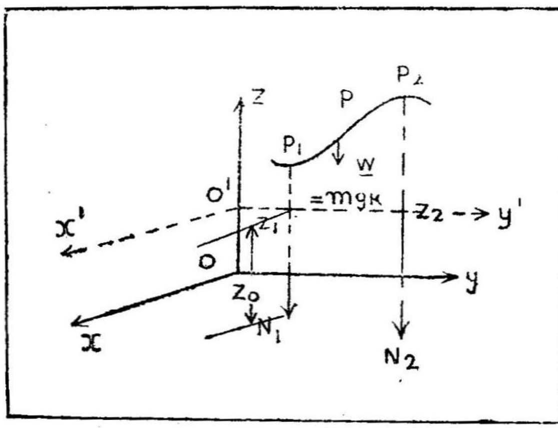
$$= mg \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$= mg\,(Z_2 - Z_1) = V_2 - V_1$$

= நிலை ஆற்றலின் மாறுபாடு ஆகும்.

எனவே எடை செய்த வேலையானது, இருநிலைகளுக்கு ஏற்ற தான நிலை ஆற்றலின் மாறுபாட்டால் அறிவிக்கப்படுகிறது. இங்கு நிலை ஆற்றலின் மாறுபாடு, தொடக்க, இறுதி நிலைகளைத்தான்

சார்ந்திருப்பதால், நிலை ஆற்றலை (xoy) தளத்திலிருந்து அளவிட வேண்டிய நிலைமை இல்லை. ஏதேனும் ஒருதரப்பட்ட கிடைத் தளத்தில் இருந்தும் நிலை ஆற்றலின் மாறுபாட்டைப் பெறலாம். [படம் 6.22 (b)-ஐப் பார்க்க]



படம் 6·22 (b)

$$\therefore \quad U_{1-2} = mg\left(\overline{Z_2 - Z_0} - \overline{Z_1 - Z_0}\right)$$

$$= mg\,(Z_2 - Z_1) \text{ ஆகும்.}$$

(இ) நியூட்டனின் ஈர்ப்புவிதி காரணமாக இரு பொருள் களுக்கு இடையேயுள்ள ஈர்ப்பு விசையானது,

$$\underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12} = \frac{GMm}{r^2}\,\underline{L} \text{ ஆகும்.}$$

M நிறையுள்ள பொருளை நோக்கி, m நிறையுடைய பொருள் இழக்கப்படுவதாகக் கொண்டால், ஈர்ப்பு விசை செய்த வேலை,

$$U_{1-2} = -\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F} \cdot d\,\underline{r}$$

$$d\,\underline{r} = d(r\,\underline{L}) = dr\,\underline{L} + r\,d\,\underline{L}$$

$$\underline{L} \cdot \underline{L} = 1, \qquad \underline{L} \cdot d\,\underline{L} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad F \cdot dr = -\left(\frac{GMm}{r^2}\underline{L}\right)\cdot(dr\,\underline{L} + r\,d\underline{L})$$

$$= -\frac{GMm}{r^2}(dr\,\underline{L}\cdot\underline{L} + r\,\underline{L}\cdot d\underline{L})$$

$$= -\frac{GMm}{r^2}\,dr\,(1+0)$$

$$= -\frac{GMm}{r^2}\,dr \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad U_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{GMm}{r_2}\,dr$$

$$= GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) - \left(-\frac{GMm}{r_1}\right) - \left(-\frac{GMm}{r_2}\right)$$

எனவே நிலையாற்றல் இங்கு

$$V = -\frac{GMm}{r} \text{ என்று வரையறுக்கப்படும்.}$$

மேலும் புவியின் நிறையை M ஆகக்கொண்டு, m நிறையைப் பெற்ற துகள் ஒன்று, புவியின் மையத்திலிருந்து $r\,(>R)$ தொலைவில் உள்ளதாகக் கருதும்போது,

$$G\,M\,m = W\,R^2 \text{ ஆகும்.}$$

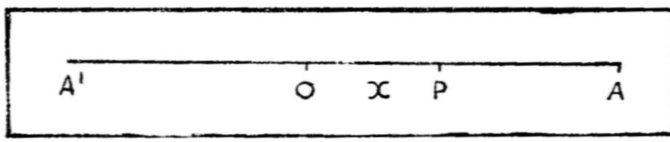
$\therefore \quad V = -\dfrac{W\,R^2}{r}$ என்னும் சமன்பாடு, துகளின் நிலையாற்றலை வரையறுக்கிறது.

இவ்வகையான ஈர்ப்பு விசைக்கு, அது செய்த வேலையானது, துகள் இயங்குப் பாதையைச் சார்ந்திராமல், துகளின் தொடக்க, இறுதி நிலைகளாலேயே வரையறுக்கப்படுவதால், இவ்வித ஈர்ப்பு விசையும் காப்பு விசைக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு.

6·11-1. நேர்கோட்டு இடப்பெயர்ச்சிக்கு நேர் விகிதத்தில் அமையும் விசை.

ஒரு நேர்கோட்டில் இயங்கும் துகள் அல்லது பொருள் ஒன்றின் மேல் செயற்படும் விசை, துகள் அல்லது பொருளில் ஏற்பட்ட இடப்பெயர்ச்சிக்கு நேர்விகிதத்தில் உள்ளதாகக் கொள்க.

படம் (6.23)-ல் காட்டியவாறு, $A'OA$ என்னும் நேர்கோட்டில், O என்பது ஒரு நிலையான புள்ளியைக் குறிக்கட்டும். O-வைத் தொடக்கப்புள்ளியாகவும், துகள் இயங்கும் நேர்கோட்டை x அச்சாகவும் கொள்ளவும்.



படம் 6.23

$\underline{F} = -kx\,\underline{i}$ என்னும் விசையானது, துவக்கப்புள்ளியிலிருந்து அளவிடப்படும் தொலைவிற்கு நேர் விகிதத்தில் உள்ளதாகும். k என்பது ஒரு மாறிலியாகும். x-ன் மதிப்பு மிகையாயுள்ளபோது, விசையானது O-வை நோக்கியும், x-ன் மதிப்பு குறைவாயுள்ளபோது, விசையானது, மறுபடியும் O-வை நோக்கியும் அமைவதைக் காணலாம். இத்தகைய விசையானது ஹூக்கின் விதியைத் (Hook's law) தழுவியதோர் இழுவிசையாகும்.

$$\oint \underline{F} \cdot d\,\underline{r} = \oint(-kx\,\underline{i}) \cdot (\underline{i}\,dx)$$

$$= -k \oint x\,dx$$

$$= -k\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x_0}^{x_0} = 0$$

எனவே $\underline{F} = -kx$ என்பது ஒரு காப்பு விசையாகும்.

காட்டாக, ஹூக்கின் விதிப்படி, மீட்சியுறு கம்பியொன்றின் இடப்பெயர்ச்சி அதன் இயல்பான நிலையிலிருந்து (Unstretched Position) படம் (6.24)-ல் காட்டியவாறு அளவிடப்படுவதாகில், அந்நிலையில் அக்கம்பியிலுள்ள இழுவிசை.

$$F = -kx\,\underline{i} \quad \text{ஆகும்.}$$

[இங்கு k என்பது வில்மாறிலி (Spring constant) எனப்படும்.]

எனவே, B என்னுமிடத்திற்கு உரிய நிலை ஆற்றல்,

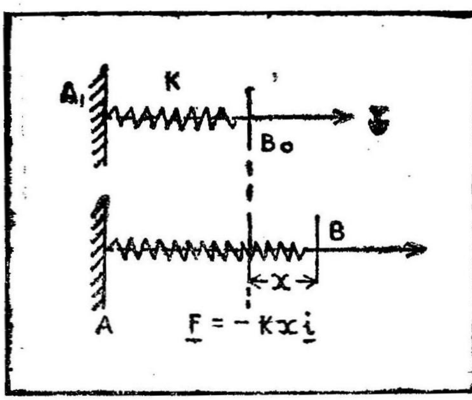
$$= -\int_{\underline{r}=0}^{\underline{r}_B} \underline{F} \cdot d\,\underline{r}$$

$$= - \int_0^x (-kx\,\underline{i}) \cdot (\underline{i}\,dx)$$

$$= k \int_0^x x\,dx$$

$$= \frac{kx^2}{2}$$

எனவே, இழுவிசைக்கு உரிய நிலை ஆற்றல் $V = \frac{1}{2} kx^2$ ஆகும்.



படம் 6 24

6·14-5. $\underline{F} = f(x)\,\underline{e}$ என்னும் விசையை நோக்குக. இங்கு $\underline{e}$ என்பது நிலையான ஓரலகுத்திசையி ஒன்றைக் குறிக்கிறது.

அவ்வித விசை செய்யும் வேலை,

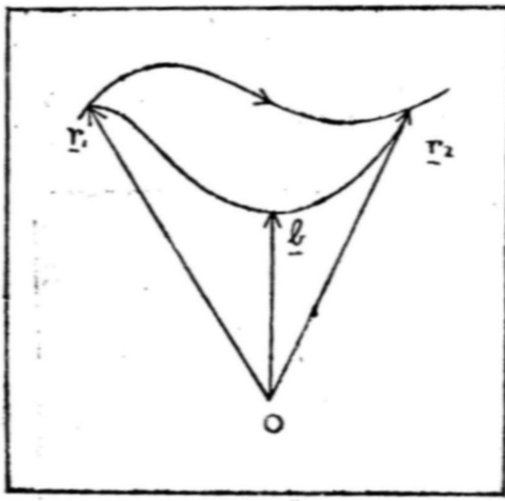
$$= \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}_0} f(x)\,(l\,\underline{i} + m\,\underline{j} + n\,\underline{k}) \cdot (dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\,\underline{k})$$

$$= l \int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx + m f(x) \int_{y_0}^{y_0} dy + n f(x) \int_{z_0}^{z_0} dz = 0$$

எனவே $\underline{F} = f(x)\,\underline{e}$ என்பதும் காப்புவிசைக்கு மற்றோர் எடுத்துக் காட்டாகும்.

6-15. இயந்திர இயல் சார்ந்த ஆற்றலின் காப்பு அல்லது அழிவின்மை விதி (Conservation of Mechanical Energy).

நிலையாற்றலின் கருத்துகள், இயக்க விசையியல் சார்ந்த கணக்குகளுக்கு எளிதாகத் தீர்வு காண்பதில் பயன்படுத்தப்படும். இங்கு விசையானது காப்புவிசையானதால் (Conservation Force)



படம் 6·25

துகள் அல்லது பொருள் படம் (6.25) ல் காட்டியவாறு, r_1 -லிருந்து $\underline{r}_2$ நிலைக்கு நகர்வதாகில் அவ்விசை செய்த வேலையை, b என்னும் ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையான புள்ளி வழியாகப் பாதை ஒன்றை அமைத்தும் பெறலாம்.

$$\therefore \quad \int_{\underline{r}_1}^{r_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\underline{r}_1}^{b} \underline{F} \cdot d\underline{r} + \int_{b}^{r_2} \underline{F} \cdot dr$$

$$= -\int_{\underline{b}}^{r_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} + \int_{\underline{b}}^{r_2} \underline{F} \cdot dr'$$

$$= -V_1 + V_2 = -(V_1 - V_2) = -\Delta V$$

$$= -\Delta (p \cdot e) \text{ ஆகும்}$$

அதாவது, காப்பு விசை ஒன்று செய்யும் வேலையானது, அது துகள் அல்லது பொருள் ஒன்றின் மேல் தாக்கி, அத்துகளுக்கு (பொருளுக்கு) ஏற்படுத்தும் நிலையாற்றல் இழப்பிற்குச் சமனாகும். எனவே வேலை $= V_1 - V_2$ ... ... (i)

மேலும் ஆற்றல் தத்துவப்படி வேலை,

$$= \int_{r_1}^{r_2} \underline{F} \cdot d\,\underline{r} = \frac{1}{2} m (v_2)^2 - \frac{1}{2} m (v_1)^2$$

$$= T_2 - T_1$$

$$= \Delta T$$

$$= \Delta (k \cdot e) \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(i), (ii) என்னும் சமன்பாடுகளை ஒன்று சேர்த்திட,

$$\Delta (k \cdot e) = \text{வேலை} = -\Delta (p \cdot e)$$

அல்லது, $\Delta (k \cdot e) + \Delta (p \cdot e) = 0$

அல்லது, $\Delta (k \cdot e + p \cdot e) = 0$

அதாவது, இயக்க ஆற்றல் $+$ நிலையாற்றல் $=$ ஒரு மாறிலி.

இதனைப் பின்வருமாறு கூறுவது வழக்கம் :

துகள் அல்லது பொருள் ஒன்று, காப்பு விசைத் தொகுதிக்குக் கட்டுப்பட்டு இயங்கும்போது, அதன் இயக்க, நிலையாற்றல்களின் கூட்டுத்தொகை மாருதிருக்கும் இயக்க, நிலை ஆற்றல்களின் கூட்டுத்தொகையை E எனக்கொண்டால்,

$$E = T + V = \text{ஒரு மாறிலியாகும்.}$$

6·16. மாதிரிக் கணக்குகள்.

6·16-1. பந்து ஒன்று விநாடிக்கு 42 மீட்டர் வேகத்தில், கிடைத்தளத்துடன் θ கோணச்சரிவில் எறியப்படுகிறது. அது அடையக்கூடிய மிகப்பெரிய உயரம் 22·5 மீட்டர் எனில், அப்போது அதன் வேகம் யாது? (காற்றின் உராய்வுத்தடை புறக் கணிக்கப்படுவதாகவும், $g = 9 \cdot 8$ மீ/ விநாடி$)^2$ எனவும் கொள்க.)

இங்கு செயற்படும் விசை பந்தின் எடை (W) ஆகும்.

$\therefore$ எடை செய்யும் வேலை $= -W \times 22 \cdot 5$

இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் மாறுதல், விசை செய்யும் வேலைக்குச் சமமாதலால்,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)v^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)(42)^2 = -22\cdot5\ W$$

$$\therefore\ v^2 = (42)^2 - 45\ g$$
$$= 1764 - 45\times9\cdot8$$
$$= 1764 - 441$$
$$= 1323$$

$$\therefore\ v = \sqrt{1323} = 36\cdot372 \text{ மீ/வினாடி.}$$

மற்றொருவழி

மிகப் பெரிய உயரத்தில் பந்து இயங்கும்போது அதன் திசைவேகம் கிடையாக இருக்கும். மேலும்,

$$22\cdot5 = \frac{42\times42\times\sin^2\theta}{2\times9\cdot8} \text{ என்பதால்,}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}, \text{ அல்லது } \theta = 30^\circ \text{ ஆகும்.}$$

எறிபொருள் இயக்கத்தில் $v_0 \cos\theta$ எப்பொழுதும் மாறிலியாவதால், அதன் மதிப்பு $= 42\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 36\cdot372$ மீ/வினாடி ஆகும்.

6·16-2. 3 அலகுக் கிடைத்தொலைவுக்கு, ஓரலகு உயரத்தைப் பெற்ற சரிவான கூரை ஒன்றின்மேல், செங்கல் ஒன்று ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு, 3 மீட்டர் சறுக்கி, 5 மீட்டர் உயரத்திலமைந்துள்ள வீட்டிறைப்பை (Eaves) அடைந்து, அங்கிருந்து தானாகவே இயங்கித் தரையில் படம் (6.26)-ல் காட்டியவாறு விழுகிறது. செங்கலுக்கும், கூரைக்கும் ஏற்றதான உராய்வுக்கெழு 0·3 எனில், செங்கல் கூரையை விட்டு விலகும்போது அதன் திசைவேகத்தையும், அது கட்டடத்திலிருந்து கிடையாக எத்தொலைவில் தரையை அடிக்கிறது என்றும் காண்க.

சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்து திசையில் இயக்கம் இல்லாததால்,

$$Fy = 0$$

எனவே $N - W\cos\theta = 0$

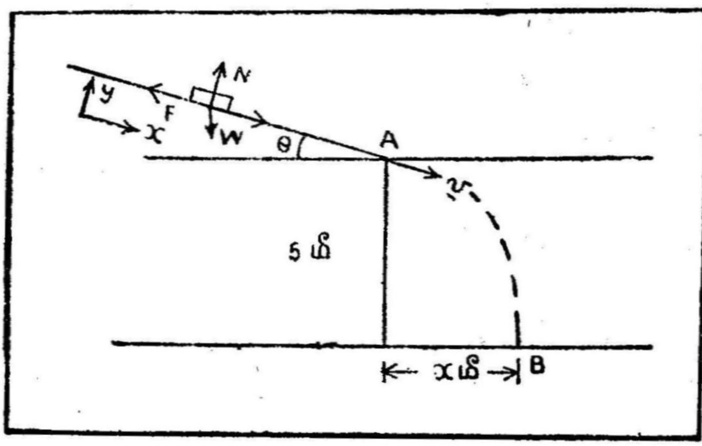
$$N = W\cos\theta = W\times\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\ W}{\sqrt{10}}$$

$$F = \text{உராய்வு விசை} = \mu N = 0\cdot3\times\frac{3W}{\sqrt{10}} = \frac{0\ 9\ W}{\sqrt{10}}$$

இயக்கம், கூரையின் கீழ்முகமாக அமைவதால் அத்திசையில் அமையும் விசைகளின் கூடுதல்

$$= W \sin \theta - F$$

$$= \frac{W}{\sqrt{10}} - \frac{0 \cdot 9\, W}{\sqrt{10}} = \frac{W}{10\sqrt{10}}$$



படம் 6 26

இவ்விசைத் தொகுதி செய்த வேலை,

$$= \frac{W}{10\sqrt{10}} \times 3 = \frac{3\,W}{10\sqrt{10}}$$ ஆகும்.

செங்கலானது கூரையை விட்டு விலகும்போது, v என்னும் திசை வேகத்தைப் பெற்றிருக்குமெனில் 'வேலை-ஆற்றல்' தத்துவப்படி,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{W}{g}(v^2 - 0) = \frac{3\,W}{10\sqrt{10}}$$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{3g}{5\sqrt{10}} = \frac{3 \times 9 \cdot 8}{5\sqrt{10}} = \frac{29 \cdot 4}{15 \cdot 8115}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{29 \cdot 4}{15 \cdot 8115}} = 1 \cdot 3623$$ மீ/வினாடி.

செங்கல் வீட்டிறைப்பை [படம் (6·26)-ல் A என்னும் புள்ளியை] அடையும்போது, அது விநாடிக்கு 1·3623 மீ வேகத்துடன் கிடைக் கோட்டுடன் $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ என்னும் இறக்கக் கோணத்தில் தரையை நோக்கி இயங்குகிறது. அப்போது செங்கல் ஓர் எறிபொருள் இயக்கத்தைப் பெறுகிறது.

எனவே $v_0 = 1\cdot3623$ மீ/விநாடி

$$\tan\theta = \frac{1}{3}$$

எறிபொருள் இயங்கும் பாதையின் சமன்பாடு,

$$y = x\tan\theta - \frac{9x^2}{2v_0^2\cos^2\theta} \text{ ஆகும்.}$$

செங்கல் B (மீ, -5 மீ) என்னும் பள்ளியில் தரையை அடிப்பதாகக் கொள்க. எனவே $B(x, -5$ மீ) என்னும் புள்ளி எறிபொருள் இயங்கும் பாதையில் உள்ளதாகும்.

$$\therefore \quad -5 = x \times \tfrac{1}{3} - \frac{9\cdot8x^2}{2\times(1\cdot3623)^2 \times \frac{9}{10}} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $25\sqrt{10}\,x^2 - 9x - 135 = 0$

$$x = \frac{9 \pm 206\cdot8}{158\cdot115}$$

x-ன் மதிப்பு மிகையாக இருக்கவேண்டும் என்பதால்,

$$x = \frac{9 + 206\cdot8}{158\cdot115}$$

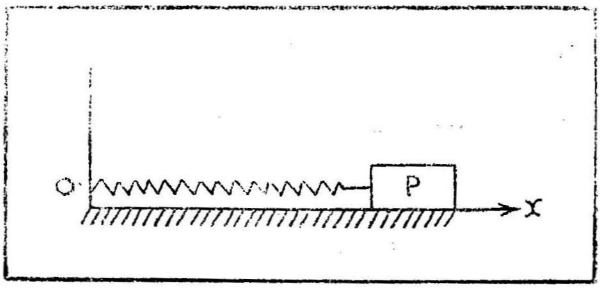
$$= 1\cdot365 \text{ மீட்டர்.}$$

6·16-3. படம் (6-27)-ல் காட்டியவாறு, 50 கிலோகிராம் எடையுள்ள கட்டை ஒன்று திருகுச் சுருள்வில் ஒன்றில் கட்டப்பட்டு, சுருள்வில்லில் 10 செமீ மீட்சியை ஏற்படுத்துமாறு இழுக்கப்படுகிறது. கிடைத்தளத்திற்கும் கட்டைக்கும் இடையே உள்ள உராய்வுக்கெழு 0·3 எனவும் சுருள்வில் மாறிலி (Spring Constant) 4 கி.கி/செமீ எனவும் கொடுக்கப்பட்டால்,

(i) சுருள்வில் தன் இயல்பான நிலையை (Undeformed State) அடையும்போது அதன் திசை வேகத்தையும்,

(ii) அது பெறும் மிகப் பெரிய இறுக்கத்தையும் (Maximum Compression) காண்க.

செங்குத்துத் தளத்தில் இயக்கம் ஏதும் இல்லாததால், கட்டையில் செயற்படும் எதிர்த்தாக்க விசை, $N = 50$ கி கி ஆகும்.



படம் 6 27

எனவே உராய்வு விசை $F = \mu N = 0{\cdot}3 \times 50 = 15$ கி.கி
10 செ.மீ மீட்சியில திருகுசுருள் செய்த வேலை

$$= -\frac{1}{2}kx^2$$

$$= -\frac{1}{2} \times 4 \times 100$$

$$= -200 \text{ செமீ., கி.கி.}$$

10 செ.மீ இடப்பெயர்ச்சியில் உராய்வு விசை செய்தவேலை
$$= 15 \times 10 = 150 \text{ செ.மீ, கி.கி}$$

கட்டையின் தொடக்கத் திசை வேகம் பூச்சியமாகும். திருகு சுருள் தன் இயல்பான நிலையை அடையும்போது, கட்டையின் திசை வேகத்தை v எனக்கொள்க.

கட்டையானது O-வை நோக்கி இயங்குவதால்,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{50}{9}\right)(v^2-0^2) = 200-150$$

$$\frac{25}{981}v^2 = 50 \qquad \therefore \quad v^2 = 1962$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{1962} = 44{\cdot}28 \text{ செ.மீ/விநாடி.}$$

சுருள் இயல்பான நிலையை அடையும்போது, கட்டை 44·28 மீ/விநாடி என்னும் வேகத்துடன் இயங்குவதால், அது சுருளில்

இறுக்கத்தை உண்டுபண்ணும். சுருள் மிகப்பெரிய இறுக்கத்தைப் பெறும்போது, கட்டை அமைதி நிலையில் இருக்கும். ஆகவே சுருள் பெறும் மிகப்பெரிய இறுக்கம் x செ.மீ. என்றால்,

$$-\frac{1}{2}\times 4\times x^2 - 15x = \frac{1}{2}\left(\frac{50}{981}\right)(0-v^2)$$

$$-2x^2 - 15x = \frac{25}{981}\times -1962$$

$$= -50$$

$$\therefore\ 2x^2 + 15x - 50 = 0$$

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{225+400}}{4}$$

$$= \frac{-15 \pm 25}{4}$$

$$x = \frac{-15+25}{4} = \frac{10}{4} = 2\cdot5 \text{ செ.மீ.}$$

$$\left(x = -\frac{40}{4} = -10 \text{ புறக்கணிக்கத்தக்கது}\right)$$

6·16·4. 3, 5 கிலோகிராம் நிறைகளைக் கொண்ட இரு பொருள்கள், ஒரு நிலையானதும், மழமழப்பானதும், இலேசானதுமான கப்பி ஒன்றின்மீது செல்லும் நீளவல்லாத (Inextensible) ஓரிழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இரு நிறைகளும் சமமான நிலையிலுள்ளபோது, விடுவிக்கப்படுமாயின், 1·5 மீட்டர் தொலைவுள்ள இடப் பெயர்ச்சியில், அத்தொகுதியின் விளைவியக்கத்தின் வேகத்தைக் காண்க.

கப்பியானது மழமழப்பாயிருப்பதால், கயிற்றின் இழுவிசை, இழை முழுவதிலும் சமமாக இருக்கும். மேலும் அவ்விழை மீள் சக்தியற்றதாகையால், சிறிய நிறையின் மேன் முகமான வேகம், இயக்க முழுவதிலும், பெரிய நிறையின் கீழ் முகமான வேகத்திற்குச் சமனாதல் வேண்டும். மேலும் இழு விசைகள் சமனும் எதிருமான வேலைகளைச் செய்வதால், இங்கு பொருள்களின் எடைகள் மட்டும் வேலை செய்வதாகக் கொள்ளப்படும்.

விசைகள் செய்த வேலை $\downarrow = 5\times 9\cdot8\times 1\cdot5 - 3\times 9\cdot8\times 1\cdot5$

$$= 29\cdot4 \text{ மீ-கி.கி}$$

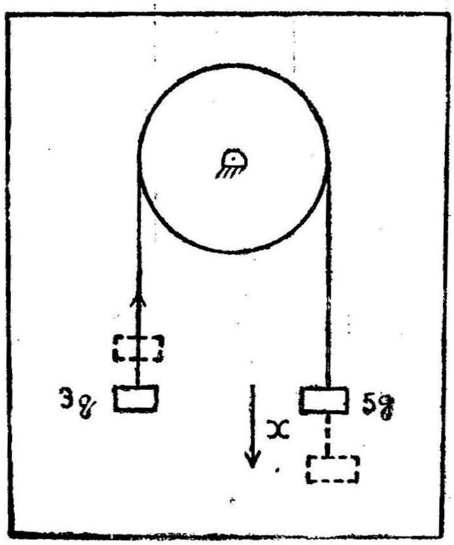
தொகுதியின் வேகம் v எனின்,

இயக்க ஆற்றலின் மாறுபாடு

= இறுதி இயக்க ஆற்றல்—தொடக்க இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2}(3+5)\ \{v^2-0^2)\}$$

$$= 4v^2$$



படம் 6·28

எனவே 'வேலை—ஆற்றல்' தத்துவத்தின்படி,

$$4v^2 = 29{\cdot}4$$

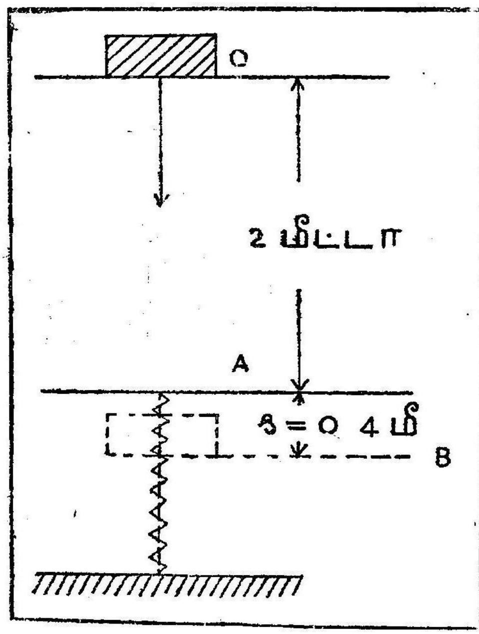
$$v^2 = 7{\cdot}35$$

$$\therefore \quad v = 2{\cdot}711 \text{ மீட்டர்/விநாடி.}$$

6·16-5. 10 கிலோகிராம் எடையுள்ள கட்டை ஒன்று 2 மீ. தொலைவிலிருந்து திருகுசுருள் ஒன்றின்மேல் படம் (6·29)-ல் காட்டியவாறு விழுகிறது. சுருள் வில்லில் 40 செ.மீ அளவு இறுக்கம் ஏற்பட்டு, கட்டை ஓய்வு நிலையில் ஒரு கணப்பொழுது இருக்குமெனில், வில் மாறிலியின் (Spring Constant) மதிப்பைக் காண்க.

முதல் முறை

கட்டை ஓய்வு நிலையிலிருந்து விழுவதால் தொடக்க வேகம் $v_1 = 0$; அது 2 மீட்டர் செங்குத்தாக கீழ்நோக்கி இயங்கும் போது, அதன் வேகம் A-யில், v_2 எனக் கொள்க.



படம் 6 29

$U_{1-2} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து.

$$W \times 2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}(v_2^2 - 0)$$

$$v_2 = \sqrt{4g} = 2\sqrt{9 \cdot 81} = 6 \cdot 264 \text{ மீ/விநாடி.}$$

கட்டை சுருள்வில்லைத் தாக்கும்பொழுது, அதன் எடை, மறுபடியும் கீழ்நோக்கிய திசையில் மிகையான வேலையைச் செய்கிறது. எனவே 40 செ.மீ இடப்பெயர்ச்சியில், கட்டை செய்த வேலை $= 10 \times 0 \cdot 4 = 4$ மீ.கி.கி.

அப்போது சுருள் வில்லானது, கட்டையின் மேல் எதிரான வேலையைச் செய்கிறது.

வில் செய்த எதிர் வேலை $= -\frac{1}{2} ks^2$

$$= -\frac{1}{2} k (0{\cdot}4)^2$$

$$= -0{\cdot}08\,k$$

எனவே கட்டை செய்யும் நிகர வேலை

$$U_{1-2} = 4 - 0{\cdot}08k$$

கட்டை சுருள் வில்லைத் தாக்கும் நேரத்தில், விநாடிக்கு 6·264 மீ வேகத்தைப் பெற்றுள்ளது. அதன் வேகம் சுருள்வில் 40 செமீ இறுக்கத்தைப் பெறும்போது பூச்சியமாகிறது. எனவே 'வேலை - ஆற்றல்' தத்துவத்தின் படி,

$$4-0{\cdot}08\,k = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{9{\cdot}81}\right)(0-6{\cdot}264^2)$$

$$= -20$$

$$\therefore\quad 0{\cdot}08\,k = 24$$

$$\therefore\quad k = \frac{24}{0{\cdot}08} = 300 \text{ கி.கி. விசை/மீட்டர்}$$

இரண்டாவது முறை.

கட்டையானது தொடக்கத்தில் ஓய்விலிருந்து விழுகிறது. மேலும் அது சுருள்வில் இறுக்க நிலையைப் பெறும்போதும் ஒரு கண நேரம் ஓய்வு நிலையில் உள்ளது. எனவே இரு இடங்களிலும் அதன் வேகம் பூச்சியமாகிறது. எனவே,

இயக்க ஆற்றல் மாற்றம் $= T_2 - T_1 = 0$ ஆகும்
ஆனால் "வேலை-ஆற்றல்" விதிப்படி,

$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

$$\therefore\quad U_{1-2} = 0$$

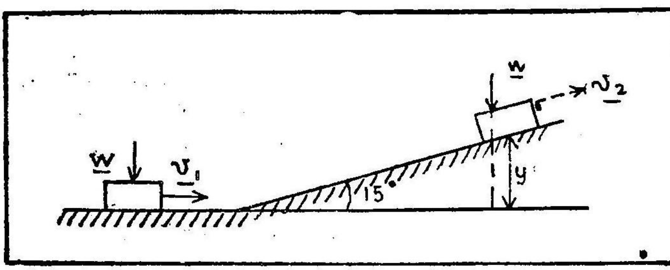
$$W(h+s) - \frac{1}{2} ks^2 = 0$$

$$10\,(2 + 0{\cdot}4) - \frac{1}{2} k\,(0{\cdot}4)^2 = 0$$

$$24 - 0{\cdot}08\,k = 0$$

அதாவது. $k = 300$ கி.கி. விசை/மீட்டர் ஆகும்.

6·16-6. 5 கிலோகிராம் எடையுள்ள கட்டை ஒன்று மழமழப்பான கிடைத்தளம் ஒன்றில், விநாடிக்கு 7 மீட்டர் வேகத்தில் படம் (6.30)-ல் காட்டியவாறு இயங்குகிறது. 0 என்னுமிடத்தில் அது 15° கோணச்சரிவைப்பெற்ற சாய்தளம் ஒன்றின்மேல் இயங்குவதானல், அது சாய்தளத்தில் ஓய்வு பெறும் வரை சென்ற தொலைவைக் கணக்கிடுக. (சாய்தளத்தில் உராய்வுவிசை புறக்கணிக்கப்பட்டதாகக் கொள்க.)



படம் 6·30

கிடைத்தளத்தை ஆதாரத்தளமாகக் (Datum Level) கொள்க. கட்டையை ஒரு துகளாகக் கருதுக. இங்கு $E = T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ என்னும் நியதியைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{g}\right) v_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{g}\right) 7^2 = \frac{1}{2}\cdot 49 \left(\frac{5}{g}\right),$$

$$V_1 = 0.$$

கட்டை சாய்வு தளத்தில் s மீட்டர் தொலைவு சென்று ஓய்வு நிலையை அடைவதாகக் கொள்க. அப்போது ஆதாரத்தளத்திலிருந்து அதன் உயரத்தை y மீட்டர் எனக்கொள்க.

$$\therefore \quad T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{g}\right) v_2^2 = 0$$

$$V_2 = 5 \times y$$

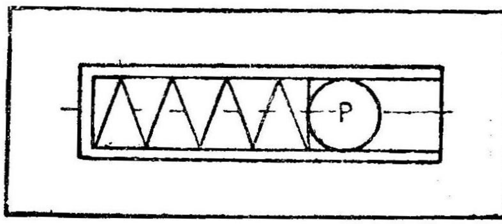
$$\therefore \quad \frac{1}{2} \times 49 \times \frac{5}{g} = 5y$$

$$y = \frac{49}{2g} \text{ மீட்டர்}$$

$$s = \frac{y}{\sin 15^\circ} = \frac{49}{2 \times 9\cdot 81 \times \sin 15^\circ}$$

$$= 9\cdot 649 \text{ மீட்டர்}$$

6·16-7. சுருள்வில் பொருத்தப்பட்ட விளையாட்டுத் துப்பாக்கியின் அமைப்பு படம் (6·31)-ல் காட்டியவாறு உள்ளது. சுருள் வில்லின் இயல்பான நீளம் 15 செமீ அதன் விறைப்புக் குணகம் (Coefficient of stiffness) 0·5 கிகி/செமீ சுருள்வில்லில் 5 செமீ இறுக்கம் ஏற்படும்போது, 25 கிராம் நிறையுள்ள சிறு குண்டு ஒன்றை எந்த வேகத்தில் அது இயங்கச் செய்யும்?



படம் 6·31.

சுருள்வில் சேமித்து வைத்துள்ள நிலை ஆற்றலின் மதிப்பு,

$$= \frac{1}{2}(0{\cdot}5)\,5^2 = 6{\cdot}25 \text{ செமீ-கிகி}$$

சிறு குண்டின் தொடக்க வேகம் $v_1 = 0$

அதை விடுவிக்கும்போது, சுருள்வில் தன் இயல்பான நிலையைப் பெறுவதால், அப்போது அதன் நிலையாற்றல் = 0 சிறு குண்டு v_2 என்னும் திசைவேகத்துடன் செல்லுமெனில்,

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ என்னும் சமன்பாடு

$$0 + 6{\cdot}25 = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{1000}\right) \times \frac{1}{g} v^2_2 + 0$$

$$\therefore \quad v^2_2 = \frac{6{\cdot}25 \times 2 \times 1000 \times 981}{25}$$

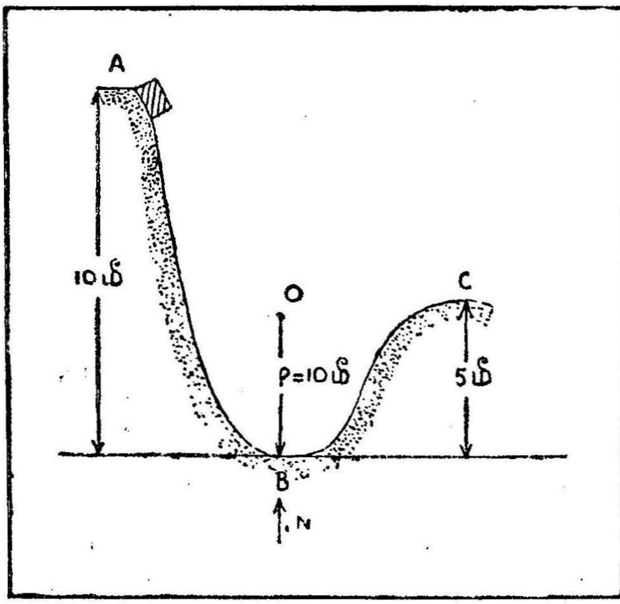
$$v_2 = 10\sqrt{4905} \text{ செ.மீ/வினாடி}$$

$$= \sqrt{49{\cdot}05} \text{ மீ/வினாடி}$$

$$= 7{\cdot}004 \text{ மீட்டர்/வினாடி.}$$

6·16-8. 50 கிலோகிராம் எடையுள்ள கட்டை ஒன்று படம் (6·32)-ல் காட்டியவாறு A என்னும் இடத்தில் ஓய்வு நிலையிலிருந்து விடப்பட்டு, மழமழப்பான சறுக்குப்பாதையில் வழுக்கி ஓடுகிறது.

(i) அது வளையாரம் (Radius of curvature) 10 மீட்டர் உள்ள B என்னும் மிகத்தாழ்மையான இடத்தை அடையும்போது, சறுக்குப்பாதையின் மீதும், கட்டையின் மீதும் செயல்படும் விசையைக் காண்க.



படம் 6·32

(ii) அது C என்னுமிடத்தில் பாதுகாப்பான (Safe) எச்சிறும வளையாரத்தைப் பெற்றிருக்கும்?

(i) $T_A = 0, \quad T_B = \frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right) v^2_B$

எடை ஒன்றுதான் இங்கு வேலை செய்கிறது.

$$U_{A-B} = +(W \times 10) = 10\ W$$

$$U_{A-B} = T_B - T_A \quad \text{என்பதால்}$$

$$10W = \frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right) v^2_B - 0$$

$$\therefore \quad v^2_B = 20 \times 9 \cdot 8 = 196$$

$$v_B = 14 \text{ மீ/வினாடி.}$$

B என்னுமிடத்தில் நிலைக்குத்து முடுக்கம் (அல்லது மையம் நோக்கிய முடுக்கம்)

$$a_n = \frac{v_B}{\rho} \text{ என்பதால்,}$$

$$a_n = \frac{196}{10} = 19{\cdot}6 \text{ மீ/(விநாடி)}^2$$

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, செங்குத்துத் திசையில் இயக்கத்தைக் கருதும்போது,

$$+ \uparrow \sum F_n = ma_n$$

$$N - W = \frac{W}{g} \times 19{\cdot}6$$

$$\therefore \quad N = W + \frac{19{\cdot}6\ W}{9{\cdot}8} = 3\,W \text{ கி.கி விசை}$$

$$= 150 \text{ கி.கி விசை.}$$

(ii) A, C என்னும் நிலைகளுக்கு உரிய "வேலை-ஆற்றல்" சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கவும்.

$$U_{A\text{-}C} = \frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right) v_C^{\,2} - 0$$

$$5\,W = \frac{1}{2}\,\frac{W}{g}\,v_C^{\,2}$$

$$v_C^{\,2} = 109 = 10 \times 9{\cdot}8$$

$$\therefore \quad v_C = \sqrt{98} = 9{\cdot}9 \text{ மீ/விநாடி.}$$

சறுக்குத்தளத்தின் எதிர்த்தாக்கம் பூச்சியமாகும்போது, பாதுகாப்பான மிகச்சிறிய வளை ஆரத்தைப் பெறலாம்.

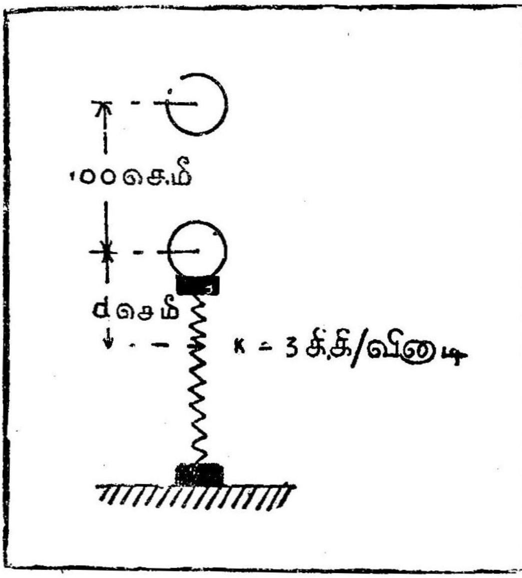
$$\therefore \quad \downarrow + \sum F_n = ma_n \text{ என்னும் சமன்பாடு,}$$

$$W = \frac{W}{g}\,\frac{v_0^{\,2}}{\rho_C} = \frac{W}{g}\,\frac{109}{\rho_C} = \frac{10\ W}{\rho_C}$$

$$\therefore \quad \rho_C = 10 \text{ மீட்டர் ஆகும்.}$$

6·16-9. 5 கிலோ கிராம் எடையுள்ள கட்டை ஒன்று ஒரு மீட்டர் தொலைவிலிருந்து 3 கி. கி. விசை/செ.மீ என்னும் வில் மாறிலியைப்பெற்ற (Spring Constant) திருகுச் சுருள் ஒன்றின் மேல் விழுகிறது அப்போது, கணமொன்றில் அச்சுருள் வில்லில் ஏற்பட்ட இறுக்கத்தின் பெருமத்தைக் காண்க.

மற்றும், பொருளானது சுருள்வில்லைத் தொடும்போது உள்ள நிலை, வில் பெரும இறுக்கத்தைப் பெறும்போது உள்ள நிலை ஆகிய இரு நிலைகளை வரையறுக்க.



படம் 6·33

சுருள் வில்லில் பெரும இறுக்கம் ஏற்படும் நிலையை ஆதார (Datum) மாகக் கொள்ளும்போது, பின்வரும் விவரங்கள் கிடைக்கும். [படம் 6·33 -ஐப் பார்க்க]

நிலை	இயக்க ஆற்றல்	நிலையாற்றல் (ஈர்ப்பினால்)	நிலையாற்றல் (வில்லின் மீள் சக்தியால்)
[illegible], சுருள் வில்லைத் தொடும் போது	mgh $= 5 \times 100$	mgd $= 5 \times d$	0
சுருள் வில்லில் பெரும இறுக்கம் ஏற்படும் தருணத்தில், கட்டையின் நிலை	0	0	$\frac{1}{2}kd^2$ $= \frac{1}{2} \times 3 \times d^2$

ஆற்றலின் காப்பு விதியின்படி,

$$\frac{2}{3}d^2 = 500 + 5d \text{ ஆகும்.}$$

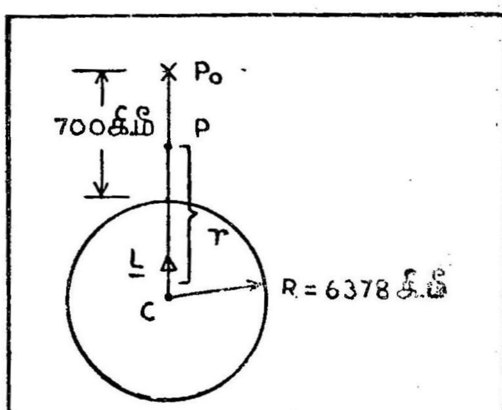
$$3d^2 - 10d - 1000 = 0$$

$$d = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 12000}}{6}$$

$$= \frac{10 \pm 110}{6} = \frac{120}{6} = 20 \text{ செ. மீ ஆகும்.}$$

(குறைக்குறியுடைய மதிப்பு புறக்கணிக்கப்படும்)

6·16-10. புவியின் மேல் பரப்பிற்கு 700 கிலோமீட்டர் செங்குத்துத் தொலைவிலிருந்து பொருள் ஒன்று, ஓய்வு நிலையிலிருந்து புவியை நோக்கி விடப்படுகிறது. அது புவியை வந்து அடிக்கும்போது அதன் திசைவேகத்தைக் காண்க.



படம் 6·34

இந்த பொருளின்மேல் செயல்படும் விசை, தலைகீழ்வர்க்க விதியின்படி,

$$\underline{F} = -\frac{GMm}{r^2}\underline{L}$$

$$= -\frac{WR^2}{r^2}\underline{L}$$

எனவே விசை செய்யும் வேலை,

$$U_{1-2} = -\int_{7078\times 10^3}^{R=6378\times 10^3} \frac{W R^2}{r^2}\cdot \underline{L}\, dr$$

$$= -WR^2 \int_{7078\times 10^3}^{6378\times 10^3} \frac{dr}{r^2}$$

$$= WR^2 \left(\frac{1}{r}\right)_{7078\times 10^3}^{6378\times 10^3}$$

$$= W\frac{(6378\times 10^3)^2}{10^3}\left[\frac{1}{6378}-\frac{1}{7078}\right]$$

$$= \frac{22828\times 10^5}{7078}\times W$$

இயக்க ஆற்றலின் மாற்றம் $= \frac{1}{2}\frac{W}{g}(v^2 - 0)$

$$\text{எனவே } \frac{W}{2g}v^2 = \frac{22828\times 10^5}{7078}W$$

$$v^2 = \frac{22823\times 10^5\times 2\times 9{\cdot}8}{7078}$$

$\therefore \quad v = 8515{\cdot}4$ மீட்டர்/விநாடி

6·16·11. 1000 மெட்ரிக் டன்கள் எடையுள்ள இரயில் வண்டி ஒன்றின் எஞ்சின் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு, 100-க்கு 1 என்னும் சரிவில், கீழ் நோக்கிச் செல்லுகிறது. இருப்புப்பாதை உராய்வினால், இயக்கத்தற்கான தடை டன்னுக்கு 8 கிலோ கிராம் எடை ஆகும். எஞ்சின் 5000 கி. கி. அளவுள்ள மாறா விசையுடன் இரயில் வண்டியை இழுத்துச் சென்றால், அது 2000 மீட்டர் தொலைவைக் கடக்கும்போது, அதனுடைய வேகத்தைக் காண்க. எஞ்சினின் பரித்திறனை (குதிரைத் திறனை) யும் காண்க.

சரிவில் 2000 மீட்டரைக் கடக்கும்போது, இரயில் வண்டி நிலைக்குத்தாக 20 மீட்டர் தொலைவு கீழ்நோக்கி இறங்குகிறது.

எனவே, இரயில் வண்டியின் எடை செய்த வேலை

$$= 1000 \times 1000 \times 20 = 2 \times 10^7 \text{ மீ-கி.கி}$$

எஞ்சின் செய்த வேலை $= 5000 \times 2000 = 10^7$ மீ-கி.கி

உராய்வினுல் செய்யப்பட்ட எதிர்வேலை $= 3 \times 1000 \times 2000$
$= 6 \times 10^6$ மீ-கி.கி.

எனவே, விசைகள் செய்த நிகரவேலை,

$$= 2 \times 10^7 + 10^7 - 6 \times 10^6$$

$$= 24 \times 10^6 \text{ மீ-கி.கி}$$

நிலை ஆற்றலின் மாறுபாடு $= \frac{1}{2}\left(\frac{1000 \times 1000}{g}\right) v^2 - 0$

எனவே 'வேலை - ஆற்றல்' தத்துவப்படி,

$$\frac{1}{2} \times \frac{10^6}{9 \cdot 81} v^2 = 24 \times 10^6$$

$$v^2 = 48 \times 9 \cdot 81$$

$$\therefore \quad v = 21 \cdot 70 \text{ மீட்டர் / வினடி.}$$

எஞ்சினின் பரித்திறன் $= \frac{F \times v}{75} = \frac{5000 \times 21 \cdot 70}{75}$

$= 1446 \cdot 6$ மெட்ரிக் பரித்திறன்.

6·16-12. $\underline{F} = (6xy + y^2)\underline{i} + (3x^2 + 2xy)\underline{j}$ கி. கி. என்னும் விசையானது, ஒரு துகளில் செயற்பட்டு, அதை $P_1\,(1, 1, 0)$ மீ என்னுமிடத்திலிருந்து $P_2\,(2, 3, 6)$ மீ என்னுமிடத்திற்கு நகரச்செய்கிறது. கொடுக்கப்பட்ட விசை காப்புவிசையாகுமா எனக்காண்க. அது செய்த வேலையையும் காண்க. காப்புவிசையாக இருக்குமெனில், ஏற்றதான நிலையாற்றல் சார்பலனையும் வரையறுக்க.

இங்கு $\underline{F} = (6xy + y^2)\underline{i} + (3x^2 + 2xy)\underline{j}$

$$\therefore \quad X = 6xy + y^2 \; ; \quad Y = 3x^2 + 2xy$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 6x + 2y \; ; \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 6x + 2y$$

$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ என்ருவதால், கொடுக்கப்பட்ட விசை ஒரு காப்பு விசையாகும்.

எனவே, விசை செய்த வேலை துகள் இயங்கிய பாதையைச் சார்ந்திராமல் அதன் தொடக்க, இறுதிப்புள்ளிகளாலேயே வரையறுக்கப்படும்.

$V(x, y, z)$ என்பது, நிலையாற்றலைக்குறிக்கும் சார்பலன் என்றால்,

$$\underline{F} = -\text{ grad } V$$

$$\therefore\ (6xy + y^2)\,\underline{i} + (3x^2 + 2xy)\,\underline{j} = -\frac{\partial V}{\partial x}\underline{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\underline{j}$$

ஆகும்.

$$\therefore\ \frac{\partial V}{\partial x} = 6xy + y^2$$

$$\therefore\ V = -(3x^2y + xy^2) + C$$ ஆகும்.

மேலும் $$\int_{P_1}^{P_2} \underline{F}\cdot d\,\underline{r} = -\int_{P_1}^{P_2} dv = +\left[3x^2y + xy^2\right]_{(1,1,0)}^{(2,3,6)}$$

$$= [36 + 18] - [3 + 1]$$

$$= 54 - 4$$

$$= 50$$ மீ-கி கி.

6·16-13. (a) பின்வரும் விசைகள் காப்பு விசைகளா எனக் காண்க.

(i) $\underline{F} = 2xyz^3\,\underline{i} - (x^2z^3 + 2y)\,\underline{j} + (3x^2yz^2)\,\underline{k}$

(ii) $\underline{F} = 2xy\,\underline{i} + (x^2 + 2yz)\,\underline{j} + (y^2 + 1)\,\underline{k}$

(b) மேற்கூறிய விசை ஒவ்வொன்றும் ஒரு துகளில் செயற்பட்டு, அதைத் தொடக்கப்புள்ளி $O(0, 0, 0)$-விலிருந்து $P(1, 1, 1)$ என்னும் புள்ளிக்கு, $y = x^2$; $z = x^3$ என்னும் பாதையின் வழியாக இயங்கும்போது, ஒவ்வொன்றும் செய்த வேலையைக் காண்க.

(i) $\underline{F} = 2\,xyz^3\,\underline{i} - (x^2z^3 + 2y)\,\underline{j} + 3x^2yz^2\,\underline{k}$ என்பது ஒரு காப்பு விசையாவதற்கு, $\Delta \wedge \underline{F} = 0$ ஆகவேண்டும்.

இங்கு $$\nabla \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz^3 & -(x^2z^3+2y) & 3x^2yz^2 \end{vmatrix}$$

$$= (3x^2z^2 + 3x^2z^2)\,\underline{i} - (6xyz^2 - 6xyz^2)\,\underline{j} - (2xz^3 + 2xz^3)\,\underline{k}$$

$$= 6x^2z^3\,\underline{i} - 4xz^3\,\underline{k}$$

$$\neq 0.$$

எனவே, F என்பது ஒரு காப்பு விசையல்ல, ஆதலால் அது செய்யும் வேலை இயங்கும் பாதையைச் சார்ந்துள்ளது.

$$\underline{F} = 2xyz^3\,\underline{i} - (x^2z^3 + 2y)\,\underline{j} + 3x^2yz^2\,\underline{k}$$

இங்கு $y = x^2, \quad z = x^3$

$$\therefore \quad dy = 2x\,dx, \qquad dz = 3x^2dx$$

$$\therefore \quad \underline{F}\cdot d\underline{r} = 2xyz^3dx - (x^2z^3 + 2y)\,dy + (3x^2yz^2)\,dz$$

$$= 2x^{12}\,dx - 2x^{12}\,dx - 4x^3\,dx + 9x^{12}\,dx$$

$$= (-4x^3 + 9x^{12})\,dx.$$

எனவே விசை செய்த வேலை $= \int_{P_1}^{P_2} \underline{F}\cdot d\underline{r}$

$$= \int_{x=0}^{x=1} (-4x^3 + 9x^{12})\,dx$$

$$= -4/13.$$

(ii) $F = 2xy\,\underline{i} + (x^2 + 2yz)\,\underline{j} + (y^2 + 1)\,\underline{k}$

$$\nabla \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2+2yz & y^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= (2y - 2y)\,\underline{i} - (0-0)\,\underline{j} + (2x - 2x)\,\underline{k}$$

$$= 0$$

எனவே, என்பது $\underline{F}$ என்பது ஒரு காப்பு விசையாகும்.

∴ $F = -\, grad\ V$ எனக் கொண்டு V என்னும் நிலை ஆற்றலுக்கு உரிய சார்பலனை வரையறுக்கலாம்.

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = X = 2xy$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = Y = x^2 + 2yz$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = Z = y^2 + 1$$

$$\therefore \quad V(x, y, z) = -x^2 y + f(y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -x^2 + \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 - 2yz$$

$$\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2yz$$

அதாவது, $f(y, z) = -y^2 z + \phi(z)$

$$\therefore \quad V(x, y, z) = -x^2 y - y^2 z + \phi(z)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -y^2 + \phi^1(z) = -y^2 - 1$$

$$\therefore \quad \phi^1(z) = -1$$

$$\phi(z) = -Z + C$$

எனவே $V(x, y, z) = -x^2 y - y^2 z - Z + C$ ஆகும்.

இங்கு விசை செய்த வேலை,

$$= \int_{P_1}^{P_2} \underline{F} \cdot d\, \underline{r} = -\int_{P_1}^{P_2} dv = (x^2 y + y^2 z + Z - C)_{P_1}^{P_2}$$

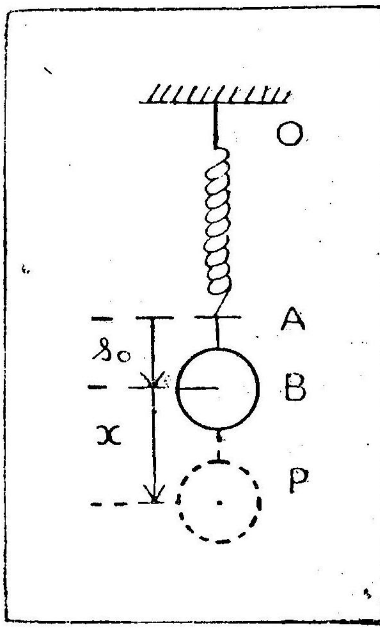
$$= (x^2 y + y^2 z + Z - C)_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}$$

$$= (1 + 1 + 1 - C) - (-C)$$

$$= 3$$

6·6-14. ஆற்றல் அழிவின்மைத் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தியும். திருகுசுருள் வில்லிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்ட துகள் ஒன்றின் இயக்கம் ஒரு தனியிசை இயக்கம் என வரையறுக்கலாம்.

வில் மாறிலி k எனக் கொண்ட (Spring Constant) திருகுச் சுருள் வில் ஒன்றின் மேல் முனை நிலையான O என்னும் ஒரு புள்ளியில், படம் 6·35-ல் காட்டியவாறு, பொருத்தப்பட்டு, அதன் கீழ் முனையில் m நிறையையுடைய, துகள் ஒன்று தொங்க விடப்பட்டிருக்கிறது.



படம் 6·35

துகள் அமைதி நிலையில் உள்ளபோது, சுருள் வில்லில் ஏற்படும் நீட்சியை s_0 எனக் கொள்க.

அப்போது, $ks_0 = mg$ ஆகும்.

துகளைச் சற்றுச் செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி இழுத்து விடுவோமெனில், அது B-ஐப்பற்றி, மேலும், கீழுமாக இயங்கும். ஏதேனுமொரு t என்னும் நேரத்தில், அமைதி நிலையான B என்னும் புள்ளியிலிருந்து, துகள் x தொலைவில் P என்னும் புள்ளியில் இருக்கட்டும்.

நிலை, இயக்க ஆற்றல் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்த, ஆதார தளத்தை (Reference or Datum Level) B-யில் எடுக்கவும். எனவே,

சுருள் வில், துகள் ஆகியவற்றின் நிலைகளுக்கு ஏற்ற நிலையாற்றலின் விளைவு,

$$= \frac{1}{2} k (s_0 + x)^2 - mg (s_0 + x) \text{ ஆகும்.}$$

துகள் கீழ்நோக்கி இயங்கும்போது, அதன் இயக்க ஆற்றல்,

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \text{ ஆகும்.}$$

ஆற்றல் அழிவின்மைத் தத்துவத்தின் படி.

$$\frac{1}{2} k (s_0 + x)^2 - mg (s_0 + x) + \frac{1}{2} m\dot{x} = \text{ஒரு மாறிலி}$$

t-ஐக் குறித்து, இச்சமன்பாட்டின் வகைக் கெழுவை எடுக்கவும். அப்போது,

$$k (s_0 + x) \dot{x} - mg \dot{x} + m\dot{x} \ddot{x} = 0$$

$\dot{x} \neq 0$, $ks_0 = mg$ என்பதால், இறுதியாக

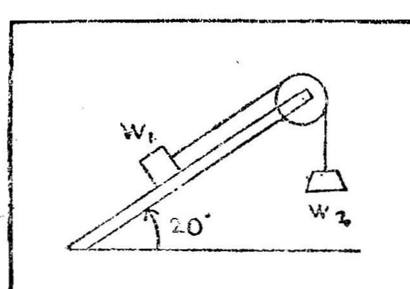
$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இது ஒரு தனியிசை இயக்கத்தை வரையறுக்கும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனவே அலைவு நேரம்,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ ஆகும்.}$$

6 17. பயிற்சி

6 17-1. W_1, W_2 என்னும் இரு எடைகள் ஓர் இழையினால் படம் (6·36)-ல் காட்டியவாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. W_1



படம் 6·36

ஆனது கிடைத்தளத்துடன் 20° ஏற்றகோணச் சரிவைப்பெற்ற வழவழப்பான ஒரு தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்விழையானது அச்சாய்தளத்தின் நுனியிலுள்ள ஒரு வழவழப்பான சிறு கப்பிக்கு மேலாகச் சென்று செங்குத்தாகத் தொங்கும் W_2-ஐத் தாங்குகின்றது.

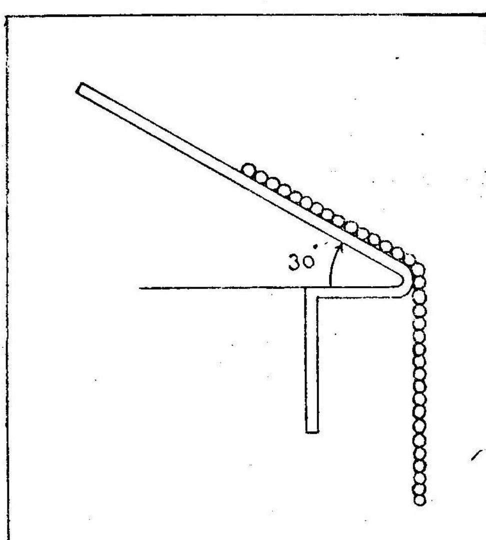
(i) W_2 கீழ்நோக்கி, ஓய்வு நிலையிலிருந்து $s = 50$ செ.மீ கீழ்நோக்கி இறங்கும்போது அதன் வேகத்தைக் காண்க.

(ii) W, W_2 என்னும் எடைகள் முறையே 1 கி.கி. 0·5 கி.கி என்றால், இழையில் செயல்படும் இழுவிசையைக் காண்க.

[விடை : (i) $v = \{2gs(W_2 - W_1 \sin 20°)/W_1 + W_2)\}^{\frac{1}{2}}$

(ii) 4 38 நியூட்டன்கள்]

6·17-2. 6 கிலோ கிராம் எடையுள்ளதும், 9 மீட்டர் நீளமுள்ளதுமான ஒரு சங்கிலி, 30° சரிவைப்பெற்ற மழமழப்பான கூரையில் படம் (6 37)-ல் காட்டியவாறு கூரையின் விளிம்



படம் 6 37

பிலிருந்து 4·5 மீட்டர் நீளத்திற்குச் செங்குத்தாக தொங்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. சங்கிலியானது ஓய்வு நிலையிலிருந்து விடு

விக்கப்பட்டால், சங்கிலியின் இறுதி நுனி, விளிம்பைவிட்டு விலகும் போது அதன் வேகத்தைக் காண்க.

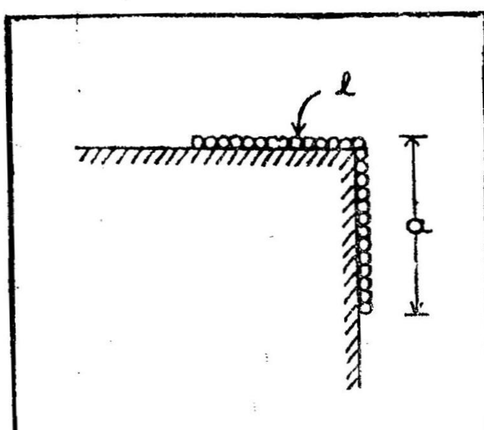
[{ குறிப்பு : $3 \times 4 \cdot 5 - 3\,(2 \cdot 25 \sin 30^\circ) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{9 \cdot 81} v^2$ }

விடை : $v = 8\ 79$ மீட்டர்/விநாடி]

6·17-3. இரண்டு கிலோகிராம் பளுவுக்கு ஒரு சென்டிமீட்டர் வீதம் இறுக்கத்தைப்பெற்ற 0 75 மீ. நீளமுள்ள திருகுச் சுருள் வில் ஒன்று செங்குத்துக் தளத்தில் நிலைக்குத்தாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் மேல் நுனியில் இலேசான மேடை ஒன்று பொருத்தப் பட்டுள்ளது. மேடையிலிருந்து 2·2 மீட்டர் தொலைவில் வைக்கப் பட்டுள்ள 2 கி.கி எடை ஒன்று ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்பட்டு மேடையின் மீது விழுகிறது அப்போது திருகுச்சுருள் வில்லில் ஏற்படக்கூடிய இறுக்கத்தின் பெருமமதிப்பு என்ன ?

[விடை : 22 செ.மீ]

6·17-4. மொத்த நீளம் l-உடைய சங்கிலி ஒன்று மழமழப் பான ஆதாரம் (Support) ஒன்றில் படம் 6·38-ல் காட்டியவாறு தாங்கப்பட்டு அமைதி நிலையிலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது.



படம் 6·38

கிடைத்தள ஆதாரத்தில் உள்ள சங்கிலியின் இறுதிக்கண்ணி (last link) தளத்தை விட்டு விலகும்போது, அதன் வேகத்தைக் காண்க.

[விடை : $v = \sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - a^2)}$]

6·17-5. l-நீளமுள்ள சங்கிலி ஒன்று கிடைநிலையிலுள்ள மழமழப்பான மேசையின்மீது y_0 நீளமுள்ள அதன் ஒரு பகுதி அம்மேசையின் விளிம்பில் தடங்கலின்றித் தொங்குமாறு தொடக்கத்தில், ஓய்வில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. சங்கிலியை அந்நிலையிலிருந்து விடுவித்தபின் அதன் இறுதிவளையம் (அல்லது கண்ணி-Link) v_0 வேகத்தில் மேசையை விட்டு விலகினால்,

$$y_0 = l\left[1 - \frac{2v_0^2}{v_1^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$ எனக்காண்க.

இங்கு v_1 என்பது, சங்கிலியானது தன் நீளத்தையுடைய உயரத்திலிருந்து ஓய்வு நிலையில் விடுவித்தால், அது எய்தும் வேகத்தைக் குறிக்கிறது.

6·17-6. பரவளைச் சுருள்வில் (Parabolic spring) ஒன்றில் ஏற்படும் இழுவிசையானது, $f = kx^2$ என்னும் நியதியால் வரையறுக்கப்படுகிறது. m நிறையைப் பெற்ற பொருள் ஒன்று h என்னும் ஏத்தொலைவில் ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்பட்டால், அது பரவளைச் சுருள் வில்லில் ஏற்படுத்தும் இயக்க நெருக்கம் (Dynamical Deflection), நிலை இயல நெருக்கத்தின் (Statical Deflection) இருமடங்காக இருக்கும் ?

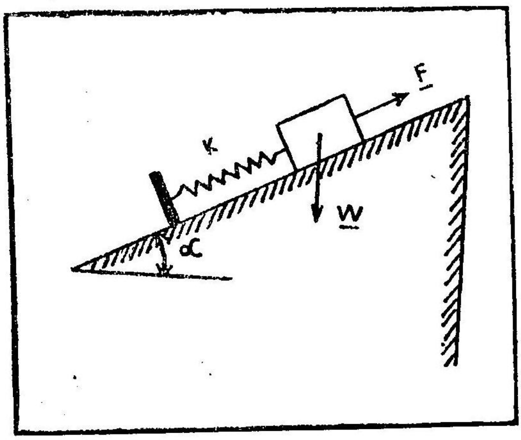
(பொருள் ஒன்று சுருள் வில்லின்மேல் வைக்கப்பட்டு அமைதி நிலையில் உள்ளபோது, அது சுருள் வில்லில் ஏற்படுத்தும் நெருக்கமே நிலையியல் நெருக்கமாகும்)

[குறிப்பு : $\left\{mg\,(h + x) - \frac{1}{3}\,kx^3 = 0,\quad mg = k\left(\frac{x}{2}\right)^2\right\}$,

விடை : $h = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{mg}{k}}$]

6·17-7. கிடை மட்டத்துடன் α கோணச்சரிவையும், μ என்னும் உராய்வுக்கெழுவையும் பெற்ற மழமழப்பான சாய்தளத்தில், W எடையைக்கொண்ட பொருள் ஒன்றின்மேல் F என்னும் மாறுவிசை (Constant Force), படம் (6·39)-ல் காட்டியவாறு செயல்படுகிறது. k என்பதை வில் மாறிலியாகக் கொண்ட சுருள்வில் ஒன்றில் பொருள் பிணைக்கப்பட்டுக் கட்டுப்பாட்டில் உள்ளது. தொடக்கத்தில் சுருள்வில் பெற்ற இறுக்கம் 0 எனக்கொண்டு, பொருள் ஓய்வுநிலையிலிருந்து சாய்தளத்தின்

மேல்முகமாக $\frac{3}{2}\delta$ தொலைவை அடையும் தருணத்தில், அதன் வேகத்தைக் காண்க.



படம் 6·39

[குறிப்பு : காப்பு விசைகளுக்கு உரிய,

$$\text{நிலையாற்றல் மாற்றம்} = W\left(\frac{3}{2}\delta\sin\alpha\right) + \frac{1}{2}k\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}k\delta^2$$

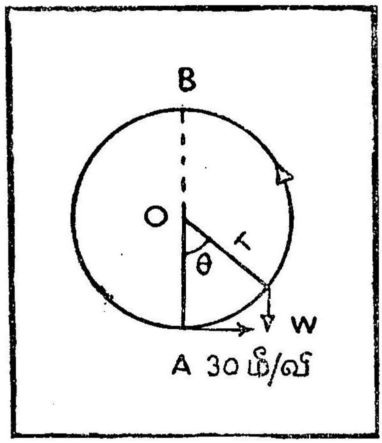
$$\text{இயக்க ஆற்றல் மாற்றம்} = \frac{1}{2}\frac{W}{g}v^2 - 0$$

$$\text{மற்ற விசைகள் செய்தவேலை} = F\left(\frac{3}{2}\delta\right) - W\mu\cos\alpha\left(\frac{3}{2}\delta\right)$$

விடை : $v = \left\{3\delta g\left(\frac{F}{W} - \mu\cos\alpha - \sin\alpha + \frac{k\delta}{4W}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$]

6·17-8. W எடையுள்ள ஒரு துகள் 6 மீட்டர் நீளமுள்ள ஓர் இழையால் ஒரு நிலைப்புள்ளி O-விலிருந்து நிலைக்குத்தாகத் தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. துகள் O-வை மையமாகக் கொண்ட ஒரு நிலைக்குத்து வட்டப்பாதையில், படம் (6·40)-ல் காட்டியவாறு,

அதன் தொடக்க நிலையான A-யிலிருந்து வினாடிக்கு 30 மீட்டர் திசை வேகத்துடன் செல்லுமாறு எறியப்படுகிறது. துகள் B-என்னும் உச்சிப்புள்ளியை அடையும்போது அதன் வேகம் என்ன?

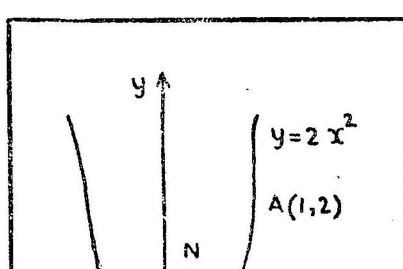


படம் 6·40

$$\left\{ \text{குறிப்பு :}\ \frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)(v^2 - 30^2) = -6W(1 - \cos\theta) \right\}$$

[விடை : $v^B = 25\cdot78$ மீ வினாடி.]

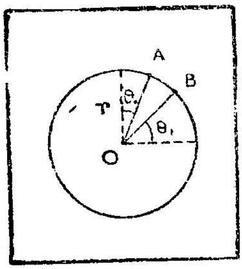
6 17-9. உருண்டை வடிவமுள்ள மணி ஒன்று படம் (6 41)-ல் காட்டியவாறு. $y = 2x^2$ என்னும் பரவளைவு அமைப்பைப்பெற்ற இலேசானதும், மழமழப்பானதும், வளையாத்தன்மையான கம்பி ஒன்றில் பொருத்தப்பட்டு $A(1, 2)$ மீட்டர் என்னும் இடத்தில் ஓய்விலிருந்து கிளம்பி நிலை O-என்னும் மிகக்கீழான புள்ளியின் வழியாக அது செல்லும்போது அதன் வேகத்தைக் காண்க.



படம் 6·41

[விடை : $v = 6\ 264$ மீட்டர் வினாடி]

6·17-10. r என்ற ஆரத்தையுடைய வழவழப்பான நிலையான கோளத்தின் மேற்புறத்தில், படம் (6·42)-ல் காட்டியவாறு A என்னும் புள்ளியில், ஓய்விலிருந்து ஒரு துகள் கீழே நழுவுகிறது. அது கோளத்தைவிட்டு விலகுமிடம் B எனில்,



படம் 6·42

(i) θ_0, θ_1 என்னும் கோணங்கள் எவ்விதம் தொடர்பு கொண்டுள்ளன?

(ii) $\theta_0 = 0$ எனில் θ_1-ன் மதிப்பைக் காண்க.

[விடை : (i) $\sin\theta_1 = \frac{2}{3}\cos\theta_0$

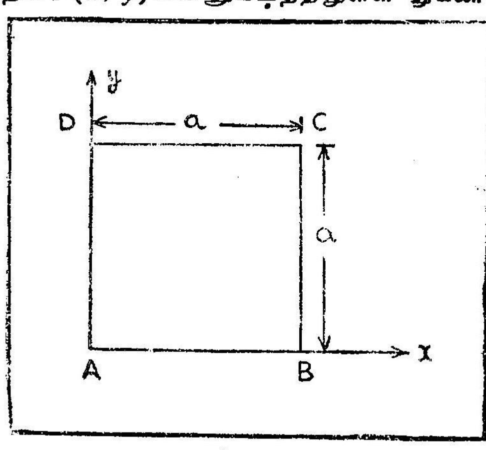
(ii) $\theta_1 = 41°48'$]

6·17-11. m நிறையைப் பெற்ற துகள் ஒன்று, O-என்னும் நிலையான புள்ளியை நோக்கி, O-விருந்து அதன் தொலைவின் முப்படியின் தலைகீழ் விகித அளவுள்ள (inversely proportional to the cube of its distance from O) விசையால் ஈர்க்கப்படுகிறது. தொடக்கத்தில் r_1 என்னும் தொலைவிலிருந்து, $\underline{v_0}$ என்னும் திசைவேகத்தில் அதன்மேல் செயல்படும் விசைக்கு எதிரான திசையில் அத்துகள் தூக்கி எறியப்படுகிறது. (Launched) அத்துகளில் தலைகீழ் முப்படி விகிதத்தைக் கொண்ட விசையைத் தவிர, வேறு எந்த விசையும் செயல்படவில்லை எனக் கொண்டு, அத்துகள் O-விலிருந்து r_2 அளவினதான மிகப் பெரிய தொலைவை அடையவதாகில், கொடுத்த விவரங்களைப் பயன்படுத்தி r_2-வின் மதிப்பைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை : } r_2 = K^{\frac{1}{2}} r_1 (m r_1^2\, \underline{v_0} \cdot \underline{v_0} +)K^{-\frac{1}{2}}\right]$$

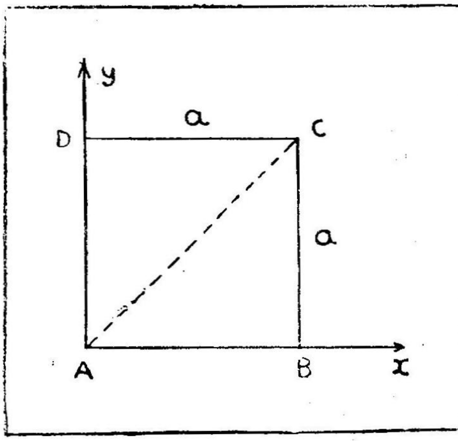
6·17-12. x, y தளத்தில் $P(x, y)$ என்னுமிடத்திலுள்ள துகளை $\underline{F} = Ry\,\underline{i}$ என்னும் விசையானது இயக்குகிறது. $\underline{F}$ என்பது ஓர் காப்பு விசையாகாது எனக்காட்டி. அது துகளை படம் (6·43)-ல் காட்டியவாறு $ABCD$ என்னும் சதுரப்பாதையில் இடஞ்சுழியாக இயக்கும்போது செய்த வேலையைக் காண்க.

[விடை : விசை செய்த நிகர வேலை $= -Ra^2$]



படம் 6·43

6·17-13. $\underline{F} = x^2y\,\underline{i} + xy^2\,\underline{j}$ என்னும் விசை, $P\,(x, y)$ என்னுமிடத்திலுள்ள துகள் ஒன்றின் மேல் செயற்பட்டு, அதை (x, y) தளத்தில் இயக்குகிறது. $\underline{F}$ என்பது காப்பு விசையல்ல



படம் 6·44

எனவும், அது A-யிலிருந்து C-க்கு முறையே, ABC, ADC, AC என்னும் பாதை ஒவ்வொன்றிலும், படம் (6·44)-ல் காட்டியவாறு இயங்கும்போது, செய்த வேலையையும் காண்க.

[விடை : (i) $\int_{ABC} \underline{F}\cdot d\,\underline{r} = a^2/3$, (ii) $\int_{ADC} \underline{F}\cdot d\,\underline{r} = a^2/3$

(iii) $\int_{AC} \underline{F}\cdot d\,\underline{r} = 2a^4$,]

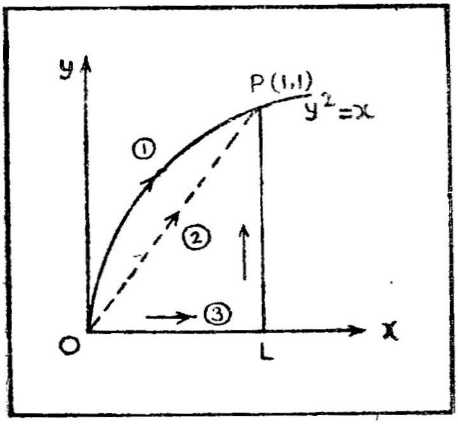
6·17-14. பின்வரும் விசைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு துகளில் செயல்பட்டு அதை (x, y) தளத்தில் $x^2 + y^2 = a^2$ என்னும் மூடிய பாதையில் இயங்கிடச் செய்தால், விசை செய்த வேலையைக் காண்க.

(i) $\underline{F} = 2xyz^3\,\underline{i} - (x^2z^3 + 2y)\,\underline{j} + 3x^2yz^2\,\underline{k}$

(ii) $\underline{F} = 2xy\,\underline{i} + (x^2 + 2yz)\,\underline{j} + (y^2 + 1)\,\underline{k}$

[விடை : (i) 0, (ii) 0]

6·17-15. $\underline{F} = x^2\,\underline{i} + xy\,\underline{j}$ என்னும் விசை $(x,\ y)$ தளத்தில், ஒரு துகளில் செயற்பட்டு, அதை $O\,(0,\ 0)$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து, $P\,(1,\ 1)$ என்னும் புள்ளிக்குப், படம் (6 45)-ல் காட்டிய வாறு, மூன்று தனித்த பாதைகளில் இயங்கும் படிச் செய்தால், ஒவ்வொரு பாதையிலும் விசை செய்த வேலையைக் காண்க.



படம் 6·45

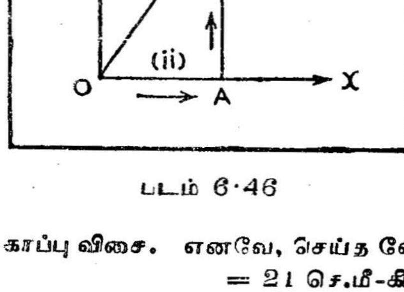
[விடை : (1) $\frac{7}{12}$ | (2) $\frac{2}{3}$ | (3) $\frac{5}{6}$]

6·17-16. துகள் ஒன்றை $x^2 + y^2 = 9,\ z = 0$ என்னும் வட்டத்தில் ஒருமுறை இயங்குமாறு செய்யும் விசை, $\underline{F} = (2x - y - z)\,\underline{i} + (x + y - z)\,\underline{j} + (3x - 2y + 4z)\,\underline{k}$ என்பதாகும். அது செய்த வேலை யாது? [விடை : 18π]

6 17-17. $\underline{F} = 2xy\,\underline{i} + (x^2 + 3)\,\underline{j}$ கி.கி. என்னும் விசை, ஒரு துகளை $O\,(0,\ 0)$ செ.மீ என்னும் புள்ளியிலிருந்து $P\,(2,\ 3)$ செ மீ என்னும் புள்ளிக்குப் பின் வரும் பாதைகளில் படம் (6.46)-ல் காட்டியவாறு இயங்குப்படிச் செய்தால், ஒவ்வொரு பாதையிலும், துகளை இயக்கும் போது செய்த வேலையைக் காண்க.

(i) OP என்னும் நேர் கோட்டுப்பாதை

(ii) OAP என்னும் பாதை



படம் 6·46

[விடை : $\underline{F}$ என்பது ஒரு காப்பு விசை. எனவே, செய்த வேலை = 21 செ.மீ-கி.கி.]

7. துகளொன்றிற்குரிய தாக்களவை - உந்தக்கோட்பாடு

முந்திய அத்தியாயங்களில் நியூட்டனின் போற்றத்தக்கதான இரண்டாவது விதி, ஒரு துகளின் இயக்கப் பாதையை வரையறுக்கப் பயன்படுத்தப்பட்டது. அதன் விளைவாக, வகைக் கெழுச் சமன்பாடு ஒன்று வரையறுக்கப்பட்டு, அதைத் தொகையீடு செய்யும்போது, இயக்கத்தைப்பற்றிய விவரங்களைப் பெற முடிந்தது. இவ் வத்தியாயத்திலும், அடிப்படை இயக்கச் சமன்பாடுகளைத் தொகையிடும்போது, விசை, முடுக்கம் என்பவைகளுக்குச் சிறப்பிடம் அளிக்காமல், உந்தம், ஆற்றல் ஆகியவற்றின் அழிவின்மைத் தத்துவத்தை மேற்கொண்டு, அவ்வித கருத்துகளுக்குச் சிறப்பிடம் அளிக்கப்பட்டு, இயக்கம் வரையறுக்கப்படும்.

தாக்களவை (Impulse)

$\underline{F}$ என்னும் மாறுவிசை யொன்று, ஒரு பொருளின்மீது (t_1-t_0) கால அளவிற்குச் செயற்படுமாயின், அவ்விசையின் தாக்களவை, $\underline{I}$ என்பது, அவ்விசை, அது செயற்படும் கால அளவு ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனாகும்.

ஆகவே,

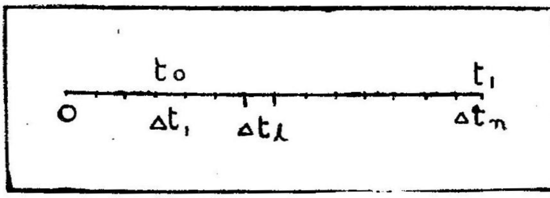
$$\underline{I} = \underline{F}\,(t_1-t_0)$$

இது ஒரு திசையியாகும். இதன் செயற்படும் திசை மாறு விசையின் திசையிலமையும்.

பொருளின்மீது செயற்படும் விசை மாறுபடுமாயின், தாக்களவை பின்வருமாறு அளவிடப்படும்.

தந்ததொருகால இடைவெளி (t_1-t_0)-ஐ படம் (7·1)-ல் காட்டியவாறு, Δt_i, $i = 1, 2, \ldots n$ என்னும் n சிறிய கால இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கவும். Δt_i என்னும் இடைவெளியில்,

ஏதேனுமொரு நேரத்தில், மாறு விசை $\underline{F}$ ஆனது, $\underline{F_i}$ என்னும் மதிப்பைப் பெறுவதாகக் கொள்க. அச் சிறிய Δt_i நேரத்தில், $\underline{F_i}$ என்பது ஒரு மாரு விசையாகக் கருதப்படும்.



படம் 7·1

அப்போது, $\underline{F_i}$ -ன் தாக்களவை $= \underline{F_i}\,\Delta t_i$ ஆகும்.

எனவே, $(t_1 - t_0)$ கால இடைவெளியில், $\underline{F}$ என்னும் மாறு விசையின் தாக்களவை

$$\underline{I} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}\,\Delta t_i \quad \text{ஆகும்.}$$

Δt_i நேரத்தை மிகச் சிறியதாகச் செய்துகொண்டே சென்று, இறுதியாக அது பூச்சியத்தை அணுகும்போது, $\sum\limits_i F_i \Delta t_i$ என்பது, அதன் எல்லை மதிப்பை அடைவதாகில், அவ்வெல்லை மதிப்பு மாறு விசையின் தாக்களவையாகக் கொள்ளப்படும்.

எனவே,

$$\underline{I} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \sum_i \underline{F_i}\ \Delta t_i = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\, dt$$

$(t_1 - t_0)$ கால இடைவெளியில், $\underline{F}$ ஏற்கும் மதிப்புகளின் சராசரி விசைக்குரிய திசையை, $\underline{I}$ என்னும் தாக்களவையானது பெற்றுள்ளதாகக் கொள்ளப்படும்.

ஏதேனுமொரு குறிப்பிட்ட திசையில், தாக்களவைத் திசையி-இன் பகிர்வு, அத் திசையிலமைந்த மாறுவிசையின் பகிர்வுக்குரிய தாக்களவைக்குச் சமமாகும். ஏனெனில், $\underline{E}$ என்பது, குறிப்பிட்ட

திசையில், ஒரு நிலையான (fixed) ஓரலகுத் திசையியைக் குறிக்கும்போது,

$$\underline{I_E} = (\underline{I} . \underline{E})\ \underline{E} = \underline{E}\ (\underline{E} . \underline{I})$$

$$= \underline{E} \left(\underline{E} . \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\ dt \right)$$

$$= \underline{E} \left(\int_{t_0}^{t_1} (\underline{E} . \underline{F})\ dt \right)$$

$$= \underline{E} \int_{t_0}^{t_1} (\underline{F} . \underline{E})\ dt \text{ ஆகும்.}$$

$\underline{E}$ என்பது, $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ திசையிகளைக் குறிக்கும்போது,

$$\underline{I_i} = \underline{i} \int_{t_0}^{t_1} (\underline{F} \cdot \underline{i})\ dt = \underline{i} \int_{t_0}^{t_1} F_x\ dt,$$

$$\underline{I_j} = \underline{j} \int_{t_0}^{t_1} (\underline{F} \cdot \underline{j})\ dt = \underline{j} \int_{t_0}^{t_1} F_y\ dt,$$

$$\underline{I_k} = \underline{k} \int_{t_0}^{t_1} (\underline{F} \cdot \underline{k})\ dt = \underline{k} \int_{t_0}^{t_1} F_z\ dt,$$

$$\therefore \quad \underline{I} = \underline{I_i} + \underline{I_j} + \underline{I_k}$$

$$= \underline{i} \int_{t_0}^{t_1} F_x\ dt + \underline{j} \int_{t_0}^{t_1} F_y\ dt + \underline{k} \int_{t_0}^{t_1} F_z\ dt$$

ஆகும்.

மேலும், $\underline{F_i}$, $i = 1, 2, \ldots\ldots n$ என்பவை ஒருமுனை விசைகளாகுக. அவற்றின் தொகுபயன்விசை, $\underline{R}$ ஆகுக. தரப்பட்ட $(t_1 - t_0)$ கால இடைவெளியில், தொகுபயன் விசையின் தாக்களவை, விசைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் உரிய தாக்களவையின் குறியியல் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும்.

$\underline{I}$ என்பது, தொகுபயன் விசைக்குரிய தாக்களவை எனில்,

$$\underline{I} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{R}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} \right) dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \underline{F_i}\; dt$$

$$= \underline{I_1} + \underline{I_2} + \dots + \underline{I_n} \quad \text{ஆகும்.}$$

7·2. வரைபட முறையில் தாக்களவையைக் கணக்கிடல் :

ஒரு விசையின் தாக்களவை "விசை-கால" வரைபடத்தில், (Force-time graph), T கால அளவில், $t = 0$, $t = T$ என்னும் குத்தாயங்களுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பால் குறிக்கப்படும்.

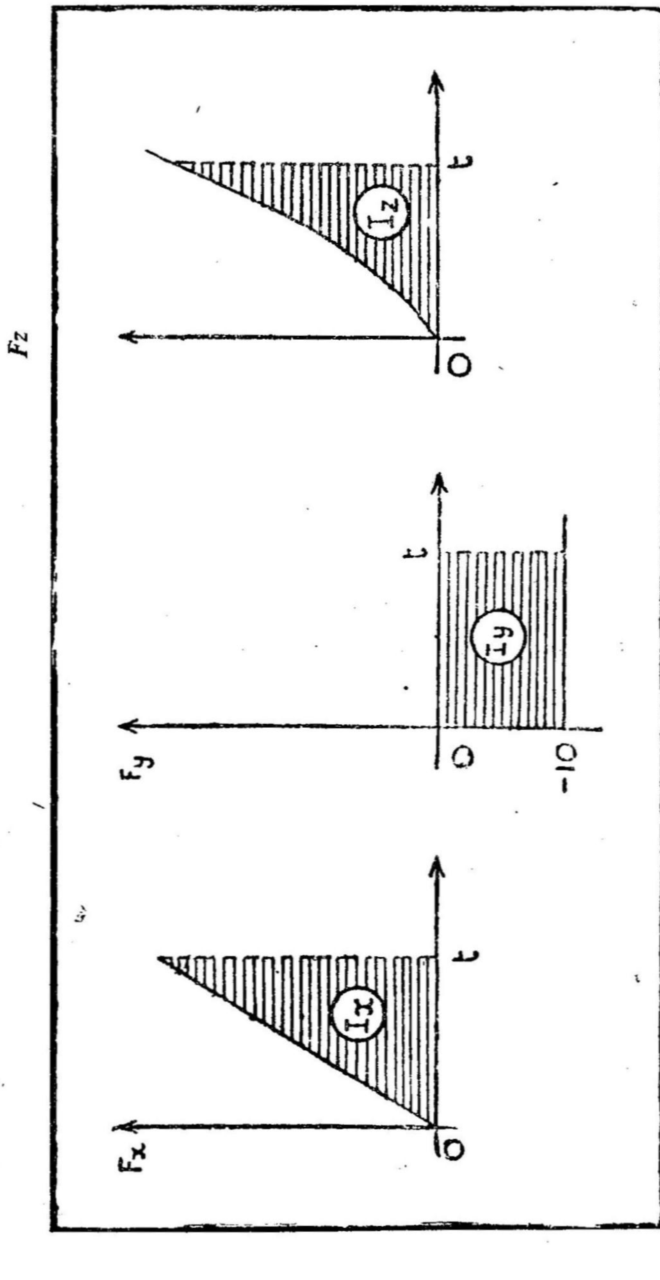
காட்டாக, $\underline{F} = 4t\,\underline{i} - 9\,\underline{j} + 6t^2\,\underline{k}$ என்னும் விசை, ஒரு துகளில் $t = 0$, $t = T$ என்னும் இடை-கால நேரத்தில் செயற்படுவதாகக் கொள்க. $\underline{F}$-ன் நிகர தாக்களவை

$$\underline{I} = \int_0^T \underline{F}\, dt = \int_0^T (4t\,\underline{i} - 9\,\underline{j} + 6t^2\,\underline{k})\, dt$$

$$= 2T^2\,\underline{i} - 9T\,\underline{j} + 2T^3\,\underline{k} \quad \text{ஆகும்.}$$

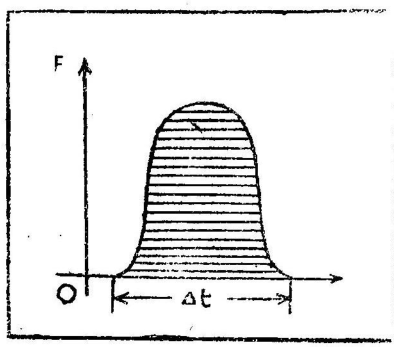
இங்கு தாக்களவையின் பகிர்வுகள், நேரத்தைச்சார்ந்து மாறக் கூடியவையாக உள்ளன. அவை ஒவ்வொன்றையும் படம் (7.2)-ல் காட்டியவாறு, விசைப்பகிர்வு வளைவுப்பாதைக்கும், t அச்சுக்கும், $t = T$ என்னும் நிலைக்கோட்டுக்கும் இடையிலுள்ள பரப்பளவு வரையறுக்கும்.

நடைமுறைக் கணக்குகளில், விசையின் வடிவமைப்பு தெரியாமலேயே, அதன் தாக்களவையானது அளவிடக்கூடியது. எடுத்துக்காட்டாக, மட்டை ஒன்றால் (bat) ஒரு பந்தை அடிக்கும் போது, பயன்படுத்தப்பட்ட விசையை வரையறுப்பது கடினமாகும். அவ்வித விசையின் எண் மதிப்பில் ஏற்படும் மாறுபாடு, படம் (7.3)-ல் காட்டியவாறு இருக்கக்கூடும். தாக்கீடு நேரம் மிகச் சிறியதாக இருப்பினும், விசையானது பெரியதாக இருக்கக்கூடுமாதலால், தாக்களவை ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு மதிப்பைப் பெறத்



படம் 7·2

தக்கதாக உள்ளது. எனவே தாக்களவை — உந்த முறை (Impulse —Momentum Method)யில், விசைகளின் மதிப்புகளை அறியாம



படம் 7·9

லேயே, அவைகள் விளைவிக்கும் உந்த மாற்றத்தை அளந்தறிய முடியும்.

7·3. தாக்களவையின் பரிமாணங்கள்.

தாக்களவை — விசை × கால இடைவெளி

$$[I] = [F \times T] = [F\,T]$$

7·4. துகளுக்குரிய தாக்களவை — உந்த தத்துவத்தை அறிவிக்கும் சமன்பாட்டை வரையறுத்தல்.

m நிறையையுடைய துகள் ஒன்றில், $\underline{F}$ என்னும் விசை செயற்படுவதாகக் கொள்க. நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

$$\underline{F} = m\,\underline{a} \quad \text{ஆகும்.}$$

நிறை ஒரு மாறிலியாதலால்,

$$\underline{F} = m\,\frac{d\,\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\,\underline{v}\right) \quad \text{எனவும் குறிக்கலாம்.}$$

இங்கு $m\,\underline{v}$ என்னும் திசையியானது, நேர்கோட்டு உந்தம் (Linear momentum) எனப்படும். எனவே, நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியைக் கீழ்க்காணும் பிறிதொரு வகையாகவும் தெரியப்படுத்தலாம்.

"ஒரு பொருளின் உந்தமாறுபாடு வீதமானது, அதன்மீது செயல்படும் விசைக்கு நேர்விகித சமமாய் அமைவதோடு அவ் விசை செயற்படும் திசையிலேயே உந்தமாறுபாடும் ஏற்படும்".

மேலும். $\underline{F}$-ஆனது, $(t_1 - t_0)$ கால அளவிற்குத் துகளின்மேல் செயற்படுமாயின், நுண்கணித முறையில்,

$\underline{F} = \frac{d}{dt}(m\,\underline{v})$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தொகையிடும் போது,

$$\underline{I} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(m\,\underline{v})\, dt$$

$$= \int_{\underline{v_0}}^{v_1} d(m\,\underline{v})$$

$$= m\,\underline{v_1} - m\,\underline{v_0}$$

என்பது உந்த மாற்றமாகும்.

எனவே, உந்த மாற்றத்தால், தாக்களவை அளவிடப்படும் என்பது கிடைக்கிறது. ஆகவே, நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிக்குப் பின்வரும் வடிவத்தில் விளக்கம் கொடுக்கலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேரத்தில், துகளொன்றின் உந்த மாற்றம், அதனை விளைவிக்கும் விசையின் தாக்களவைக்குச் சமனாய், அதே திசையிலிருக்கும்.

7·5. துகள் ஒன்றில் விசைத்தொகுதி ஒன்று செயற்படும் போது, தாக்களவை—உந்தந் தத்துவத்தை விளக்குதல் :

m திறையுடைய துகள் ஒன்றில், $\{ F_i \}$, $i = 1, 2, \ldots\ldots n$ என்னும் விசைகள் செயற்படுவதாகக்கொள்க. அவற்றின் தொகுபயனை, $\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i}$ என்னும் திசையி வரையறுக்கும்.

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} = m\,a \quad \text{ஆகும்.}$$

அவ்விசைத்தொகுதி, துகளில், $(t_1 - t_0)$ கால அளவிற்குச் செயற்படுமாயின், நுண்கணித முறையில்,

$$\underline{I} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{R}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} m\underline{a}\, dt$$

அதாவது $$\underline{I} = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \underline{F_i}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d\underline{v}}{dt}\, dt$$

$$= \int_{\underline{v_0}}^{\underline{v_1}} m\, d\underline{v}$$

அதாவது, $$\underline{I} = \sum_{i=1}^{n} \underline{I_i} = m\,\underline{v_1} - m\,\underline{v_0}$$

= உந்த மாற்றமாகும்.

எனவே, தொகுபயன் விசையின் தாக்களவையும் உந்த மாற்றத்தால் அளவிடப்படும்.

7·6. தாக்களவை – உந்தத் தத்துவச் சமன்பாட்டின் எண்ணிப் பகிர்வுகளைக் காணுதல் :

$$\underline{I} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\, dt = m\,\underline{v_1} - m\,\underline{v_0}$$

விசை, திசை வேகம் ஆகியவற்றின் பகிர்வுகள், $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ திசைகளில்,

$\underline{F} = X\,\underline{i} + Y\,\underline{j} + Z\,\underline{k}$ எனவும்,

$\underline{v} = v_x\,\underline{i} + v_y\,\underline{j} + v_z\,\underline{k}$ எனவும் கொள்ளப்படும்.

எனவே,

$$\int_{t_0}^{t_1} (X\,\underline{i} + Y\,\underline{j} + Z\,\underline{k})\, dt = m\,(v_{1x}\,\underline{i} + v_{1y}\,\underline{j} + v_{1z}\,\underline{k})$$

$$-m\,(v_{0x}\,\underline{i} + v_{0y}\,\underline{j} + v_{0z}\,\underline{k}),$$

அதாவது,

$$\underline{i}\int_{t_0}^{t_1}(X\,dt + \underline{j}\int_{t_0}^{t_1} Y\,dt + \underline{k}\int_{t_0}^{t_1} Z\,dt = m\,(v_{1x}-v_{0x})\,\underline{i}$$

$$+\, m\,(v_{1y}-v_{0y})\,\underline{j} + m\,(v_{1z}-v_{0z})\,\underline{k}$$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \int_{t_0}^{t_1} X\,dt = m\,(v_{1x}-v_{0x})$$

$$\int_{t_0}^{t_1} Y\,dt = m\,(v_{1y}-v_{0y})$$

$$\int_{t_0}^{t_1} Z\,dt = m\,(v_{1z}-v_{0z})$$ என்னும் எண்ணிச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

[குறிப்பு: தாக்களவை—உந்தச் சமன்பாடு, விசைக்கும் திசை வேகத்திற்கும் உள்ள தொடர்பை வெளிப்படுத்துகிறது. அவ்விதச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வுகாண, செயற்படும் விசை $\underline{F}$ ஆனது, மாறு விசையாகவோ அல்லது நேரத்தின் சார்பலனாகவோ இருக்கவேண்டும்.]

தாக்களவை, உந்தம் ஆகியவற்றின் பரிமாணங்கள்

தாக்களவை = செயற்படும் விசை × அவ்விசை செயற்படும் நேரம்.

$$\therefore \quad [I] = [F \times T] = [FT]$$ ஆகும்.

மேலும், தாக்களவையின் எண் மதிப்பு "$M.K.S.$" முறையில் கிலோகிராம் விசை - வினாடி அலகால் குறிக்கப்படும்.

அவ்வாறே,

உந்தம் = நிறை × திசைவேகம்

$$= [M] \times [L/T]$$

7·7 மாதிரிக்கணக்குகள்.

7·7–1. 12 கிலோகிராம் விசையொன்று, 5 விநாடிகளுக்கு, $12\underline{i} - 20\underline{j} + 9\underline{k}$ என்றும் திசையிக்கு இணையான திசையில் செயற்படுகிறது. Z-அச்சுத் திசையில் தாக்களவையின் எண்ணிப் பகிர்வைக் காண்க.

$12\underline{i} - 20\underline{j} + 9\underline{k}$ என்னும் திசையி செயற்படும் திசையில், ஓரலகுத் திசையி,

$$\frac{1}{25}(12\underline{i} - 20\underline{j} + 9\underline{k}) \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \underline{I_z} = \underline{k}\int_0^5 (\underline{F} \cdot \underline{k})\, dt$$

$$= \underline{k}\int_0^5 \frac{12}{25}(12\underline{i} - 20\underline{j} + 9\underline{k}) \cdot k\, dt$$

$$= \frac{108}{25}\underline{k}\int_0^5 dt$$

$$= 21 \cdot 6\, \underline{k} \text{ கி.கி. விநாடி}$$

$$\therefore \quad I_z = 21 \cdot 6 \text{ கி.கி. விநாடி.}$$

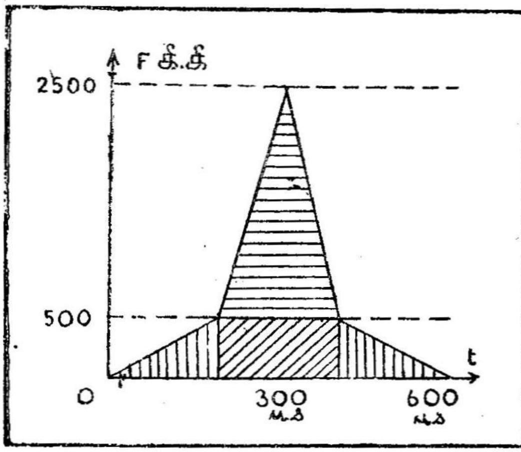
7·7–2. நேரத்தைச் சார்ந்துள்ள ஒரு விசையின் எண் மதிப்பு, படம் (7·4)-ல் காட்டியுள்ளவாறு அமைகிறது. அவ் விசைக்கு ஏற்றதான தாக்களவையின் எண் மதிப்பைக் காண்க.

தாக்களவை = விசைச் சார்பலனுக்கு உரிய பாதை, t அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் பரப்பளவு

$$= \left(\frac{1}{2} \times 200 \times 500 + 200 \times 500 + \frac{1}{2} \times 200 \times 2000 + \frac{1}{2} \times 200 \times 500\right)$$

கி. கி. மைக்ரோ விநாடி.

$$= 0 \cdot 4 \text{ கி.கி. விநாடி.}$$



படம் 7·4

7.7-3. 4 "மெட்ரிக் ஸ்லக்" நிறையுள்ள துகள் ஒன்றில், $\underline{F} = (6t^2\,\underline{i} + 2t\,\underline{j} + 5t^3\,\underline{k})$ கி.கி. விசை செயற்படுகிறது. $t = 0$ என்னும் நேரத்தில், துகள், $\underline{v_0} = (20\,\underline{i} - 15\,\underline{j} + 12\,\underline{k})$ மீ/விநாடி என்னும் திசை வேகத்தைப் பெற்றுள்ளது. நேரம் $t = 4$ விநாடியாக உள்ளபோது, அத் துகளின் திசை வேகத்தைக் காண்க.

தாக்களவை = உந்தமாற்றம்

$$\int_0^4 (6t^2\,\underline{i} + 2t\,\underline{j} + 5t^3\,\underline{k})\,dt = m\,\underline{v_1} - m\,\underline{v_0}$$

$$128\,\underline{i} + 16\,\underline{j} + 320\,\underline{k} = 4\,\underline{v_1} - 4\,(20\,\underline{i} - 15\,\underline{j} + 12\,\underline{k})$$

$$\therefore \quad \underline{v_1} = (52\,\underline{i} - 11\,\underline{j} + 92\,\underline{k}) \text{ மீ/விநாடி.}$$

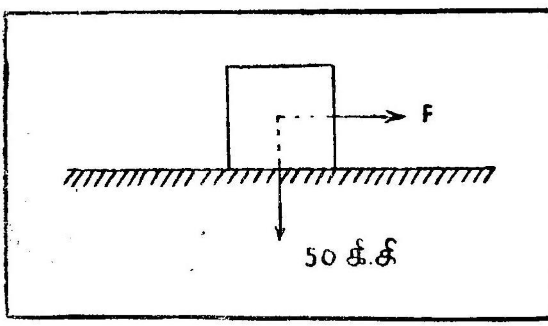
7·7-4. 50 கிலோகிராம் எடையுள்ள கட்டையொன்று, மழமழப்பான கிடைத்தளம் ஒன்றில், அமைதி நிலையிலுள்ளது. $(10 + 2t)$ கி.கி. விசை ஒன்று, கட்டையின்மேல், கிடைத் திசையில் செயற்படுகிறது. நான்கு விநாடிகளுக்குப்பின், துகளின் வேகத்தைக் காண்க.

$$\int_{t_0}^{t_1} F\,dt = m v_1 - m v_0$$

$$\int_0^4 (10 + 2t)\,dt = \frac{50}{9{\cdot}81} v_1 - 0$$

$$\therefore \quad v_1 = \frac{56 \times 9{\cdot}81}{50}$$

$$= 10{\cdot}987 \text{ மீ/வினாடி.}$$



படம் 7·5

7·7-5. 100 கிலோகிராம் எடையுள்ள கட்டையொன்று, உராய்வுக்கெழு 0·2 என்றுள்ள வழவழப்பற்ற கிடைத்தளத்தில், ஓய்வுநிலையிலுள்ளது. 75 கி.கி. விசை எண்மதிப்பைக்கொண்ட விசை ஒன்று கிடைக்கோட்டிற்கு 30° ஏற்றக் கோணச்சரிவில், படம் (7.6)-ல் காட்டியவாறு, கட்டையின்மேல் 3 வினாடிகள் செயற்படுகிறது. அந்நேரத்தில் கட்டை பெற்ற இறுதி வேகம் யாது?

N என்பது எதிர்த்தாக்கவிசை,

$F = \mu N$ என்பது உராய்வு விசையாகும்.

கட்டை கிடைத்தளத்திலியங்குவதால்,

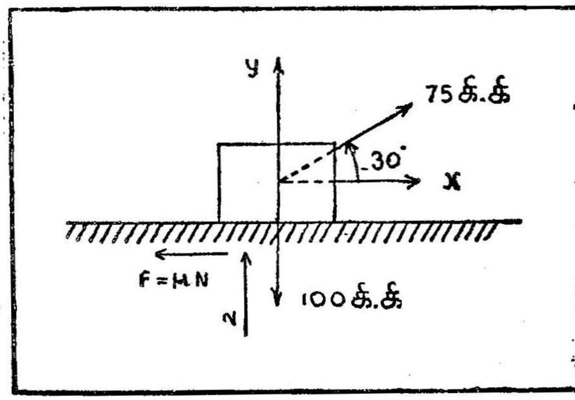
$\Sigma F_{iy} = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad 75 \times \frac{1}{2} - 100 + N = 0$$

எனவே, $N = 62{\cdot}5$ கி கி. விசை

$$F = \mu N = 0{\cdot}2 \times 62{\cdot}5$$

$$= 12{\cdot}50 \text{ கி.கி. விசை}$$



படம் 7·6

கிடைத்திசையில் கட்டையின்மேல் செயற்படும் விசை

$$= 75 \cos 30° - \mu N$$

$$= 75 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 12{\cdot}50$$

$$= 52{\cdot}44 \text{ கி.கி. விசை}$$

$$\therefore \int_0^3 F\,dt = m v_1 - m v_0 \text{ என்பதால்,}$$

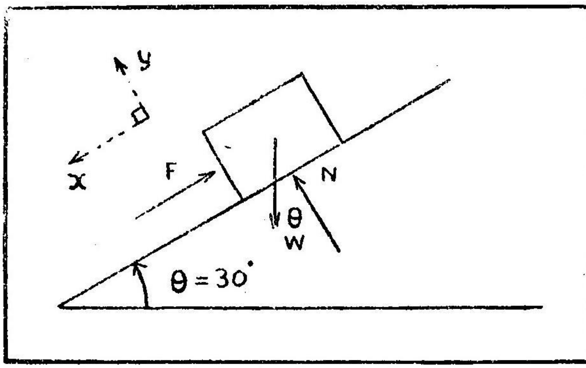
$$\int_0^3 52{\cdot}44\,dt = \frac{100}{9{\cdot}81} v_1 - 0$$

$$\therefore \quad v = \frac{9{\cdot}81}{100} \times 52{\cdot}44 \times 3$$

$$= 15{\cdot}44 \text{ மீ/விநாடி.}$$

7 7-6. கிடைத்தளத்துடன் 30° கோணச்சரிவிலமைந்து, 0·4 என்னும் உராய்வுக்கெழுவுடைய மழமழப்பற்ற சாய்தளமொன்றில் கீழ்முகமாகக் கட்டையொன்று சறுக்கி விழுகின்றது. 5 விநாடிகளில் அது பெறும் திசைவேக மிகுதிப்பாட்டைக் காண்க.

கட்டையைத் தனிப்படுத்திய அமைப்பு, படம் (7·7)-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 7·7

கட்டையின் எடை W, செங்குத்துத் தாக்கவிசை N, இயக்கத்தைத் தடுக்கும் உராய்வு விசை $F = \mu N$, ஆகியவை கட்டையின் மேல் செயற்படும் புற விசைகளாகும்.

சாய்தளத்தில் கீழ்நோக்கியவாறு x-அச்சையும், அத்தளத்திற்குக் குத்தான திசையில் y-அச்சையும் எடுக்கவும்.

சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் இயக்கம் ஏதும் இல்லை என்பதால், $\Sigma F_{iy} = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad N = W \cos \theta$$

x திசையில் விசைகள் விளைவிக்கும் தாக்களவையின் நிகர மதிப்பு,

$$I_x = (W \sin \theta - F)\ t$$
$$= (W \sin \theta - \mu\ W \cos \theta)\ t$$
$$= W (\sin \theta - \mu \cos \theta)\ t$$

இதனை, அத் திசையில் ஏற்படும் உந்த மாற்றத்திற்குச் சமப் படுத்த,

$$\Delta\ (mv) = W (\sin \theta - \mu \cos \theta)\ t$$

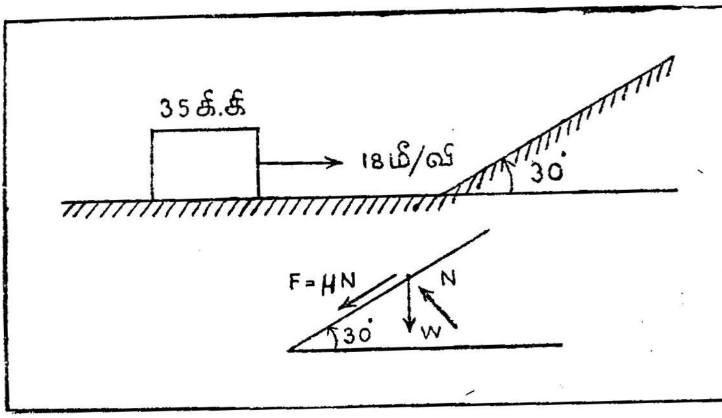
$$\frac{W}{g}\ (\Delta\ v) = W (\sin \theta - \mu \cos \theta)\ t \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \Delta\ v = g\ (\sin \theta - \mu \cos \theta)\ t$$

இங்கு $= 9{\cdot}81\ (\sin 30° - 0{\cdot}4 \cos 30°) \times 5$

$= 7{\cdot}536$ மீ/விநாடி.

7·7-7. 35 கிலோகிராம் எடையுள்ள பொருளொன்று, விநாடிக்கு 18 மீட்டர் வேகத்தில் இயங்கும்போது, அது 30° ஏற்றக் கோணச் சரிவைப் பெற்ற வழவழப்பற்ற சாய்தளத்தை அடைகிறது, உராய்வுக் கெழு, 0·3 எனில், அப் பொருள் சாய்தளத்தில் ஓய்வு நிலையைப் பெறுவதற்கு எடுக்கும் நேரம் யாது?



படம் 7·8

சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் பொருளுக்கு இயக்கமில்லாமையால், $\Sigma F_{iy} = 0$ ஆகும்.

$\therefore \quad N - W\cos 30° = 0$

அதாவது, $N = 35 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30{\cdot}31$ கி.கி.

F = உராய்வு விசை

$= \mu N$

$= 0{\cdot}3 \times 30{\cdot}31$

$= 9{\cdot}093$ கி.கி.

t விநாடிகளுக்குப் பின், பொருள் சாய்தளத்தில் ஓய்வு நிலையைப் பெறுவதாகில்,

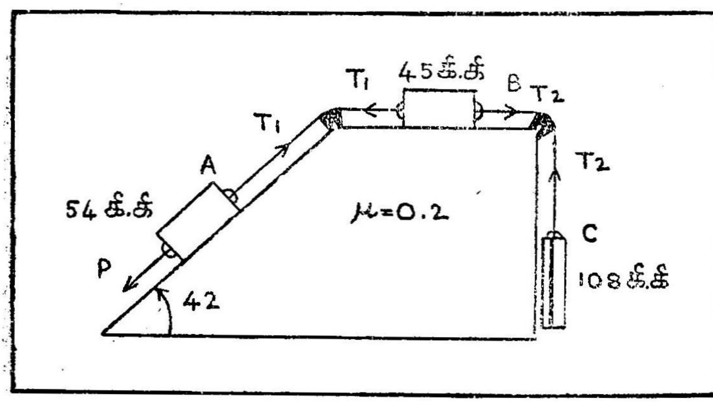
$$\int_0^t (-35 \sin 30° - 9{\cdot}093)\, dt = 0 - \frac{35}{9{\cdot}81} \times 18$$

$$(17{\cdot}5 + 9{\cdot}093)\, t = \frac{70}{1{\cdot}09}$$

$$\therefore \quad t = \frac{70}{1{\cdot}09 \times 26{\cdot}593}$$

$= 2{\cdot}415$ விநாடிகள்.

7·7-8. 108 கிலோகிராம் எடையுள்ள உருளைக் கட்டை ஒன்று தொடக்கத்தில் வினாடிக்கு 3 மீட்டர் வேகத்தில் மேல் நோக்கி இயங்குகிறது. P என்னும் மாறு விசை ஒன்று படம் (7·9)-ல் காட்டியவாறு, 20 வினாடிகளில் அக் கட்டை வினாடிக்கு 6 மீட்டர் வேகத்தைப் பெறுமாறு இழுக்கிறது. கப்பிகள் இலேசானவை எனவும், மழமழப்பானவை எனவும், தளத்திற்கு ஏற்ற உராய்வுக் கெழு 0·2 எனவும், கயிறுகள் மீள்சக்தி அற்றவை எனவும் கொண்டு P-யின் மதிப்பைக் காண்க.



படம் 7 9

கயிறுகள் மீள்சக்தி அற்றவைகளானதால், மூன்று பொருள்களும், எந்நேரத்திலும், ஒரே அளவுள்ள வேகத்தைப் பெறத் தக்கவையாகும்.

மேலும் கப்பிகள் இலேசாகவும், மழமழப்பானதாகவும் உள்ளதால், கப்பிகள் ஒவ்வொன்றின் இரு புறங்களிலமையும் கயிறுகளில் செயற்படும் இழு விசைகளும் சமமாகும்.

எனவே, $T_1 = T_2$

இம் மூன்று பொருள்களைத் தனிப்படுத்திய அமைப்பு படம் (7·10)-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

ஒவ்வொரு பொருளின் இயக்கத்திற்கு ஏற்றதான, தாக்களவை—உந்தச் சமன்பாடு பின்வருமாறு :

கட்டை A :

$$[P + 54 \sin 42° - 0{\cdot}2\,(54 \cos 42°) - T_1] \times 20 = \frac{54}{9{\cdot}81}(6-3),$$

கட்டை B :

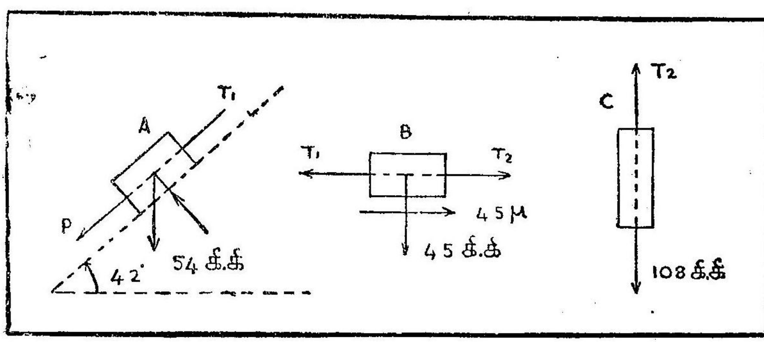
$$[T_1 - T_2 - 0{\cdot}2\,(45)] \times 20 = \frac{45}{9{\cdot}81}\,(6-3),$$

கட்டை C :

$$[T_2 - 108] \times 20 = \frac{108}{9{\cdot}81}\,(6-3).$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளையும் கூட்ட,

$$[P + 54 \sin 42^\circ - 0{\cdot}2\,(54 \cos 42^\circ) - 9 - 108] \times 20$$
$$= \frac{(54+45+108)}{9{\cdot}81} \times 3$$



படம் 7·10

அதாவது,

$$(P + 36{\cdot}130 - 8{\cdot}026 - 9 - 108) \times 20$$
$$= \frac{207 \times 3}{9{\cdot}81}$$

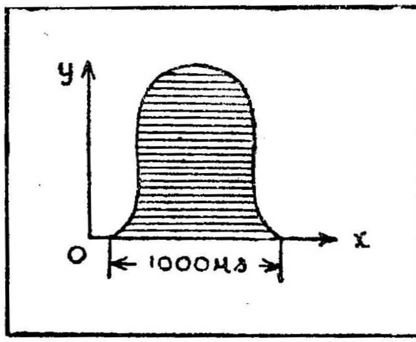
$$,, \quad P - 88{\cdot}896 = 3{\cdot}120$$

$$\therefore \quad P = 3{\cdot}120 + 88{\cdot}896 = 92{\cdot}016 \text{ கி.கி. விசை}$$

7·8. பயிற்சி

7.8-1. ஒரு விசை 1000 மைக்ரோ விநாடிகளில், படம் (7·11)-ல் காட்டியவாறு, 500 நியூட்டன்-விநாடி அளவுள்ள தாக்களவையை ஏற்படுத்தியுள்ளது எனில், அவ்விசையின் சராசரி எண் மதிப்பு யாது? [விடை : 5×10^5 நியூட்டன்]

7·8-2. ஒரு கிலோகிராம் நிறையுள்ள துகளொன்று, தொடக்கப் புள்ளியில் ஓய்வு நிலையிலுள்ளது. நேரத்தைச் சார்ந்து மாறக்



படம் 7·11

கூடிய $\underline{F} = t^2\,\underline{i} + (6t + 10)\,\underline{j} + 1{\cdot}6t^3\,\underline{k}$ கி.கி. என்னும் விசை அதன்மேல் செயல்படுகிறது. 5 வினாடிகள் சென்றபின், துகளின் திசைவேகத்தைக் காண்க.

[விடை : $(41{\cdot}66\,\underline{i} + 125\,\underline{j} + 250\,\underline{k})$ மீ/வினாடி]

7·8-3. 3·27 கிலோகிராம் எடையுள்ள துகளொன்றில், $\underline{F} = t^2\,\underline{i} - 2\,\underline{j} + 0{\cdot}4t\,\underline{k}$ கிலோகிராம் விசை செயல்படுகிறது. நேரம் $t = 0$ வினாடியாக உள்ளபோது, துகளானது, $\underline{v}_0 = (3\,\underline{i} - 2\,\underline{j} + \underline{k})$ மீ/வினாடி என்னும் திசைவேகத்தைப் பெற்றுள்ளது. $t = 3$ வினாடியாக உள்ளபோது, அதன் திசைவேகத்தைக் காண்க.

[விடை : $(30\,\underline{i} - 20\,\underline{j} + 6.4\,\underline{k})$ மீ/வினாடி]

7·8-4. 98·1 கிலோகிராம் எடையுள்ள கட்டையொன்று, மழமழப்பான கிடைத்தளமொன்றில் ஓய்வு நிலையிலுள்ளது. அதன்மேல், $(10-2t)$ கிலோகிராம் விசை ஒன்று, கிடைத் திசையில் செயற்படுகிறது. அத்துகள் எந்நேரத்தில், மிகப்பெரிய வேகத்தைப்பெறும்? அப்போது அதன் வேகத்தையும் காண்க.

[விடை : 5 வினாடிகள் ; உச்சவேகம் = 2·5 மீ/வினாடி]

7·8-5. 3 கிலோகிராம் நிறையுள்ள துகள் ஒன்றின்மேல், $14t^2$ கிலோகிராம் எண் மதிப்புள்ள விசை ஒன்று, $(3\,\underline{i} - 6\,\underline{j} + 2\,\underline{k})$ என்னும் திசையிக்கு இணையாகச் செயல்படுகிறது. $t=0$

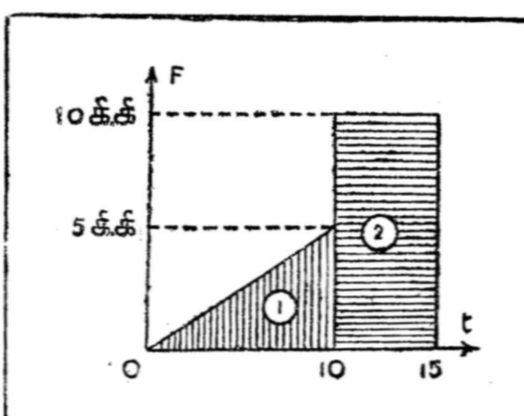
என்னும் நேரத்தில், துகள் விநாடிக்கு, $(6\underline{i} + 9\underline{j} + 5\underline{k})$ மீட்டர் திசைவேகத்தில் இயங்குமெனில், $t=3$ விநாடியாக உள்ள போது, அதன் திசைவேகம் யாது?

[விடை : $(182 \cdot 58\, \underline{i} - 344 \cdot 16\, \underline{j} + 122 \cdot 72\, \underline{k})$ மீ/விநாடி]

7·8-6. 50 கிலோகிராம் நிறையுடைய துகள் ஒன்றில், t விநாடி நேரத்தில் செயல்படும் விசைத் தொகுதியின் விளைவு விசை $\underline{F} = 3t^2\, \underline{i} - 7\, \underline{k}$ கி.கி. விசையாகும். நேரம் $t = 0$ என்றுள்ள போது, துகள் $\underline{v_0} = 1 \cdot 5\, \underline{j}$ மீ/விநாடி என்னும் திசை வேகத்துடன் இயங்குகிறதெனில், $t = 2$ விநாடியாக உள்ளபோது, அதன் திசை வேகத்தைக் காண்க.

[விடை : $(1 \cdot 5696\, \underline{i} + 1 \cdot 5\, \underline{j} - 2 \cdot 7468\, \underline{k})$ மீ/விநாடி]

7·8-7. ஓய்வு நிலையிலுள்ள துகளொன்றின்மேல், நேரத்தைச் சார்ந்து மாறும் விசை ஒன்றின் அமைப்பு, படம் (7·12)-ல் காட்டியவாறு உள்ளது. துகளின் நிறை 3 கிலோகிராம் எனவும்

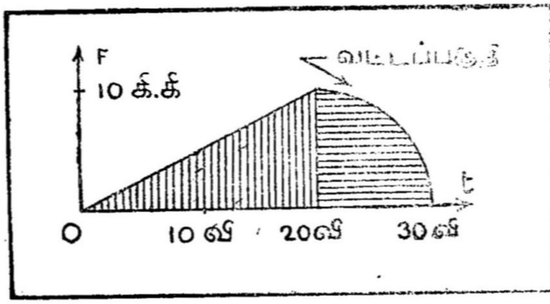


படம் 7·12.

அது ஒரு நேர் கோட்டில், விசை செயற்படும் திசையிலேயே நகர்வதாகவும் கொண்டு, 15 விநாடிகளில் அது பெறும் வேகத்தைக் காண்க.

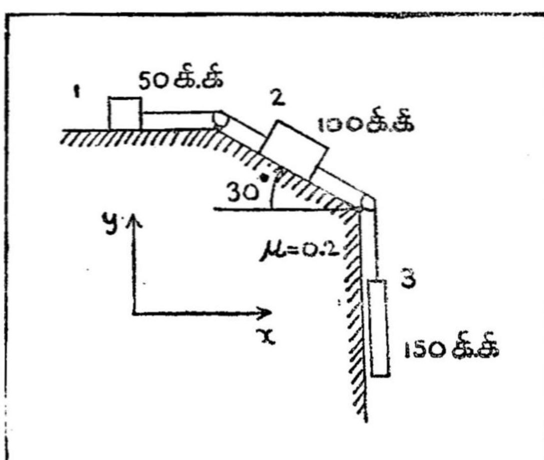
[விடை : 245·25 மீ/விநாடி]

7·8-8. ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் செயற்படும் விசை ஒன்று 2 கிலோகிராம் நிறையைப் பெற்ற துகள் ஒன்றை, அது ஓய்வு நிலையில் உள்ளபோது தாக்குகிறது. அவ் விசையின் தாக்களவை மதிப்பு, படம் (7·13)-ல் காட்டியுள்ள பரப்பளவால் வரையறுக்கப் படும் எனில், 30 விநாடிகள் சென்றபின், துகள் பெறும் வேகத்தைக் காண்க. [விடை : 89·27 மீ/விநாடி)



படம் 7·13.

7·8-9. படம் (7·14)-ல் காட்டியவாறு, பொருட்டொகுதி ஒன்று, ஓய்வு நிலையிலிருந்து புறப்பட்டு, 10 விநாடிகள் சென்ற



படம் 7·14.

பின், அவற்றின் திசைவேகத்தைக் காண்க. கம்பிகள் மீள் சக்தியற்றவை எனவும், கப்பிகள் மழமழப்பானவை எனவும் கொள்க. [விடை : 56·45 மீ/விநாடி]

7·9. கணத்தாக்கு விசைகள் (Impulsive Forces)

m நிறையுடைய பொருள் ஒன்றின் மீது, P என்னும் விசையானது, t நேரத்திற்குத் தாக்குவதாகக் கொள்க. இந்த நேரத்தின் தொடக்கத்திலும் இறுதியிலும் அப்பொருளின் வேகங்கள் முறையே v_1, v_2 எனக் கொள்க. அப்பொழுது

$$Pt = m(v_2 - v_1)$$

காலத்தைச் சிறிதாக்கிக்கொண்டும் விசைகளைப் பெரிதாக்கிக்கொண்டும் செல்லும்பொழுது, அவற்றின் பெருக்கம் முடிவுள்ளதாக இருக்கக்கூடும். அத்தகைய மீப்பெரு விசையின் விளைவு, அவ்விசை விளைவிக்கும் உந்த மாற்றத்தால் அறியப்படும். ஆகவே குறுகிய காலத்தில் செயற்படும் மீப்பெருவிசையானது கணத்தாக்கு விசை எனப்படும்.

வரையறை :

ஒரு கணத்தாக்கு விசை ஒரு மிகச்சிறிய நேரத்திலே தாக்குகின்ற ஒரு மிகப் பெரிய விசையாகும். ஆயின், அவ்விசை ஒரு துகளின்மீது தாக்கும் நேரத்தில் அத்துகளின் நிலைமாற்றம் (Change in position) புறக்கணிக்கப்படலாம். அதன் முழு விளைவும் அதன் உந்தமாற்றத்தால் அளவிடப்படும்.

உண்மையில் அத்தகைய முடிவிற்கு மிகக்குறுகிய ஒரு காலத்திற்குத் தாக்குகின்ற மிகப்பெரிய ஒரு விசையைப் பெறுவது முடியாததாகும். ஆயினும் சம்மட்டியால் கொடுக்கப்படும் தாக்கு, கிரிக்கட் பந்தின் மீது பந்தடிக்கும் மட்டை கொடுக்கும் அடி ஆகியவை அத்தகைய கணத்தாக்கு விசைகளைப் பெரிதும் ஒத்திருக்கக்கூடிய எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

பொதுவாக, ஒரு பொருளினது ஒரு கணத்தாக்கு விசையும், முடிவுள்ள ஒரு விசையும் ஒருங்கே செயல்பட்டால், கணத்தாக்கு விசை செயல்படும் குறுகிய காலத்தில் முடிவுள்ளவிசையின் விளைவு புறக்கணிக்கத்தக்கதாகவேயிருக்கும்.

7·10. இரு மழமழப்பான பொருள்களின் மோதுகை

A, B என்னும் இரு பொருள்கள் ஒன்றோடொன்று மோதும்போது நியூட்டனின் மூன்றாவது இயக்க விதிப்படி, அவை ஒன்றையொன்று தொடும் ஒவ்வொரு கணத்திலும், Bயின் மீதுள்ள Aன் தாக்களவை. Aயின் மீதுள்ள Bயினது தாக்களவைக்குச் சமனுமெதிருமாயிருக்கும். இதிலிருந்து Bயினது உந்தமாற்றம், Aயினது உந்தமாற்றத்திற்குச் சமனுமெதிருமாயுமிருக்குமென்பது பெறப்படும். ஆகவே இவ்வித மாற்றங்களின் மொத்தம், பொதுச் செங்

கோட்டு திசையில் அளக்கப்படின், பூச்சியமாகும். எனவே அவ் விரு பொருள்களுடைய உந்தமொத்தம் ஒரே திசையில் அவற்றின் மோதுகையால் மாருது. அதாவது, $mu + m^1u^1 = mv + m^1v^1$.

இச்சமன்பாடு, 'நேர்கோட்டு உந்தக் காப்புவிதி' எனக் கூறப்படும்.

7·11. ஒரு குண்டு, துப்பாக்கி ஆகியவற்றின் இயக்கம்

ஒரு துப்பாக்கி வெடி குண்டைச் சுடுகிறது. அப்பொழுது அதனுள் இருக்கும் தூள் திடீரென மிகவுயர்ந்த அழுத்தத்தில் வாயுவாக மாறித் தன் விரிவால் அதற்குளுள்ள குண்டை வெளியே செலுத்துகிறது. அக் குண்டு துப்பாக்கியை விட்டு வெளிக் கிளம்பு முன் யாதேனுமொரு கணத்தில், அதன்மீது முற்பக்கமாக ஏற்பட்ட விசை அத் துப்பாக்கியின்மீது பிற்பக்கமாக ஏற்பட்ட விசைக்குச் சமனுமெதிருமாயிருக்கும். ஆகவே, அக் குண்டின் மீதுள்ள இவ்விசையின் தாக்கு, அத். துப்பாக்கியின் மீதுள்ள விசையின் தாக்குக்குச் சமனாகவும், எதிராகவும் இருக்கும். எனின், அக் குண்டில் பிறப்பிக்கப்பட்ட முன்னோக்கிய உந்தம், துப்பாக்கி இயங்குமாறு கட்டின்றி நின்றால், அது, துப்பாக்கியில் பிறப்பிக்கப் பட்ட பின்னோக்கிய உந்தத்திற்குச் சமனுமெதிருமாயிருக்கும்.

குண்டு, துப்பாக்கி ஆகியவற்றின் திணிவுகள் முறையே m, m_s ஆகவும், குண்டு வெளியே பறக்கும் முகப்பு வேகம் v_s ஆகவும், துப்பாக்கியின் பின்னுதைப்பு வேகம் v_g ஆகவுமிருந்தால், நேர் கோட்டு உந்தக் காப்பு விதியின்படி $m_s v_s + mv_g = 0$

ஆனால் துப்பாக்கிக் குழாய் மேல் நோக்கிச் சரிவாக வைக்கப் பட்டிருந்தால், துப்பாக்கியினுந்தம், குண்டின் உந்தத்திற்குச் சமனாயும், எதிராயும் இருக்காது. துப்பாக்கியின் கிடைமட்டத் திசையில் உள்ள உந்தம், குண்டின் கிடைமட்டத் திசையில் உள்ள உந்தத்தையே சரிக்கட்டும்.

மேலும், துப்பாக்கிக்குக் கொடுக்கப்பட்ட ஏதேனுமொரு நிலைக் குத்து உந்தமானது, அது நிற்கும் தளத்தின்மீது ஏற்படும் கணத் தாக்கு அமுத்தத்தால் ஈடு செய்யப்படும்.

7·12. மாதிரிக் கணக்குகள்

7·12-1 50 கிராம் திணிவுள்ள ஒரு துப்பாக்கி ரவை கிடையாக விஞடிக்கு 81 மீட்டர் வேகத்துடன் வழவழப்பான கிடை மேசையின் மீதுள்ள 4 கி.கி. திணிகொண்ட ஒரு மரக்கட்டைக்குள்

ஊடுருவுமாறு சுடப்படுகிறது. அந்த ரவை மரக்கட்டைக்குள் புதைந்த பிறகு மரக்கட்டையின் வேகமென்ன ?

துப்பாக்கிரவை மரக்கட்டைக்குள் புதைந்தபின், அவையிரண்டும் ஒரே பொருளாக v என்னும் வேகத்துடனியங்குவதாகக் கொள்க. மோதுகையால் மொத்த உந்தத்தில் மாறுபாடு ஏதும் இல்லாததால், மோதுகைக்கு முன்னுள்ள மொத்த உந்தம் = மோதுகைக்குப் பின்னுள்ள மொத்த உந்தம் ஆகும்.

$$\frac{50 \times 81}{1000} + 4 \times 0 = \left(\frac{50}{1000} + 4\right) v$$

$\therefore \quad v = 1$ மீட்டர்/விநாடி.

7·12-2. 20 மெட்ரிக் டன்கள் நிறையுடைய ஒரு பீரங்கியானது 40 கி.கி நிறையுடைய துப்பாக்கிக் குண்டை விநாடிக்கு 350மீ வேகத்தில் சுடுகிறது. அதன் பின்னடிப்பு 2 மெட்ரிக் டன்கள் எடைக்குச் சமமான விசையினால் தடைப்பட்டால். அப்பீரங்கி எத்தனைத் தொலைவு பின்னடிக்கும் ?

பீரங்கியின் பின்னடிப்பு வேகம் u எனில்,

$$20 \times 1000 \times u = 40 \times 350$$

$$\therefore \quad u = \frac{7}{10} \text{ மீ/விநாடி}$$

ஆற்றல் கோட்பாட்டின்படி,

பீரங்கியின் இறுதி இயக்க ஆற்றல் — பீரங்கியின் தொடக்க இயக்க ஆற்றல் = பின்னடிப்பு விசை செய்த எதிர் வேலை.

$$\therefore \quad 0 - \frac{1}{2} \times \frac{20 \times 1000}{9{\cdot}8} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = -2 \times 1000\, s$$

$\therefore \quad s = 25$ செ.மீ.

7·12-3. 5000 கிராம் எடையுள்ள ஒரு பீரங்கிக் குண்டு, விநாடிக்கு 500 மீட்டர் வேகத்தோடு வெடிக்கப்படுகிறது. அதன் இயக்க ஆற்றலை எர்க்குகளில் காண்க. அப் பீரங்கிக்கு 100 கி.கி. நிறையும் இயங்குவதற்குக் கட்டின்மையும் (Free of Recoil) உண்டெனின், அதன் பின்னடிப்பு ஆற்றலைக் காண்க.

பீரங்கிக் குண்டின் இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} \times 5000 \times 500 \times 500 \times 10^4$$

$$= 625 \times 10^{10} \text{ எர்க்குகள்}$$

பீரங்கியின் பின்னடிப்பு வேகம் u ஆகுக.

∴ உந்தக் காப்பு விதிப்படி,

$$5000 \times 500 \times 100 = 100 \times 1000 \times u$$

∴ $u = 2500$ செமீ/விநாடி

பீரங்கியின் பின்னடிப்பாற்றல்

$$= \frac{1}{2} \times 100 \times 1000 \times 2500 \times 2500$$

$$= 3125 \times 10^8 \text{ எர்க்குகள்.}$$

7·12-4. விநாடிக்கு 28 மீட்டர் திசைவேகத்துடன் கிடையாக இயங்கும் 155 கிராம் நிறையுள்ள ஒரு கிரிக்கட்பந்து நேராக விநாடிக்கு 16 மீட்டர் திசைவேகத்துடன் திருப்பி அடிக்கப் படுகிறது. பந்தடிக்கும் மட்டை பந்தைத் தொடும் நேரம் $\frac{1}{18}$ விநாடியெனில் பந்தடிக்கும் மட்டை செயல்படுத்தும் சராசரி கணத் தாக்கு விசையைக் காண்க.

P என்பது பந்தடிக்கும் மட்டை, பந்தின் மேல் செயல்படுத்தும் சராசரி கணத் தாக்கு விசையாகுக. அவ்விசையின் கணத் தாக்கம் I எனில்,

$$I = \text{உந்தமாற்றம்} = 155\,[2800-(-1600)]$$

$$= 155 \times 4400 \text{ கிராம் செமீ.}$$

ஆனால் $I = Pt$

$$\therefore \quad P = \frac{I}{t} = \frac{155 \times 4400}{\left(\frac{1}{18}\right)} = 18 \times 155 \times 4400 \text{ டைன்கள்}$$

$$= \frac{18 \times 155 \times 4400}{981} \text{ கிராம் எடை}$$

$$= 12{\cdot}513 \text{ கிலோகிராம் எடை.}$$

7·12-5. 12 மெட்ரிக்டன்கள் நிறையுள்ள துப்பாக்கி, 25க்கு 7 என்னும் ஒரு வழவழப்பான சரிவின் கீழ்ப்பகுதியில் முட்டுகளின் உதவியால் ஓய்வில் இருக்கிறது. அது 50 கி.கி. நிறையுள்ள ஒரு குண்டை விநாடிக்கு 240 மீட்டர் என்னும் வேகத்தோடு கிடையாகச் சுட்டுச் சரிவில் பின்னடித்தது. அது சரிவில் எத்தொலைவு பின்னடிக்கும்?

துப்பாக்கியின் பின்னடிப்பு வேகம் வினாடிக்கு v மீட்டர் எனக் கொள்க. குண்டின் உந்தம் துப்பாக்கியின் கிடைமட்டத் திசையில் உள்ள உந்தத்தைச் சரிக்கட்டும். மேலும் சாய்தளக் கோணம் α எனில், துப்பாக்கியின் கிடைத்திசை வேகம் $v \cos \alpha$ ஆகும். எனவே உந்தக்காப்புக் கோட்பாட்டின்படி,

$$50 \times 240 = 10 \times 1000 \times v \cos \alpha = 10 \times 1000 \times v \times \frac{24}{25}$$

$\therefore \quad v = 125$ செ.மீ/வினாடி.

அது பின்னடித்துச் செல்லும் தொலைவு s செ.மீ ஆகுக.

சரிவில் புவியீர்ப்பு முடுக்கம் $= -g \sin \alpha = -981 \times \frac{7}{25}$

$$\therefore \quad 0^2 = 125^2 - 2 \times 981 \times \frac{7}{25} s$$

$$\therefore \quad s = 28 \cdot 44 \text{ செ.மீ.}$$

7·12-6. M நிறையுள்ள ஒரு துப்பாக்கி, m நிறையுள்ள ஒரு குண்டை கிடையாகச் சுடுகிறது. வெடியின் ஆற்றல் குண்டை நிலைக்குத்தாக h உயரத்திற்குச் செலுத்தக்கூடும் எனின், துப்பாக்கியின் பின்னடிப்பு வேகம்

$$\left[\frac{2m^2gh}{M(M+m)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

எனக் காட்டுக.

துப்பாக்கியின் பின்னடிப்பு வேகம், குண்டின் முன்னேக்கிய வேகம் ஆகியவை முறையே u, v எனக் கொள்க. உந்தக்காப்புக் கோட்பாட்டின்படி

$$Mu = mv$$

வெடியின் மொத்த இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} Mu^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} M \cdot \frac{m^2 v^2}{M^2} + \frac{1}{2} mv^2$$

$$= \frac{1}{2} mv^2 \left(\frac{m}{M} + 1\right) = \frac{1}{2} \frac{m(M+m)}{M} v^2$$

இவ்வாற்றல் குண்டை நிலைக்குத்தாக h உயரத்திற்குச் செலுத்துவதாகில், $\frac{1}{2}(m/M)(M+m)v^2 = mgh$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{2Mgh}{M+m}; \qquad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}$$

u = துப்பாக்கியின் பின்னடிப்பு வேகம்

$$= \frac{mv}{M} = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2\,Mgh}{M+m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\,m^2gh}{M\,(M+m)}}$$

7·12-7. M கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு சம்மட்டி h மீட்டர் உயரத்திலிருந்து m கி.கி நிறையுள்ள ஒரு பதிகால் தூணின் (Pile) உச்சிக்குமேல் விழுந்து அதனை நிலத்திற்குள்ளே 'a' மீட்டர் ஆழம் செலுத்துகின்றது. நிலத்தடையை (Ground Resistance) மாறிலியாகவும், பதிகால் தூண் மீள்சக்தியற்றதாகவும் கொண்டு நிலத்தடையைக் காண்க. மேலும் பதிகால் தூண் இயக்கத்தி லிருந்த நேரத்தையும், மோதுகையிலுள்ள இயக்க வாற்றலிழப்பை யும் காண்க.

பதிகால் தூணை அடிக்கும்பொழுதுள்ள சம்மட்டியின் வேகம் u ஆகுக. அப்பொழுது, $u^2 = 2\,gh$.

மோதுகைக்குப் பின் சம்மட்டி, பதிகால் தூண் ஆகியவற்றின் வேகம் v ஆகுக. ஆகவே உந்தக் கோட்பாட்டின்படி

$$(M+m)\,v = Mu \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

நிலத்தடை P நியூட்டன்களெனில், பதிகால் தூண் நிலத்திற்குள் செல்வதைத் தடுக்கும் விசை $= P - (M+m)\,g$

ஆற்றல் காப்புத் தத்துவத்தின்படி,

$$\frac{1}{2}\,(M+m)\,v^2 = [P-(M+m)\,g]\,a$$

$$\therefore\quad P = (M+m)\,g + (M+m)\,\frac{v^2}{2a}$$

$$= (M+m)\,g + \frac{M+m}{2a}\,\frac{M^2u^2}{(M+m)^2}$$

$$= (M+m)\,g + \frac{M^2u^2}{(M+m)\,2a}$$

$$= (M+m)\,g + \frac{M^2}{M+m}\,\frac{2gh}{2a}$$

$$= (M+m)\,g + \frac{M^2}{M+m}\,\frac{gh}{a} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

நிலத் தடையினுல் ஏற்படும் எதிர் முடுக்கம் f மீ/விஞடி^{2} எனக் கொள்க. மோதுகைக்குப் பின் உள்ள v என்னும் வேகமானது 'a' தொலைவு உட்புகுந்தவுடன் பூச்சியமாவதால்,

$$0 = v^2 - 2fa$$

$$\therefore \quad f = \frac{v^2}{2a} \quad \text{ஆகும்.} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

அத்தூண் இயக்கத்திலிருந்த நேரம் t எனில்,

$$0 = v - ft$$

$$\therefore \quad t = \frac{v}{f} = \frac{v}{v^2}\, 2a = \frac{2a}{v}$$

மேலும் (1)-லிருந்து $v = \dfrac{Mu}{M+m} = \dfrac{M}{M+m}\sqrt{2gh}$

$$\therefore \quad t = \frac{2a(M+m)}{M\sqrt{2gh}} = \frac{(M+m)\,a}{M}\sqrt{\frac{2}{gh}} \qquad \ldots \qquad (4)$$

மோதுகையிலுள்ள இயக்க ஆற்றலிழப்பு,

$$= \frac{1}{2}Mu^2 - \frac{1}{2}(M+m)v^2$$

$$= \frac{1}{2}Mu^2 - \frac{1}{2}(M+m)\frac{M^2u^2}{(M+m)^2}$$

$$= \frac{1}{2}Mu^2 - \frac{1}{2}\frac{M^2u^2}{(M+m)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Mm}{(M+m)}u^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Mmgh}{M+m} \text{ ஜூல்கள்} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5)$$

7·12-8. 100 கிராம், 96 கிராம் அளவுள்ள நிறைகள் வழவழப்பான ஒரு கப்பியின் மீது செல்லும் மெல்லிய கயிற்றினுல் இணைக்கப்பட்டு, ஓய்விலிருந்து புறப்படும்படி செய்யப்படுகின்றன. ஒரு விஞடி முடிவில் சிறிய நிறை ஓய்விலிருக்கும் 4 கிராம் நிறை ஒன்றைத் தன்னுடன் எடுத்துச் செல்கிறது. இதையடுத்த விஞடி இறுதியில், அந்த 4 கிராம் நிறை தானே கீழே வீழ்ந்து விடுகிறது. இயக்கத் தொடக்கத்திலிருந்து 3 விஞடிகள் கடந்தபின், அந்த நிறைகளின் நிலைகளைக் காண்க.

முதல் வினாடியில் அத் தொகுதியின் முடுக்கம்

$$f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{100-96}{100+96} \times 980 = 20 \text{ செமீ/வினாடி}^2$$

$\therefore$ முதல் வினாடியினிறுதியில் தொகுதியின் திசை வேகம்

$$= 0 + ft = 20 \text{ செமீ/வினாடி.}$$

முதல் வினாடியில் 100 கிராம் நிறை இறங்கிய தொலைவு

$$= \frac{1}{2} ft^2 = 10 \text{ செமீ.}$$

மற்ற நிறை இதே தொலைவு மேல்நோக்கி உயருகிறது.

4 கிராம் நிறையை எடுத்துக் கொள்ளுமுன் தொகுதியின் உந்தம்.

$$= 196 \times 20 \text{ கிராம்—செமீ.}$$

4 கிராம் நிறையைச் சிறிய நிறை எடுத்துக் கொள்ளும்போது அதிர்ச்சியின் காரணமாக, உந்தத்தில் மாறுபாடு ஏற்படுகிறது.

4 கிராம் நிறையை எடுத்துக் கொண்டபின், பொதுவான திசைவேகம் u ஆகுக. எனவே, உந்தக் கோட்பாட்டின்படி,

$$200\, u = 196 \times 20 ; \quad \therefore \quad u = 19{\cdot}6 \text{ செமீ/வினாடி.}$$

இப்போது, இரு நிறைகளும் சமமானதால், தொகுதியின் முடுக்கம் பூச்சியமாகும். ஆகவே, இந்த இரண்டாவது கால இடைவெளியான ஒரு வினாடியில், தொகுதியானது 19·6 செமீ. திசைவேகத்துடன் செல்கிறது இரு நிறைகளும் தத்தம் முந்திய திசைகளில் மேலும் 19·6 செமீ. தொலைவு செல்கின்றன.

ஆகவே இரண்டாவது வினாடி இறுதியில் 100 கிராம் நிறையானது $(10 + 19{\cdot}6) = 29{\cdot}6$ செமீ. தொலைவு கீழிறங்குகிறது. மற்றைய நிறை இதே தொலைவு மேல் நோக்கி ஏறியுள்ளது.

இந் நிலையில் 4 கிராம் நிறை தானாகவே கீழே விழுவதால் அதிர்ச்சி ஏதுமில்லை. ஆகையால் உந்த மாற்றம் ஏதுமில்லை. இப்பொழுது தொகுதியின் முடுக்கம்

$$= \frac{100-96}{100+96} \times 980 = 20 \text{ செமீ/வினாடி}^2$$

திசைவேகம் $= 19{\cdot}6$ செமீ/வினாடி.

ஆகவே இயக்கத்தின் மூன்ருவது விஞடியில் 100 கிராம் நிறையானது. மேலும் $ut + \frac{1}{2}ft^2$ தொலைவு கீழிறங்குகிறது.

அதாவது, $19{\cdot}6 \times 1 + \frac{1}{2} \times 20 \times 1^2 = 29{\cdot}6$ செமீ. கீழ் இறங்குகிறது. ஆதலால் தொடக்கத்திலிருந்து மூன்று விஞடிகளி னிறுதியில் 100 கிராம் நிறை தனது தொடக்க நிலையிலிருந்து $29{\cdot}6 + 29{\cdot}6 = 59{\cdot}2$ செமீ தொலைவு கீழிறங்கி உள்ளது. மற்றைய நிறையும் இதே தொலைவு தனது தொடக்கநிலையிலிருந்து மேலேறியுள்ளது.

7·13. மோதுகையில் இயக்க ஆற்றலின் இழப்பு (Loss of Kinetic Energy due to Impact).

u-என்ற திசைவேகத்துடன் இயங்கும் m-என்ற ஒரு நிறை, ஓய்விலிருக்கும் M-என்ற மற்றொரு நிறையை மோதட்டும். M ஆனது m இயங்கும் திசையில் இயங்கத் தடையேதும் இல்லை எனக்கொள்க. மேலும், மோதுகைக்குப்பின் இரு நிறைகளும் ஒன்ருகச் சேர்ந்து ஒரே பொருளாக v என்னும் திசைவேகத்துடன் இயங்கட்டும்.

மோதுகையில், மொத்த உந்தத்தில் மாறுபாடு ஏதும் இல்லாத தால்,

$$(m + M)\,v = mu.$$

மோதுகைக்கு முன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}\,mu^2$

மோதுகைக்குப்பின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}\,(m + M)\,v^2$

$$= \frac{1}{2}\,(m + M)\cdot\frac{m^2u^2}{(m + M)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{m^2u^2}{(m + M)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m + M}\right)mu^2$$

இங்கு $\frac{m}{m + M} < 1$ என்பதால், மோதுகைக்குப்பின் ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல், மோதுகைக்கு முன் உள்ள $\frac{1}{2}\,mu^2$ என்னும் இயக்க ஆற்றலை விடக் குறைவுபடும்.

எனவே,

மோதுகையால் ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right) mu^2 - \frac{1}{2} mu^2$$

$$= \frac{1}{2} mu^2 \left[\frac{m}{m+M} - 1\right]$$

$$= -\frac{m\,M\,u^2}{2\,(m+M)}$$

இவ்வித இழப்பு ஏற்படுவதால், ஆற்றல் கோட்பாட்டை (Principle of Energy), தாக்கு, கணத்தாக்கு விசைகள் தொடர்பான கணக்குகளில் பயன்படுத்தக் கூடாது.

7·14. மாதிரிக் கணக்குகள்

7.14-1. m' நிறையுள்ள ஒரு குண்டு, m'' நிறையுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து வினாடிக்கு v' வேகத்தில் கிடையாகச் சுடப்பட்டு, அக்குண்டு l நீளமும், m நிறையும் கொண்ட ஒரு தனி ஊசல் கோளத்தை அடிக்கிறது. துப்பாக்கி கட்டின்றி இயங்குவதாகக் கொண்டு

(i) அதன் பின்னடிப்பு வேகம்,

(ii) நிலைக்குத்தான நிலையுடன் ஊசல் அமைக்கும் கோணம் (Angle of Displacement for the Pendulum),

(iii) மோதுகைக்குப்பின், இழையில் செயல்படும் இழுவிசை ஆகியவற்றைக் காண்க.

துப்பாக்கி கட்டின்றி v'' என்னும் திசைவேகத்துடனியங்குவதாகக் கொள்க. நேர்கோட்டு உந்தக் காப்பு விதியின்படி,

$$m''\,v'' + m'\,v' = 0$$

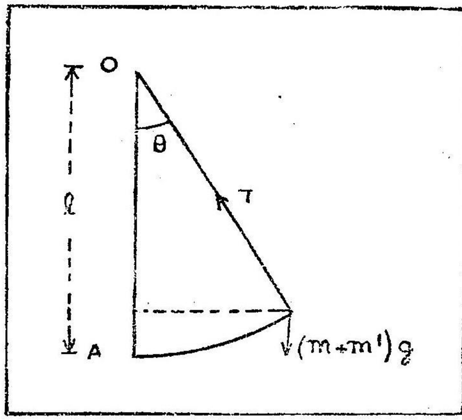
$$\therefore \quad v'' = -\left(\frac{m'}{m''}\right) v'$$

குண்டு, தனி ஊசலியை அடித்தவுடன், ஊசல் கோளம் v என்னும் தொடக்கத் திசைவேகத்துடன் இயங்குகிறதெனில்,

$$m'v' = (m + m')\,v \quad \text{ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad v = \left(\frac{m'}{m+m'}\right) v' \quad \text{ஆகும்.}$$

t என்னும் ஏதேனுமொரு நேரத்தில், தனி ஊசல் நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன் படம் (7·15 -ல் காட்டியவாறு θ என்னும் ஊசலாடும் கோணத்தை ஏற்படுத்துவதாகக் கொள்க.



படம் 7·15

அப்பொழுது, ஆற்றல் காப்பு விதியின்படி,

$$\frac{1}{2}(m + m^1)\,v^2 = (m + m^1)\,g\,l\,(1 - \cos\theta)$$

அதாவது, $\cos\theta = \dfrac{2gl - v^2}{2gl}$ ஆகும்.

$(m + m^1)$ என்னும் நிறையைப் பெற்ற துகள், O என்னும் நிலைபுள்ளியை மையமாகக்கொண்டு, ஒரு நிலைக்குத்து வட்ட பகுதியில் அலைவுறுவதால், நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, இழையில் செயல்படும் T என்னும் இழுவிசையானது,

$$T - (m + m^1)\,g = (m + m^1)\,a_n = (m + m^1)\frac{v^2}{l}\,,$$

$$\therefore\quad T = (m + m^1)\left(g + \frac{v^2}{l}\right) \text{ என்றாகும்.}$$

7·14-2. 56 கிலோகிராம் நிறையுடைய ஒரு சம்மட்டி, 1·6 மீட்டர் தொலைவிலிருந்து விழுந்து, இரும்பு நிறையொன்றை அடித்தபின் ஓய்வடைகிறது. அடி நிகழ்ந்த நேரம் $\frac{1}{40}$ வினாடி. அச் சம்மட்டியால் இரும்பின் மீது பயன்படுத்தப்பட்ட கணத்தாக்கு விசை மாறுதெனக் கொண்டு அதனைக் காண்க. ($g = 9·8$ மீ/வினாடி^{2})

சம்மட்டி இரும்பு நிறையை அடிக்கும்போது அதன் திசைவேகம் $= \sqrt{2gh} = (2 \times 9{\cdot}8 \times 1{\cdot}6)^{\frac{1}{2}} = 5{\cdot}6$ மீ/விநாடி.

எனவே, அடிப்பதற்கு முன் உந்தம் $= 56 \times 5{\cdot}6$ கி.கி.மீ/விநாடி. சம்மட்டி இரும்பு நிறையை அடித்தபின் ஓய்வடைவதால் அடித்தபின் உந்தம் $= 0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad I = \text{தாக்களவை} \uparrow = \text{உந்தமாற்றம்} \uparrow = 0 - (-56 \times 5{\cdot}6)$$

$$= 56 \times 5{\cdot}6 \text{ கி.கி.மீ./விநாடி}$$

$$= \frac{56 \times 5{\cdot}6}{9{\cdot}8} \text{ கி. கி.}$$

P கிகி எடை என்பது இரும்பின்மீது பயன்படுத்தப்பட்ட கணத்தாக்கு விசையெனில், சம்மட்டியின் எடை கீழ்நோக்கி அமைவதால், சம்மட்டியின் மேல் நிகழ்ந்த தாக்கு விசை

$$= P - mg = P - 56 \times 9{\cdot}8.$$

$$\therefore \quad (P - 56 \times 9{\cdot}8)\, t = I = \text{தாக்களவை}$$

$$\therefore \quad P - 56 \times 9{\cdot}8 = \frac{56 \times 5{\cdot}6}{\frac{1}{40} \times 9{\cdot}8} = \frac{56 \times 5{\cdot}6 \times 40}{9{\cdot}8} = 1280$$

$$P = 1280 + 56 \times 9{\cdot}8 = 1828{\cdot}8 \text{ கி.கி. எடை.}$$

7·14-3. m நிறையுள்ள துப்பாக்கி ரவை ஒன்று, M நிறையுடைய நிலையான கட்டைக்குள் உட்புகும் தடிப்பு (thickness) s ஆகும். ரவை உட்புகுவதற்குள்ள தடை சீராக இருப்பதாகக் கொண்டு, M-ஆனது இயங்குவதற்கு கட்டின்றி இருக்கும்போது, உட்புகப்பட்ட தடிப்பு $\frac{M}{M+m} s$ எனக் காட்டுக.

துப்பாக்கி ரவையின் தொடக்கத்திசைவேகம் u ஆகுக. ரவை உட்புகுவதற்குள்ள கட்டையின் தடையை F என்க. இத்தடையை எதிர்த்து ரவை s தொலைவு உட்செல்கிறது. ஆகவே, ஆற்றல் கோட்பாட்டின்படி,

$$O - \frac{1}{2} mu^2 = -F \cdot s$$

அதாவது $mu^2 = 2Fs$ ... ... (i)

கட்டை நிலையாக இல்லாமல் இயங்கும்போது ரவை கட்டைக்குள் பூர்த்தியாக உட்புகுந்தவுடன், ரவை, கட்டை ஆகியவற்றின் பொதுவான திசை வேகம் v ஆகுக.

உந்தக்காப்புக் கோட்பாட்டின் படி,

$$(M + m)\, v = mu + MO = mu \qquad \dots \qquad \text{(ii)}$$

உட்புகுந்த தொலைவு x என்றும், கட்டை சென்ற தொலைவு y என்றும் எடுத்துக்கொண்டால், ஆற்றல் கோட்பாட்டின்படி,

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mu^2 = -F(x + y) \qquad \dots \qquad \text{(iii)}$$

ஆற்றல் கோட்பாட்டின்படி, கட்டைடையைச்சார்ந்து,

$$\frac{1}{2} Mv^2 - O = Fy \text{ ஆகும்.} \qquad \dots \qquad \text{(iv)}$$

(iii), (iv) ஆகியவற்றைக் கூட்ட

$$\frac{1}{2}(m + M)\, v^2 - \frac{1}{2} mu^2 = -Fx$$

அதாவது $\frac{1}{2}(m + M)\frac{m^2u^2}{(m + M)^2} - \frac{1}{2} mu^2 = -Fx$

$$\frac{1}{2} \frac{m(2\,Fs)}{(m + M)} - \frac{1}{2} \cdot 2\,Fs = -\,Fx$$

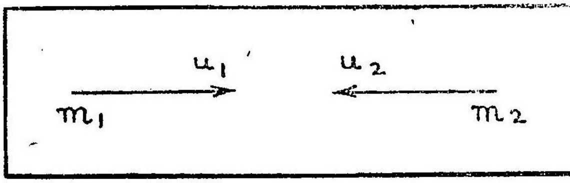
$$\therefore \quad x = \frac{Ms}{M + m}$$

7·14-4. ஒரு குண்டு வெடித்து m_1, m_2 என்னும் நிறைகளுடைய இரு துண்டுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. அவை முறையே u_1, u_2 என்னும் தொடக்கத் திசை வேகங்களுடன் எதிர்த்திசைகளில் இயங்குகின்றன. இதனால் இயக்க ஆற்றலில்,

$$\frac{1}{2} \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\,(u_1 + u_2)^2$$

அளவு மிகுபயன் உள்ளது என நிறுவுக.

உந்தக் கோட்பாட்டின்படி,



$$m_1u_1 - m_2u_2 = 0.$$

குண்டு வெடிப்பதற்கு முன் இயக்க ஆற்றல் $= 0$.

குண்டு வெடித்தபின் இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} m_1 u^2{}_1 + \frac{1}{2} m_2 u^2{}_2$$

$$(m_1 + m_2)(m_1u_1^2 + m_2u_2^2) = (m_1u_1 - m_2u_2)^2 + m_1m_2(u_1 + u_2)^2 = m_1m_2(u_1 + u_2)^2$$ ஆகும்.

$\therefore \quad m_1u_1 + m_2u_2^2 = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(u_1 + u_2)^2$ ஆகும்.

எனவே இயக்க ஆற்றலில் ஏற்பட்ட ஆதாயம்,

= { குண்டு வெடித்தபின் இயக்க ஆற்றல் — குண்டு வெடிப்பதற்குமுன் இயக்க ஆற்றல் }

$$= \left(\frac{1}{2} m_1u_1^2 + \frac{1}{2} m_2u_2^2\right) - 0$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}(u_1 + u_2)^2$$

4·9 பயிற்சி

7·15-1. 9 கிராம் நிறையுள்ள ஒரு பளிங்குக்கல் 10 மீ உயரத்திலிருந்து தரையின்மீது விழுந்து 10 செ மீ. உயரத்திற்கு எழும்புகிறது. அக் கல் தரையைத் தொடும் நேரம் $\frac{1}{70}$ விநாடி யெனின் அக் கல்லுக்கும் தரைக்குமுள்ள சராசரி விசையைக் காண்க. ($g = 980$ செமீ/விநாடி^{2}) எனக் கொள்க.

[விடை : 990 கிராம் எடை.]

7·15-2. விநாடிக்கு 21 மீட்டர் திசை வேகத்துடன் கிடையாக இயங்கும் 109 கிராம் நிறையுடைய கிரிக்கெட் பந்து நேராக விநாடிக்கு 15 மீ திசைவேகத்துடன் திருப்பி அடிக்கப்படுகிறது. பந்தடிக்கும் மட்டை பந்தைத் தொடும் நேரம் $\frac{1}{20}$ விநாடி எனில், பந்தடிக்கும் மட்டை செயல்படுத்தும் சராசரி கணத்தாக்கு விசையைக் காண்க. [விடை : 8 கிகி எடை]

7·15-3. 4 செமீ விட்டமுள்ள ஒரு வட்டமான குழாயின் நுனிமூலம் தண்ணீர் விநாடிக்கு 35 செமீ திசை வேகத்துடன் ஒரு சுவரின் மேல் செங்குத்தாக விழுந்து அதன் மோதுகையால் திசைவேகத்தை இழக்கிறது. சுவரின் மீதுள்ள அழுத்தத்தைக் காண்க.

[ஒவ்வொரு விநாடிக்கும் விழும் தண்ணீரின் நிறை $= \frac{22}{7} \times 2 \times 2 \times 35$ கிராம் $= 440$ கிராம். ஒவ்வொரு விநாடியிலும் அழிக்கப்பட்ட உந்தம் $= 440 \times 35 = 15400$ டைன்கள் எனவே சுவரின் அழுத்தம் $= 15400$ டைன்கள்.]

7·15-4. 50 கிராம் நிறையுள்ள துப்பாக்கி ரவை கிடையாக விநாடிக்கு 81 மீ. வேகத்துடன் வழவழப்பான கிடைமேசையின் மீதுள்ள 4 கி.கி. நிறையுள்ள ஒரு மரக்கட்டைக்குள் ஊடுருவுமாறு சுடப்படுகிறது. அந்த ரவை மரக்கட்டைக்குள் புதைந்தபின், மரக்கட்டையின் வேகமென்ன?

[விடை : 1 மீ/விநாடி]

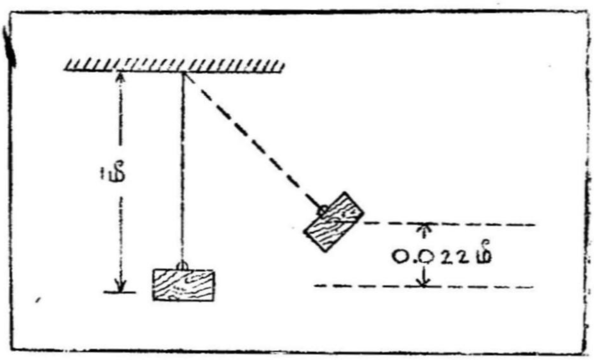
7·15-5. 16 கிராம் நிறையுடைய ஒரு பொருள் விநாடிக்கு 12 செமீ. வேகத்தோடு இயங்கி அதே திசையில் விநாடிக்கு 4 செமீ. வேகத்தோடு இயங்குகின்ற 48 கிராம் நிறையுடைய ஒரு பொருளை மோதுகின்றது. மோதுகைக்குப்பின் அவை ஒரு பொருளாக ஒன்றினால் அக் கூட்டுப் பொருளின் வேகத்தைக் காண்க. அவை எதிர் திசைகளில் இயங்கினவெனில், மோதுகையின் பின் அக் கூட்டுப் பொருளின் வேகத்தைக் காண்க.

[விடை : 6 செமீ/விநாடி ; ஓய்விலிருக்கும்]

7·15-6. ஒரு மெட்ரிக்டன் (1016 கி.கி) நிறையுள்ள ஒரு துப்பாக்கி 12·7 கி.கி நிறையுள்ள ஒரு குண்டை வெடித்த பிறகு வழவழப்பான சாய்தளத்திலே மேன்முகமாக பின்னடித்து 0·9 மீ உயரம் எழும்புகிறது. அக்குண்டு எறியப்பட்ட வேகத்தைக் காண்க. [விடை : 336 மீ/விநாடி]

7·15-7. ஒரு கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு குண்டு 9 கி கி நிறையுள்ள ஒரு நிலையான கட்டையை 10 செ மீ ஊடுருவுகிறது. அக்கட்டை நகரக்கூடியதாகவும் அது குண்டின் இயக்கத்திற்கு விளைவிக்கும் தடை சீரானதாகவும் இருப்பின், அதே வேகத்தோடு செலுத்தப்படும் குண்டு கட்டையை எவ்வளவு தொலைவு ஊடுருவும்? [விடை : 9 செ.மீ]

7·15-8. 50கிராம் எடையுள்ள ஒரு துப்பாக்கி ரவை படம் (7·16)-ல் காட்டியவாறு நிலைக்குத்தாகத் தொங்கும் 1மீ நீளமுள்ள கயிறு ஒன்றின் நுனியில் கட்டப்பட்டுள்ள 50 கி.கி எடையுள்ள ஒரு மரக்கட்டைக்குள் ஊடுருவுமாறு சுடப்படுகிறது. அந்த



படம் 7·16

ரவை மரக்கட்டைக்குள் புதைந்த பிறகு அக்கட்டை நிலைகுத்து வட்டப் பகுதியில் அலைவுற்று 0·022 மீ உயரத்தைப் பெறுகிறது எனில் மரக்கட்டைக்குள் புதையும்போது ரவையின் வேகத்தைக் காண்க. [விடை : 657·7 மீ/வினாடி]

7·15-9. 500 கி.கி எடையும். மணிக்கு 54 கி.மீ வேகத்தில் கிழக்கு நோக்கி ஓடிக்கொண்டிருக்கும் மோட்டார் கார் ஒன்று வடமேற்கு திசையில் (N 45° W) மணிக்கு 72 கி மீ வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் 1200 கி.கி எடையுள்ள பேருந்துவண்டி ஒன்றை மோதுகிறது. மோதலைக்குப் பின் அவை ஒரு பொருளாக ஒன்றி இயங்குமெனில், அக்கூட்டுப்பொருளின் வேகங்காண்க.

[விடை : 51·82 கி.மீ/வினாடி]

7·15-10. 90 கிகி. எடையுள்ள ஒரு மனிதன் வினாடிக்கு 5 மீ வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் தருணத்தில் 100 கிகி

எடையுள்ள படகில் குதிக்கிறான். தொடக்கத்தில் படகானது மனிதனை நோக்கி விநாடிக்கு 1 மீ. வேகத்தில் இயங்கிக்கொண்டிருந்தது. மனிதன் குதித்த பின், படகின் வேகத்தைக் காண்க.

[விடை : 1·842 மீ/விநாடி]

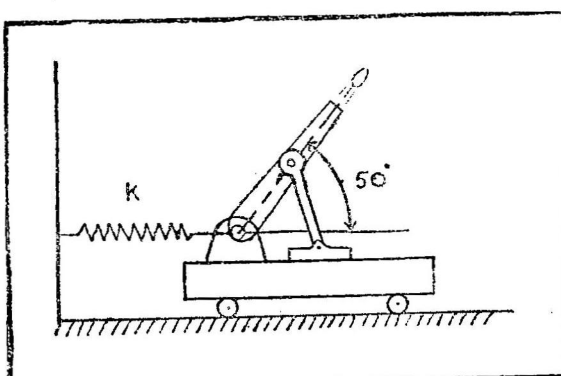
7·15-11. மேற்கூறிய (7·15-10) ஆவது கணக்கில் படகானது மனிதனுக்கு அப்பால் (away) இயங்கிக் கொண்டிருக்குமெனில், அவன் படகில் குதித்த பின், படகின் வேகம் காண்க.

[விடை : 2·9 மீ/விநாடி]

7·15-12. 450 கிகி. நிறையுடைய ஒரு குண்டு 81000 கிகி. நிறையுடைய பீரங்கியிலிருந்து, விநாடிக்கு 373 மீ. வேகத்தோடு வெடிக்கப்படுகிறது. அப் பீரங்கி 1 35 மீ. பின்னடித்தபின், அதனை நிறுத்தத் தேவையான நிலையான தடைவிசையைக் காண்க.

[விடை : 18502 கிகி. எடை]

7·15-13. 1000 கிகி. எடையுள்ள பீரங்கி ஒன்று படம் (7·17)-ல் காட்டியவாறு பின்னடிப்பைக் கிடையாகத் தாங்குமாறு $k = 300$ கிகி. விசை மீ என்னும் வில் மாறிலியைப் பெற்ற (Spring Constant) திருகுச் சுருள்வில் ஒன்றுடன் பிணைக்கப்



படம் 7·17

பட்டுள்ளது. அப் பீரங்கியானது, 5 கிகி. எடையுள்ள குண்டு ஒன்றை எறிகோணம் (Angle of projection) 50° உள்ள திசையில் விநாடிக்கு 600 மீ. வேகத்தில் வெடிக்கிறது. பீரங்கியின் பின்னடிப்பு வேகம் உடனடியாக நிகழ்வதாகக் கொண்டு, சுருள் வில்லில் ஏற்பட்ட இறுக்கத்தின் (Compression) பெருமத்தைக் காண்க.

[விடை : 1·124 மீ.]

7·15-14. ஓர் இயந்திர பீரங்கி 40 கிராம் எடையுள்ள குண்டுகளை வினாடிக்கு மூன்று குண்டுகள் வீதம், 600 மீட்டர்/வினாடி என்னும் வேகத்தில் ஒரு இறுக்கமான எஃகு இலக்கை நோக்கிச்சுடுகிறது. குண்டுகளின் தெறிப்பு புறக்கணிக்கத் தக்கதாகவுள்ளது. இலக்கின் தடை சீரானதாகக்கொண்டு அதனைக் கணக்கிடுக. [விடை : 72 நியூட்டன்கள்]

7·16. மீள்சக்திப்பொருள்களின் மோதுகை (Collision of Elastic Bodies)

கண்ணாடி கோலி ஒன்றை மழமழப்பான பளிங்குத் தரையின் மீதும், பிறகு மரப்பலகையின் மீதும், ஒரு குறிப்பிட்ட உயரத்திலிருந்து போடுவோமாயின், அக்கோலி பளிங்குத்தரையிலிருந்து அதிக உயரத்திற்குத் தெறிப்பதையும், மரப்பலகையிலிருந்து மிகக் குறைந்த உயரத்திற்குத் தெறிப்பதையும் காணலாம். அவ்வாறே ஒரு கண்ணாடி கோலியையும், ஒரு ஈய கோலியையும் ஒரே உயரத்திலிருந்து தரையின் மீது விழச்செய்யும்போது, அவை தெறிக்கும் உயரங்கள் மாறுபட்டிருப்பதையும் காணலாம். இங்கு இரு பொருள்களும், முதன் முதல் தரையைத் தொடும்போது, சமமான வேகங்களைப் பெற்றிருக்கின்றன. ஆனால் அவை வெவ்வேறு உயரங்களுக்குத் தெறிக்கின்றமையால், தரையினின்று நீங்கும் போது அவற்றின் வேகங்கள் வெவ்வேறாக இருக்கவேண்டிவரும். தரையினின்று நீங்கியபின், அவற்றினுடைய வேகங்களில் இம் மாற்றத்தை விளைவிக்கும் பொருளியல்பு, அவற்றின் மீள்சக்தி (elastic) எனப்படும்.

பொருள்கள் ஒன்றையொன்று மோதிக்கொள்ளும் நேரம் மிகச் சிறியதாகவுள்ளபோதிலும், அவைகள் ஒன்றுக்கொன்று செயற் படுத்தும் விசைகள் மிகப்பெரியதாக இருக்கக்கூடும். இவ்விதச் செய்கையானது மோதுகை (Collision) எனப்படும். அத்தகைய மோதுகையின்போது, பொருள்கள் சற்று அழுத்தப்படுகின்றன. அவை, தங்கள் இயல்பான உருவத்தை அடைய முயற்சி செய்யும் போது தெறித்து இயங்குகின்றன. பொருள்களைத் தங்கள் இயல் பான உருவத்தைப் பெறச்செய்யும்போது மேற்கூறிய மீள்சக்திப் பண்பாகும். பொருள்கள் மோதிக்கொள்ளும்போது, அவை ஒன்றையொன்று தொடும் தளத்திற்குத் தொடுபுள்ளி வழியே வரையும் பொதுச் செங்குத்துக்கோடு, மோதுகைக் கோடு (line of impact) எனப்படும். இரு கோளங்கள் ஒன்றையொன்று மோதும் போது, அவற்றின் மையங்களை இணைக்கும் கோடு, பொதுச் செங்கோடாகும்.

7·16-1. மோதுகையின் வகைகள்

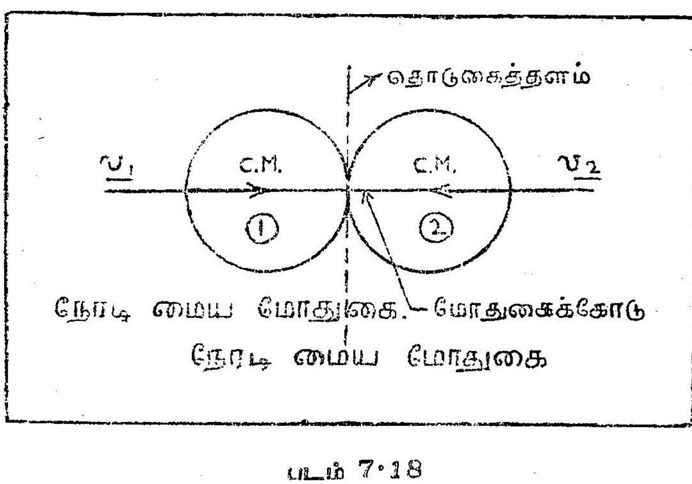
மோதுகையில் பங்கு பெறும் இரு பொருள்களின் திணிவு மையங்களும் மோதுகைக் கோட்டிலிருப்பின், அத்தகைய மோதுகை, மைய மோதுகை (central impact) எனப்படும்.

திணிவு மையங்கள், மோதுகைக் கோட்டிலமையாதிருப்பின், மோதுகையானது, வக்ர மோதுகை (Eccentric impact) எனக் கூறப்படும்.

மைய மோதுகையை, நேரடி மைய மோதுகை (Direct central impact), சரிவு மைய மோதுகை (Oblique central impact) என இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

7 16-2. நேரடி மைய மோதுகை

மோதலில் பங்கு பெறும் இரு பொருள்களின் திணிவு மையங்களும், அப் பொருள்கள் ஒவ்வொன்றின் இயக்கமும், அவைகள் ஒன்றையொன்று தொடும் புள்ளியிலுள்ள பொதுச் செங்கோட்டின் வழியே இருக்குமாயின் அவை ஒன்றையொன்று நேரடியாக மோதிக் கொள்கின்றன எனக்கொள்ளப்படும். நேரடி மைய மோதுகை படம் (7·18)-ல் காட்டியவாறு அமையும்.

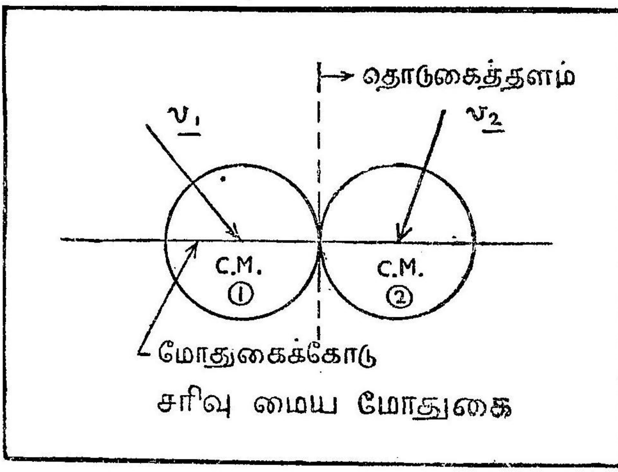


படம் 7·18

7·16-3. சரிவு மைய மோதுகை

பொருள்களின் திணிவு மையங்கள் மோதுகைக் கோட்டிலும், அவ் விரு பொருள்களின் இயக்கமோ அல்லது ஏதாவதொன்றின் இயக்கமோ, தொடும் புள்ளியிலுள்ள பொதுச் செங்கோட்டின்,

வழியே இல்லாமல் அதற்குச் சாய்ந்த திசையிலும் இருக்குமெனில், அவை ஒன்றையொன்று சரிவாய் அல்லது சாய்ந்து மோதிக்கொள்வதாகக் கருதப்படும். சரிவு மோதுகை படம் (7·19)-ல் காட்டியவாறு அமையும்.



படம் 7·19

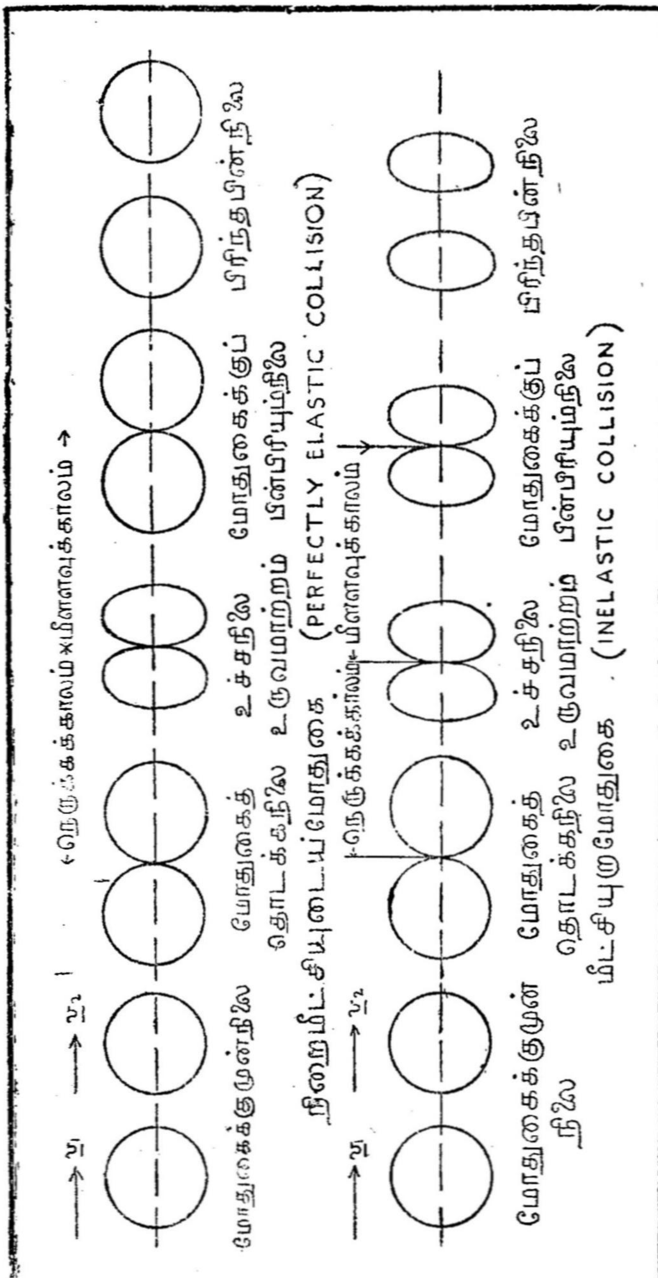
7·16·4 மீள்சக்திக் குணகம் (Coefficient of restitution)

m_1, m_2 என்னும் நிறைகளைப் பெற்ற இரு துகள்கள், $\underline{v_1}$, $\underline{v_2}$ என்னும் தொடக்கத் திசை வேகத்தில் ஒரு நேர்கோட்டு மிகைத் திசையில் படம் (7·20)-ல் காட்டியவாறு இயங்கட்டும்.

இரண்டாவது துகளைக் குறித்து, முதலாவது துகளின் சார் திசைவேகம் $(\underline{v_1} - \underline{v_2})$ ஆகும். இச் சார்திசைவேகம், அணுகும் திசை வேகம் (velocity of approach) எனவும் கூறப்படும்.

$\underline{v_1} > \underline{v_2}$ என்றுள்ளபோது இருதுகள்களும் மோதிக் கொள்ளும். அத்தகைய மோதுகை நடக்கும் நேரம் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு (two phases) அவை இருவிதத் தோற்ற அமைப்பைப் பெற்றுள்ளதாகக் கொள்ளப்படும். அவ்வித அமைப்புக்கள் பின்வருமாறு :

(1) துகள்களிரண்டும் ஒன்றையொன்று தொடக்கத்தில் தொடும் t_0 என்னும் நேரத்திற்கும், அவற்றில் மிகப்பெரிய உருவு மாற்றம் ஏற்படும் t_1 என்னும் நேரத்திற்குமிடையே அமையும் இறுக்க நிலைத்தோற்றம் (Compression phase).


v₁ → v₂
← நெருக்கக்காலம் →← மீளவுக்காலம் →
மோதுகைக்குமுன்நிலை
மோதுகைத் தொடக்கநிலை
உச்சநிலை
மோதுகைக்குப் பின்பிரியும்நிலை
பிரிந்தபின்நிலை
நிறைமீட்சியுடைய மோதுகை
உருவமாற்றம்
(PERFECTLY ELASTIC COLLISION)
மீட்சியுறுமோதுகை
(INELASTIC COLLISION)

படம் 7·20

$(t_1 - t_0)$ என்பது நெருக்ககாலத்தைக் (Period of Com pssreion) குறிக்கிறது.

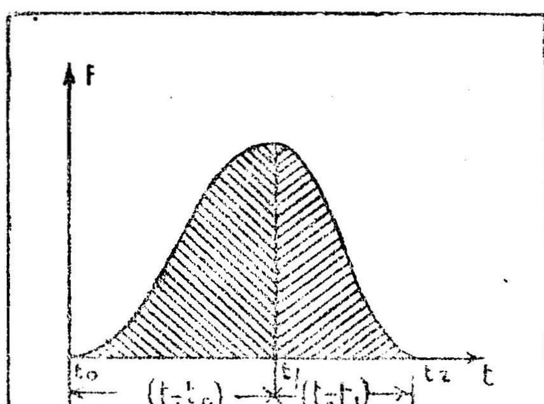
உச்சநிலை உருவ மாற்றத்தின்போது, துகள்களிரண்டும் u என்னும் ஒரே திசைவேகத்துடன் இயங்குகின்றன.

(2) மிகப்பெரிய உருவமாற்றம் ஏற்படும் t_1 என்னும் நேரத்திற்கும், துகளிரண்டும் மோதுகைக்குப்பின், பிரியும் போதுள்ள t_2 என்னும் நேரத்திற்குமிடையே அமையும் நீட்சி நிலைத்தோற்றம் (Restitution phase).

$(t_2 - t_1)$ என்பது மீளளவுக்காலத்தைக் (Period of restitution) குறிக்கிறது.

துகள்கள் பிரியும்போது, அவைகள் $v_1{}^1$, $v_2{}^1$ என்னும் திசைவேகங்களுடன் இயங்குவதாகக் கொள்க.

துகள்கள் ஒன்றையொன்று மோதிக்கொள்ளும்போது. அவற்றிற்கிடையே நிகழும் கணத்தாக்கு விசைகளை—(நெருக்குவிசை, நிலைமீட்சி விசை – Force of compression and force of restitution)—நேரத்தின் சார்பலனாக வரையறுக்க முடியுமெனில், மோதுகைக்கு



படம் 7·21

முன்னும், பின்னுமுள்ள தாக்களவைகள், படம் (7·21)-ல் காட்டியுள்ளவாறு அமையும் "விசை-கால" வரைபடத்தில் $(t = t_0, t = t_1)$-என்னும் குத்தாயங்கள், $(t = t_1, t = t_2)$-என்னும் குத்தாயங்கள் ஆகியவற்றிற்கு இடைபட்ட பரப்பளவுகளால் குறிக்கப்படும்.

இறுக்க நிலைத்தோற்ற அமைப்புக்கு ஏற்றதான "தாக்களவை —உந்தச்சமன்பாட்டை" ஒவ்வொரு துகளுக்கும் வரையறுக்கும் போது,

$$-\underline{I_c} = -\int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\, dt = m_1 (\underline{u} - \underline{v_1}) \quad \dots \quad (1)$$

$$\underline{I_c} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\, dt = m_2 (\underline{u} - \underline{v_2}) \quad \dots \quad (2)$$

என்பவை பெறப்படும்.

இங்கு $\underline{I_c}$ என்பது இறுக்க நிலைத் தாக்களவையைக் (Impulse of Compression) குறிப்பதாக உள்ளது.

மேலும் $(t_1 - t_0)$ என்னும் காலப் பகுதியில், m_1 நிறையுள்ள கோளம் அல்லது துகள் உந்த இழப்பையும், m_2 நிறையுள்ள கோளம் அல்லது துகள் உந்த மிகுதியையும் பெறுகின்றனவாகும்.

அவ்வாறே நீட்சி நிலைத் தோற்ற அமைப்புக்கு ஏற்றதான, $\underline{I_R}$ என்னும் மீட்சி நிலைத்தாக்களவையானது (impulse of restitution),

$$-\underline{I_R} = -\int_{t_1}^{t_2} \underline{F}\, dt = m_1 (\underline{v_1}' - \underline{u}) \quad \dots \quad (3)$$

$$\underline{I_R} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}\, dt = m_2 (\underline{v_2}' - \underline{u}) \quad \dots \quad (4)$$

என்னும் சமன்பாடுகளாலும் வரையறுக்கப்படும். மேலும், $(t_2 - t_1)$ என்னும் காலப்பகுதியில், முதல் துகளில் உந்த இழப்பும், இரண்டாவது துகளில் உந்த மிகுதியும் ஏற்படுகின்றன.

இரு பொருள்களும், தங்கள் இயல்பான தொடக்கநிலை உருவத்தைத் திரும்பப் பெறுவதாகில், அவைகள் நிறைமீட்சியுடையவை (Perfectly elastic) களாகக் கருதப்படும். பழைய நிலையைப் பெறாவிடின், அப் பொருள்கள் இளக்கமான நெருக்கப் பண்புடையவை (Plastic deformation) களாகக் கருதப்படும்.

பொதுவாக, $\underline{I_R}$-ன் மதிப்பு, $\underline{I_c}$-ன் மதிப்பைக் காட்டிலும் குறைவுற்றிருக்கும். மீட்சி நிலைத் தாக்களவையின் எண் மதிப்புக்கும், இறுக்க நிலைத் தாக்களவையின் எண் மதிப்புக்கும் உள்ள விகிதம் மீள்சக்திக் குணகம் அல்லது நிலைமீட்சிக்கெழு (Coefficient of elasticity or Coefficient of restitution) எனப்படும். இவ்விகிதம் ஒரு மாறிலியாகும். அது, "e" என்னும் எழுத்தால் குறிக்கப்படும்.

எனவே,

$$e = \frac{|\underline{I_R}|}{|\underline{I_c}|} = \frac{I_R}{I_c}$$

$$= \frac{\text{நிலைமீட்சி விசையின் தாக்களவை}}{\text{இறுக்க நிலைவிசையின் தாக்களவை}} \text{ ஆகும்} \quad \ldots \quad (5)$$

e- ஆனது, பொருள்களின் நிறையைச் சார்ந்திருக்காமல், அவற்றின் பருப் பொருளியலான (Physical properties), பருமன் (Size), உருவம் (Shape), மோதுகைக்கு முன் பொருள்களின் திசை வேகங்கள் ஆகியவற்றைச் சார்ந்துள்ளது.

மேலும், e- ஆனது, வெவ்வேறு மூலப்பொருள்களுக்கு வெவ்வேறான மதிப்பைக்கொண்டுள்ளது. நிலைமீட்சிக்கெழு பூச்சியமாக உள்ள பொருள்கள், மீட்சியுறுப்பொருள்கள் (Inelastic bodies) எனப்படும். நிலை மீட்சிக்கெழு ஒன்றாக உள்ள பொருள்கள் நிறை மீட்சிப் பொருள்க (perfectly elastic bodies)ளாகும். மற்ற பொருள்களனைத்தும், நிலைமீட்சிக்கெழு, பூச்சியத்திற்கும், ஒன்றுக்கும் இடையிலுள்ள மதிப்புக்களைத்தான் பெறமுடியும்.

7·16-5. நிலைமீட்சிக்கெழுவை மோதுகைப் பொருள்களின் திசைவேகங்களைக்கொண்டு வரையறுத்தல்

m_1 என்னும் நிறையைப்பெற்ற துகள் ஒன்றிற்குரிய $\underline{I_c}$, $\underline{I_R}$ என்பவைகள்,

$$-\underline{I_c} = m_1(\underline{u} - \underline{v_1}),$$

$$-\underline{I_R} = m_1(\underline{v_1}^1 - \underline{u})$$

என்னும் சமன்பாடுகளால் வரையறுக்கப்படுவதால்,

$$e = \frac{I_R}{I_c} = \frac{m_1(\underline{v_1}' - \underline{u})}{m_1(\underline{u} - \underline{v_1})}, \text{ அல்லது}$$

$$\underline{v_1}' - \underline{u_1} = e(\underline{u} - \underline{v_1}) \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

என்றாகும்.

அவ்வாறே, m_2 என்னும் நிறையுடைய இரண்டாவது துகளுக்கும்

$$e = \frac{\underline{I_R}}{\underline{I_c}} = \frac{m_2(\underline{v_2'} - \underline{u})}{m_2(\underline{u} - \underline{v_2})}, \text{ அல்லது}$$

$$\underline{v_2'} - \underline{u} = e(\underline{u} - \underline{v_2}) \text{ என்றாகும்} \quad \ldots \quad (7)$$

(7)-வது சமன்பாட்டை, (6)-வது சமன்பாட்டிலிருந்து கழிக்க,

$$\underline{v_1'} - \underline{v_2'} = -e(\underline{v_1} - \underline{v_2}), \text{ அல்லது}$$

$$e = -\frac{\underline{v_1'} - \underline{v_2'}}{\underline{v_1} - \underline{v_2}} = -\frac{\text{பிரியும் திசைவேகம் (velocity of separation)}}{\text{அணுகும் திசைவேகம் (velocity of approach)}} \quad (8)$$

ஆகும்.

e-ஆனது ஒரு பரிமாணமற்ற கணியமாகும்.

[குறிப்பு : (i) $\underline{I_R} = e\,\underline{I_c} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\underline{v_1} - \underline{v_2})$

(ii) மொத்தத் தாக்களவை

$$= \underline{I_c} + \underline{I_R}$$

$$= (1 + e)\,\underline{I_c}$$

$$= \frac{(1 + e)\, m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}(\underline{v_1} - \underline{v_2})$$

(iii) $\underline{u}$ = உச்சநிலை உருவ மாற்றத்தின்போது அந்நேரத்தில், துகள்களுடைய பொதுத் திசை வேகம்

$$= \frac{m_1 \underline{v_1} + m_2 \underline{v_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \underline{v_1'} + m_2 \underline{v_2'}}{m_1 + m_2}$$

என்றாகும்]

நிறைமீட்சியுடைய மோதுகையில், இறுக்கநிலைத் தாக்களவையும், மீட்சிநிலைத் தாக்களவையும் சமமாகும். எனவே, e-ன் மதிப்பு ஒன்றாகும்.

மீட்சியுரு மோதுகையில், e-யின் மதிப்பு பூச்சியமாகும். அப்போது,

$$\underline{v_1}' = \underline{v_2}' \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, பொருள்கள் இரண்டும் தொட்டுககொண்டே ஒரே திசைவேகத்திலியங்கும்.

7·16 6. மோதலுக்கான விதிகள்

எல்லாவித மோதல்களும் கீழ்க்கண்ட தத்துவங்களுக்குட்படும்.

(1) நியூட்டனின் பரிசோதனை விதி :

இரு பொருள்கள் ஒன்றையொன்று நேராக மோதினுல், மோதுகைக்குப் பின்னுள்ள அவற்றின் சார்திசை வேகம், மோதுகைக்கு முன்னுள்ள அவற்றின் சார்திசை வேகத்திற்கு ஒரு மாரு விகிதத்திலும், எதிர்த்திசையிலுமிருக்குமென பரிசோதனை வாயிலாக நியூட்டன் கண்டார்.

அப் பொருள்கள் சாய்ந்து மோதினுல், மோதுகைக்குப்பின் அவற்றின் பொதுச் செங்கோட்டின் மீது பகிர்ந்த சார்திசைவேகம், அத் திசையிலேயே மோதுகைக்குமுன் பகிர்ந்த சார்திசை வேகத்திற்கு ஒரு மாரு விகிதத்தில் எதிர்குறியுடனிருக்கும்.

இம் மாரு விகிதமே, மீள்சக்திக் குணகம் அல்லது நிலைமீட்சிக் கெழுவாகும்.

(2) மோதுகைக் கோட்டின்மீது இரு பொருள்களின் இயக்கம்

இரு பொருள்களின் மோதுகையில், அவைகள் எவ்விதப் புற விசைகளுக்கும் உட்படாமலியங்குவதால், மோதுகைக் கோட்டின் மீதுள்ள உந்தத்தின் மொத்தம் முன்னும், பின்னும் சமமாகும்.

(3) வழவழப்பான இரு பொருள்கள், மோதுகைக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாய் இயங்காமை

வழவழப்பான இரு பொருள்கள் ஒன்றையொன்று மோதும் போது, அவற்றினிடையே தொடுகோட்டுத் தாக்கம் யாதுமில்லை. ஆகவே, பொருள்களுக்கிடையேயுள்ள உள்ளமுக்கம் (stress) முற்றிலும் அவற்றின் பொதுச் செங்குத்துக் கோட்டின்மீதே உள்ளது. எனவே அக் கோட்டின் செங்குத்துத் திசையில் எவ்வித விசையுமில்லை. அதாவது, தொடுகோட்டுத் திசையில் எவ்வித விசையும் செயற்படுவதில்லை. ஆதலால், தொடுகோட்டுத் திசையில் வேகமாற்றமும் கிடையாது.

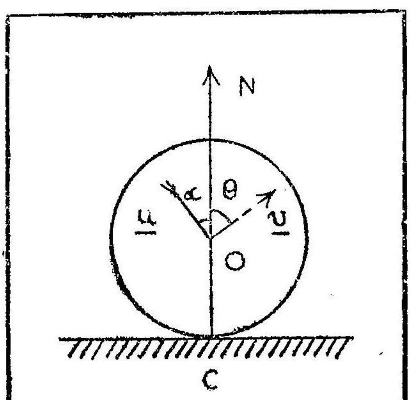
எனவே, பொதுச் செங்கோட்டிற்குத் தானதிசையில், ஒவ்வொரு பொருளினுடைய திசைவேகத்தின் பகிர்வு மோதுகையால் மாறுமலிருக்கும்.

மீள் சக்திப் பொருள்களில் மோதுகையின் காரணமாக ஏற்படும் இயக்க மாற்றத்தைப் பின்வரும் நிலைமைகளில் காணலாம்.

7·17. நிலையான தளத்தின்மீது மோதுகை

m நிறையும். e-என்னும் நிலமீட்சிக் கெழுவையும் பெற்ற மழமழப்பான கோளம் அல்லது துகளொன்று, நிலையான மழமழப்பான தரையின்மீது சாய்வாக மோதுகிறது. மோதுகைக்குப்பின் அதன் இயக்கத்தைக் காணுதல்.

படம் (7·22)-ல் காட்டியுள்ளவாறு, நிலக்குத்துக்கோட்டிற்கு α கோணச்சரிவில் u என்னும் வேகத்துடன் இயங்கும்போது, கோளம் நிலையான தளத்தை, C என்னும் புள்ளியில் மோதுவதாகக்கொள்க. C-யில் அத்தளத்திற்கு CN என்னும் செங்குத்துக்



படம் 7·22

கோட்டை வரைக. அக்கோடு, O என்னும் கோளமையத்தின் வழியே செல்லும். மோதுகைக்குப்பின், கோளம், நிலக்குத்துத் திசையுடன் θ என்னும் கோணச்சரிவில், v என்னும் வேகத்துடன் இயங்குவதாகக் கொள்க.

தளமும், கோளமும் உராய்வற்றிருப்பதால், மோதுகையின் போது, கணத்தாக்கவிசை ஒன்றுதான், பொதுச் செங்கோட்டு

வழியே செயல்படுகிறது. ஆகவே, பொதுத் தொடுகோட்டின் அதாவது, தளத்திற்கு இணையான திசையில், வேகங்களில் மாறுதல் ஏற்படாது.

$\therefore \quad v \sin\theta = u \sin\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதிப்படி,

$$v\cos\theta - O = -u(-u\cos\alpha - O),$$

அதாவது, $v\cos\theta = eu\cos\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$
ஆகும்.

(1), (2)—என்பவற்றின் வர்க்கக்கூடுதல்,

$$v^2 = u^2(\sin^2\alpha + e^2\cos^2\alpha) \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore \quad v = u\sqrt{\sin^2\alpha + e^2\cos^2\alpha} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

(2) ஐ (1) ஆல் வகுக்க,

$\cot\theta = e\cot\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$
என்பது கிடைக்கும்.

(3), (4)-என்னும் சமன்பாடுகள், மோதுகைக்குப்பின், கோளத்தின் இயக்கத்தை வரையறுக்கின்றன.

பின்வரும் துணை முடிவுகளையும் (corollaries) பெறலாம்.

(i) மோதுகை நேராயின், $\alpha = 0$

அதாவது, கோளம் தளத்தை நேரடியாக மோதும்போது, அது பொதுச் செங்கோட்டின் வழியே எதிர்த் திசையில், மோதுகைக்குப்பின், eu என்னும் வேகத்துடனியங்கும்.

(ii) $e = 1$ என்றால்,

$$\theta = \alpha, \quad v = u \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, நிறைமீட்சியுடைய கோளத்தின் படுகோணமும், தெறிகோணமும் சமமாகும். மேலும், மோதலால், வேகத்தின் எண் மதிப்பு மாறுவதில்லை.

(iii) $e = 0$ என்றால்,

$$\theta = 90°, \quad v = u\sin\alpha \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, கோளம் மீட்சியில்லாததாக இருப்பின், மோதலுக்குப்பின் கோளம், அத் தளத்திற்கிணையாகவுள்ள தன் தொடக்க வேகத்தின் பகிர்வு வேகம் மாருதவாறு, தளத்தின்மீது வழுக்கி இயங்கும்.

(iv) **மோதுகையால், மோதுகைக் கோட்டில் தளம்பெறும் தாக்களவை** (impulse), **கோளத்தின்மீதுள்ள தாக்களவைக்குச் சமனுமெதிருமாயிருக்கும்.**

ஆகவே, அத்தகைய தாக்களவையை, அத்தளத்திற்கு மேன்முகமான செங்கோட்டுத்திசையில், கோளம்பெறும் உந்த மாற்றத்தால் அளவிடப்படும். எனவே,

I = கோளத்தின் உந்தமாற்றம்

= மோதுகைக்குப்பின் கோளத்தின் உந்தம்—மோதுகைக்குமுன் கோளத்தின் உந்தம்

$= (mv\cos\theta)\uparrow - (-mu\cos\alpha)\uparrow$

$= m\,(v\cos\theta + u\cos\alpha)$

$= m\,(eu\cos\alpha + u\cos\alpha)$

$= (1+e)\,mu\cos\alpha$

(v) **மோதுகையால் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் இழப்பு**

மோதுகையால் இயக்க ஆற்றலின் மாற்றம்

= மோதுகைக்குப்பின் கோளத்தின் இயக்க ஆற்றல் —மோதுகைக்குமுன் கோளத்தின் இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$$

$$= \frac{1}{2}m\,(u^2\sin^2\alpha + e^2u^2\cos^2\alpha) - \frac{1}{2}mu^2$$

$$= \frac{1}{2}mu^2\,(\sin^2\alpha + e^2\cos^2\alpha - 1)$$

$$= \frac{1}{2}mu^2\,(e^2\cos^2\alpha - \cos^2\alpha)$$

$$= -\frac{1}{2}mu^2\,(1-e^2)\cos^2\alpha$$

$$= -\frac{1}{2}\,(1-e^2)\,mu^2\cos^2\alpha$$

இங்கு எதிர்குறியானது, மோதுகையால் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் இழப்பை அறிவிக்கிறது. எனவே, இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் இழப்பு

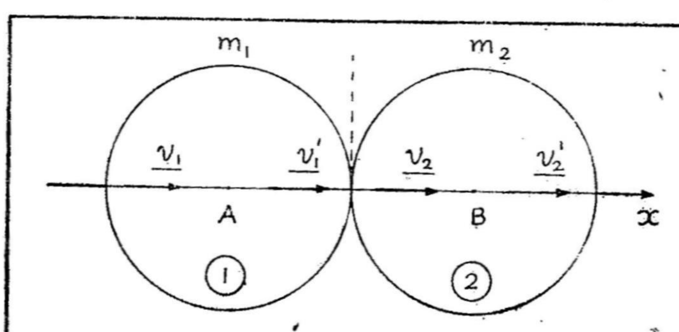
$$= \frac{1}{2}(1 - e^2)\, mu^2 \cos^2 \alpha.$$

[குறிப்பு : $e = 1$ எனில், கோளம் நிறைமீட்சியுடையதாகும். அப்போது, இயக்க ஆற்றலின் மாற்றம் பூச்சியமாகும். அதாவது, இயக்க ஆற்றலில் இழப்பு இராது.]

7·18. இரு கோளங்களின் நேரடி மோதல் (Direct impact of two spheres)

m_1 நிறையுடைய மழமழப்பான கோளம், v_1 என்னும் திசை வேகத்துடன் இயங்கும்போது, அதே திசையில், v_2 என்னும் திசை வேகத்துடனியங்கும் மற்றொரு மழமழப்பான m_2 நிறையுடைய கோளத்தின்மீது நேராய் மோதுகின்றது. e என்பது கோளங்களின் நிலைமீட்சிக் கெழுவைக் குறிப்பதாகில், மோதுகைக்குப்பின் அவற்றின் இயங்கங்களைக் காணுதல்.

படம் (7·23)-ல் A, B என்பவை கோளங்களின் மையங்களைக் குறிக்கட்டும். AB என்பது மோதுகைக் கோடாகும். அதாவது, பொதுச் செங்கோடாகும்.



படம் 7·23

கோளங்களிரண்டும், மழமழப்பானவைகளானதால், மோதுகையின் காரணமாக, தொடு கோட்டுத் திசையில், எவ்வித கணத்தாக்கு விசைகளும் கிடையா. ஆதலால், தொடுகோட்டுத் திசையில் கோளங்களின் திசை வேகங்களில் மாறுதல் ஏதுமில்லை.

மோதுகைக்குமுன் கோளங்கள் AB என்னும் கோட்டிலேயே இயங்குவதால், இரு கோளத்திற்கும், மோதுகைக்குப்பின் தொடு கோட்டு திசையில் உள்ள திசை வேகமும், மோதுகைக்குமுன், தொடுகோட்டு திசையில் உள்ள திசைவேகமும் பூச்சியமாகும். ஆகவே, மோதுகைக்குப்பின், கோளங்கள் AB என்னும் கோட்டிலேயே இயங்கும்.

மோதுகைக்குப்பின், $\underline{v_1}'$, $\underline{v_2}'$ என்பவை கோளங்களின் திசை வேகங்களைக் குறிப்பதாகில், நியூட்டனின் பரிசோதனை விதிப்படி,

$$\underline{v_2}' - \underline{v_1}' = -e\left(\underline{v_2} - \underline{v_1}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்பது கிடைக்கும்.

மேலும், உந்தக்காப்பு விதிப்படி, இரு கோளங்களும் மோதும் போது, மோதுகைக் கோட்டின் மீதுள்ள உந்தங்களின் மொத்தம், மோதுகைக்கு முன்னும், பின்னும் சமமாகும்.

எனவே,

$$m_1\,\underline{v_1}' + m_2\,\underline{v_2}' = m_1\,\underline{v_1} + m_2\,\underline{v_2} \quad \ldots \quad (2)$$

இங்கு $\underline{v_1}'$, $\underline{v_2}'$ என்பவைதான் தெரியாக் கணியங்கள். அவற்றை, (1), (2) என்னும் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு கண்டு பெறலாம்.

ஆகவே,

(2) $-$ (1) $\times\, m_2$ என்பதைக் கணக்கிட,

$$(m_1 + m_2)\,\underline{v_1}' = (m_1 - e\,m_2)\,\underline{v_1} + (1 + e)\,m_2\,\underline{v_2},$$

$$\underline{v_1}' = \frac{(m_1 - e\,m_2)\,\underline{v_1} + (1 + e)\,m_2\,\underline{v_2}}{(m_1 + m_2)} \quad (3)$$

ஆகும்.

அவ்வாறே, (2) + (1) $\times\, m_1$ என்பதைக்கணக்கிட,

$$(m_1 + m_2)\,\underline{v_2}' = (m_2 - em_1)\,\underline{v_2} + (1+e)\,m_1\,\underline{v_1},$$

$$\underline{v_2}' = \frac{(m_2 - em_1)\,\underline{v_2} + (1+e)\,m_1\,\underline{v_1}}{(m_1 + m_2)} \quad (4)$$

ஆகும்.

(3), (4) என்னும் சமன்பாடுகள், மோதுகைக்குப்பின், கோளங்களின் திசைவேகங்களை வரையறுக்கின்றன.

7·18-1. m_1 நிறையுடைய கோளத்தின்மேல் ஏற்படும் தாக்களவையைக் காணுதல் :

$\underline{I} = m_1$ நிறையுடைய கோளத்தின்மேல் மோதுகையால் ஏற்படும் தாக்களவை

= அதன் உந்தத்தில் ஏற்படும் மாற்றம்

$$= m_1 \underline{v_1}^1 + m_1 \underline{v_1}$$

$$= m_1 (\underline{v_1}^1 - \underline{v_1})$$

$$= m_1 \left[\frac{(m_1 - em_2)\underline{v_1} + (1+e) m_2 \underline{v_2}}{(m_1 + m_2)} - \underline{v_1} \right]$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left[(1+e)(m_2 \underline{v_2} - m_2 \underline{v_1}) \right]$$

$$= -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1+e)(\underline{v_1} - \underline{v_2}), \ (\underline{v_1} > \underline{v_2})$$

[குறிப்பு : (i) m_2 நிறையுடைய கோளத்தின் கணத்தாக்கு விசை, m_1 இயங்கும் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் செயற்படுவதால், m_1-நிறையுடைய கோளத்தில், உந்த இழப்பு ஏற்படுகிறது. அதை, இங்கு குறைக்குறி வெளிப்படுத்துகிறது.

(ii) m_2 நிறையுள்ள கோளத்தில் உந்த மிகுதி ஏற்படுகிறது.

(iii) $m_1 = m_2$; $e = 1$ எனின்,

$$\underline{v_1}' = \underline{v_2} ; \quad \underline{v_2}' = \underline{v_1} \quad \text{ஆகும்.}$$

அதாவது, சமனான நிறையும், நிறை மீள் சக்தியும் உடைய இரு கோளங்கள் நேராக மோதிக்கொண்டால், அவை தம் திசை வேகங்களைப் பரிமாறிக்கொள்ளும்.

(iv) $e = 0$ எனின்,

$$\underline{v_2}' = \underline{v_1}' \quad \text{ஆகும்.}]$$

7·18-2. நேரடி மோதுகையில் ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு :

m_1, m_2 என்னும் நிறைகளைப் பெற்ற துகள்கள், ஒன்றையொன்று நேரடியாக மோதும்போது, அவற்றின் திசை வேகங்கள், மோதலுக்கு முன்னும், பின்னும், முறையே, $\underline{v_1}$, $\underline{v_2}$; $\underline{v_1}'$ $\underline{v_2}'$ ஆகுக.

$$\underline{v_2}' - \underline{v_1}' = -e(\underline{v_2} - \underline{v_1})$$

$$m_1 \underline{v_1}' + m_2 \underline{v_2}' = m_1 \underline{v_1} + m_2 \underline{v_2} \quad \text{ஆகும்.}$$

துகள்தொகுதியின் இயக்க ஆற்றலில் மாற்றம்

$$= \left\{ \frac{1}{2} m_1 (\underline{v_1}' \cdot \underline{v_1}') - \frac{1}{2} m_1 (\underline{v_1} \cdot \underline{v_1}) \right\} +$$

$$\left\{ \frac{1}{2} m_2 (\underline{v_2}' \cdot \underline{v_2}') - \frac{1}{2} m_2 (\underline{v_2} \cdot \underline{v_2}) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (v_1'^2 - v_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2) - \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)$$

இம் மாற்றத்தின் மதிப்பைப் பின்வரும் சர்வ சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்திப் பெறலாம்.

$$(m_1 + m_2) m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = (m_1 v_1 + m_2 v_2)^2 + m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2$$

$$(m_1 + m_2)(m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2) = (m_1 v_1' + m_2 v_2')^2 + m_1 m_2 (v_1' - v_2')^2$$

இயக்க ஆற்றலில் மாற்றம்

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left\{ (v_1' - v_2')^2 - (v_1 - v_2)^2 \right\} \right]$$

$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \left[e^2 (v_1 - v_2)^2 - (v_1 - v_2)^2 \right]$$

$$= -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - e^2)(v_1 - v_2)^2, \quad (e < 1)$$

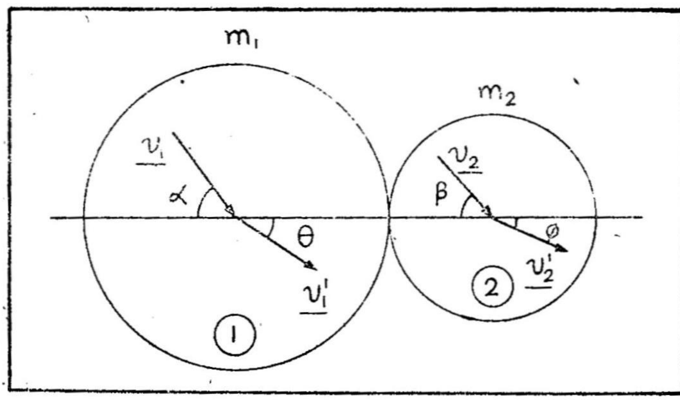
∴ இயக்க ஆற்றலில் இழப்பு

$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - e^2)(v_1 - v_2)^2$$

7·19. இரு கோளங்களின் சரிவு மோதுகை (Olique impact of two spheres).

m_1 என்ற நிறையையும், v_1 என்ற திசை வேகத்தையும் கொண்ட மழப்பான கோளம், m_2 என்ற நிறையையும், v_2 என்ற திசை வேகத்தையும் கொண்ட மற்ெறாரு மழமழப்பான கோளத்துடன் சாய்வாக மோதுகிறது. கோளங்களின் இயக்க திசைகள், கோள மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன், முறையே, α, β என்னும் கோணச்சாய்விலுள்ளன. மோதுகைக்குப்பின் கோளங்களின் திசைவேகங்களைக் காணுதல் :

மோதுகைக்குப்பின், கோளங்களின் திசைவேகங்கள் முறையே $\underline{v_1}'$, $\underline{v_2}'$ ஆகுக. அவைகள் செயற்படும் திசைகள், மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன், θ, ϕ என்னும் கோணச்சாய்வில், படம் (7·24)-ல் காட்டியவாறு, அமையட்டும்.



படம் 7·24

கோளங்கள் மழமழப்பானவையாதலால், அவற்றின் தொடு கோட்டுத்திசையில், விசையேதுமில்லை. ஆதலால், அவற்றின் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்துத்திசையில், கோளங்களின் திசைவேகங்களில் மாறுதல் கிடையாது.

$$\therefore \quad \underline{v_1}' \sin\theta = \underline{v_1} \sin\alpha \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

$$\underline{v_2}' \sin\phi = \underline{v_2} \sin\beta \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதிப்படி,

$$\underline{v_1}' \cos\theta - \underline{v_2}' \cos\phi = -e\left(\underline{v_1} \cos\alpha - \underline{v_2} \cos\beta\right) \quad (3)$$

மேலும், மோதுகையின்போது, கோணங்களின்மீது செயற்படும் கணத்தாக்க விசைகள் மையக்கோட்டிலேயே சமனுமெதிருமாய் இருப்பதால், அக்கோட்டிலுள்ள மொத்த உந்தம் மாறுது.

எனவே,

$$m_1 \underline{v_1}' \cos\theta + m_2 \underline{v_2}' \cos\phi$$
$$= m_1 \underline{v_1} \cos\alpha + m_2 \underline{v_2} \cos\beta \qquad \cdots \qquad (4)$$

ஆகும்.

மேற்கூறிய நான்கு சமன்பாடுகளிலிருந்து, $\underline{v_1}'$, $\underline{v_2}'$, θ, ϕ என்பவற்றை வரையறுக்கலாம்.

(3) $\times\ m_2$ + (4) என்பது,

$$(m_1+m_2)\, v_1' \cos\theta = (m_1 - e\, m_2)\, \underline{v_1} \cos\alpha + (1+e)\, m_2\, \underline{v_2} \cos\beta,$$

அதாவது,

$$\underline{v_1}' \cos\theta = \frac{(m_1 - e\, m_2)\, \underline{v_1} \cos\alpha + (1+e)\, m_2\, \underline{v_2} \cos\beta}{(m_1 + m_2)} \quad (5)$$

ஆகும்.

அவ்வாறே,

$$\underline{v_2}' \cos\phi = \frac{(m_2 - e\, m_1)\, v_2 \cos\beta + (1+e)\, m_1\, \underline{v_1} \cos\alpha}{(m_1 + m_2)} \quad (6)$$

ஆகும்.

7·19-1. கோளங்கள் ஒன்றின்மீது மற்றொன்று மோதுகையால் செயற்படுத்தும் தாக்களவை :

m_1 நிறையுடைய கோளத்தின்மீதுள்ள மோதுகைத் தாக்களவை

$$= \text{அக் கோளத்தின் உந்த மாற்றம்}$$

$$= m_1 (\underline{v_1}' \cos\theta - \underline{v_1} \cos\alpha)$$

$$= -\frac{m_1 m_2 (1+e)}{(m_1 + m_2)} (\underline{v_1} \cos\alpha - v_2 \cos\beta) \quad \ldots \quad (7)$$

ஆகும்.

[குறிப்பு : (i) m_2 நிறையுடைய கோளத்தின் கணத்தாக்கு விசை, m_1 இயங்கும் திசைக்கு எதிர்த் திசையில் செயற்படுவதால், m_1-நிறையுடைய கோளத்தில், உந்த இழப்பு ஏற்படுகிறது. அதை, இங்கு, குறைக்குறி வெளிப்படுத்துகிறது.

(ii) m_2 நிறையுடைய கோளத்தில் உந்த மிகுதி ஏற்படுகிறது.

(iii) $v_2 = 0$ எனின், $\phi = 0$ ஆகும்.

(iv) $m_1 = m_2$, $e = 1$ எனின்,

$\underline{v_1}' \cos\theta = v_2 \cos\beta$

$\underline{v_2}' \cos\phi = v_1 \cos\alpha$ ஆகும்.]

7·19-2. சரிவு மோதுகையால் ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு :

துகட்டொகுதியில் மோதுகையால் ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல் மாற்றம்.

$$= \left(\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (v_1'^2 \cos^2 \theta + v_1'^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} m_2 (v_2'^2 \cos^2 \phi + v_2'^2 \sin^2 \phi)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 \cos^2 \alpha + v_1^2 \sin^2 \alpha) - \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 \cos^2 \beta + v_2^2 \sin^2 \beta)$$

ஆனால், இங்கு கோளங்கள் மழமழப்பாக உள்ளதால் அவற்றின் தொடுகோட்டுத்திசையில் உள்ள வேகங்கள் மாறுதலடையா.

$$\therefore \quad v_1' \sin \theta = v_1 \sin \alpha \; ; \quad v_2' \sin \phi = v_2 \sin \beta.$$

எனவே, இயக்க ஆற்றலில் மாற்றம்

$$= \frac{1}{2} (m_1 v_1'^2 \cos^2 \theta + m_2 v_2'^2 \cos^2 \phi) - \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 \cos^2 \alpha + m_2 v_2^2 \cos^2 \beta)$$

இதன் மதிப்பைப் பின்வருமாறு கணக்கிட்டு, வரையறுக்கலாம்.

$$(m_1 + m_2)(m_1 v_1'^2 \cos^2 \theta + m_2 v_2'^2 \cos^2 \phi) = (m_1 v_1' \cos \theta + m_2 v_2' \cos \phi)^2 + m_1 m_2 (v_1 \cos \theta - v_2 \cos \phi)^2$$

$$(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 \cos^2 \alpha + m_2 v_2 \cos^2 \beta) = (m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \beta)^2 + m_1 m_2 (v_1 \cos \alpha - v_2 \cos \beta)^2$$

∴ இயக்க ஆற்றல் மாற்றம்

$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\left[(v_1' \cos\theta - v_2' \cos\phi)^2 - (v_1 \cos\alpha - v_2 \cos\beta)^2\right]$$

$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\left[e^2 (v_1 \cos\alpha - v_2 \cos\beta)^2 - (v_1 \cos\alpha - v_2 \cos\beta)^2\right]$$

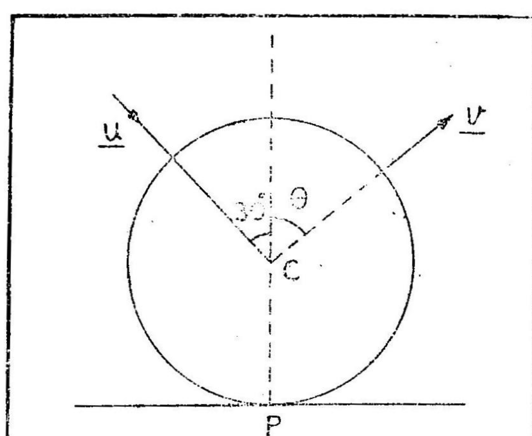
$$= -\frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(1-e^2)(v_1 \cos\alpha - v_2 \cos\beta)^2$$

ஆதலால் இயக்க ஆற்றலில் இழப்பு

$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(1-e^2)(v_1 \cos\alpha - v_2 \cos\beta)^2$$

7·20. மாதிரிக்கணக்குகள்.

7·20-1. 2 கிலோகிராம் நிறையுள்ள கோளமொன்று மழமழப்பான நிலையான தளத்தின் மீது, அத்தளத்தின் செங்குத்துக் கோட்டிற்கு 30° கோணச்சாய்வில் விநாடிக்கு 20மீ வேகத்துடன்



படம் 7·25

விழுகிறது. $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆயின் மோதுகைக்குப் பின் கோளத்தினியக்கத்தைக் காண்க. அன்றியும் இயக்க ஆற்றலின் இழப்பையும் காண்க.

மோதுகைக்குப் பின் கோளம் செங்குத்துக்கோட்டுடன் θ கோணச் சாய்வில் v என்னும் வேகத்துடனியங்குவதாகக் கொள்க.

$$\underline{u} = 20 \,\underline{|\, 30^\circ} \begin{Bmatrix} u \sin 30^\circ \rightarrow \\ u \cos 30^\circ \downarrow \end{Bmatrix};$$

$$\underline{v} = v \,\underline{|\, \theta} = \begin{matrix} v \sin \theta^\circ \rightarrow \\ v \cos \theta^\circ \downarrow \end{matrix}\Bigg\}$$

∴ நியூட்டனின் பரிசோதனை விதிப்படி,

$$v \cos \theta^\circ - 0 = -e(-u \cos 30^\circ - 0) = eu \cos 30^\circ$$

$$v \cos \theta^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10 \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

கிடைத்தளத்திற்கு இணையான திசையில் விசையேதுமில்லை என்பதால் $v \sin \theta = u \sin 30^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10 \quad \ldots \quad \text{(ii)}$

∴ (i) (ii) என்னும் சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$v^2 = 100 + 100; \quad \therefore \; u = 10\sqrt{2} \text{ மீ/வி}$$

மேலும் $\tan \theta = 1, \quad \therefore \; \theta^\circ = 45^\circ.$

எனவே கோளம் மோதுகைக்குப்பின் வினாடிக்கு $10\sqrt{2}$ மீ வேகத்தில், செங்குத்துக்கோட்டிற்கு 45° கோணச் சாய்வில் இயங்கும்.

மோதுகையால் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் இழப்பு

$$= \frac{1}{2} mu^2 \cos^2 \alpha \,(1 - e^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 20 \times 20 \times \cos^2 30^\circ \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 200 \text{ ஜூல்கள்.}$$

7·20-2. ஒரு பந்து 120 செமீ. உயரத்திலிருந்து மீள் சக்தியுடைய ஒரு கிடைத்தளத்தின் மேல் விழுகின்றது. மோதுகைக்கு பின் அது 80 செமீ, உயரத்திற்குத் தெறிக்குமெனில் நிலை மீட்சிக் கெழுவின் மதிப்பைக் காண்க.

பந்தானது கிடைத்தளத்தை அடிக்கும் போது அதன் வேகம்

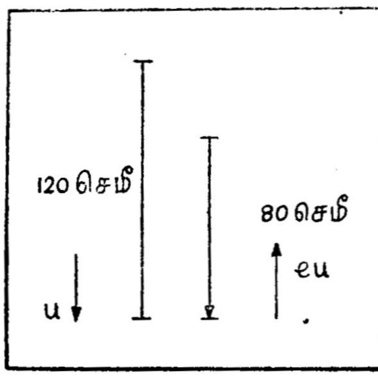
$$u^2 = \sqrt{2 \times 981 \times 120}$$

மோதுகைக்குப் பின் அதன் வேகம் eu ஆகும். அது 80 செமீ உயரத்திற்கு தெறிப்பதானல்.

$$e^2 u^2 = 2 \times 981 \times 80$$

$$e^2 = \frac{2 \times 981 \times 80}{2 \times 981 \times 120} = \frac{2}{3}$$

$$e = \sqrt{\frac{2}{3}}$$



படம் 7·26

7·20-3. துகளொன்று h என்னும் அளவுள்ள உயரத்திலிருந்து நிலையான ஒரு கிடைத்தளத்தின் மேல் விழுகிறது. நிலை மீட்சிக்கெழு ϕ ஆனல் அத்துகள் தெறிப்பை முடிக்குமுன் நிலைக் குத்துத் திசையில் கடந்த முழுத் தொலைவு $\frac{1 + \phi^2}{1 - \phi^2} h$ எனவும், கழிந்த நேரம் $\sqrt{\frac{2h}{g}} \left(\frac{1 + \phi}{1 - \phi}\right)$ எனவும் காட்டுக.

துகளானது கிடைத்தளத்தை முதன்முறை நிலைக்குத்தாக அடிக்கும்போது அதன் வேகம் u ஆகுக. $\therefore \; u^2 = 2gh$. முதல் மோதுகைக்குப்பின், அது ϕu வேகத்துடன் தெறிக்கும். அது மறுபடியும் அத்தளத்தை அடிக்கும் போதுள்ள வேகம் ϕu; இரண்டாவது மோதுகைக்குப்பின், அது $\phi(\phi u) = \phi^2 u$ என்னும் வேகத்தில் தெறிக்கும். அவ்வாறே மூன்ருவது, நான்காவது மோதுகைக்குப் பின் துகள் $\phi^3 u$, $\phi^4 u$ என்னும் வேகத்தில் தெறிக்கும். முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்ருவது மோதுகைக் குப் பின் அத்துகள் எழுந்த உயரங்கள் முறையே,

$$\frac{(\phi u)^2}{2g}, \frac{(\phi^2 u)^2}{2g}, \frac{(\phi^3 u)^2}{2g} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{ஆகும்.}$$

நிலைக்குத்துத் திசையில் துகள் சென்ற மொத்த தொலைவு

$$= h + 2\left(\frac{\phi^2 u^2}{2g}\right) + 2\left(\frac{\phi^4 u^2}{2g}\right) + 2\left(\frac{\phi^6 u^2}{2g}\right) + \dots \dots \dots$$

$$= h + 2(\phi^2 h + \phi^4 h + \phi^6 h + \dots \dots), \; u^2 = 2gh.$$

$$= h + 2h\,\phi^2 (1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots \dots)$$

$$= h + 2h\,\phi^2 \cdot \frac{1}{1-\phi^2} = \frac{1+\phi^2}{1-\phi^2}\,h.$$

தொடக்கத்தில் துகள் தரைய அடிக்க எடுத்த நேரம் $= \dfrac{u}{g}$.

முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்ருவது ... ... மோதுகைக்குப்பின் துகள் $\phi u, \phi^2 u, \phi^3 u$ ... என்னும் வேகங்களில் தெறிப்பதால் அவைகள் புவியிர்ப்பினுல் அழிக்கப்படத் தேவையான நேரங்கள் முறையே,

$$\frac{\phi u}{g}, \frac{\phi^2 u}{g} \dots \dots \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, அத்துகள் இயக்கத்திலிருந்த மொத்த நேரம்

$$= \frac{u}{g} + 2\left(\frac{\phi u}{g}\right) + 2\left(\frac{\phi^2 u}{g}\right) + 2\left(\frac{\phi^3 u}{g}\right) + \dots \dots$$

$$= \frac{u}{g} + 2\frac{\phi u}{g}(1 + \phi + \phi^2 + \dots \dots)$$

$$= \frac{u}{g}\left[1 + 2\phi\left(\frac{1}{1-\phi}\right)\right] = \frac{u}{g}\left(\frac{1+\phi}{1-\phi}\right)$$

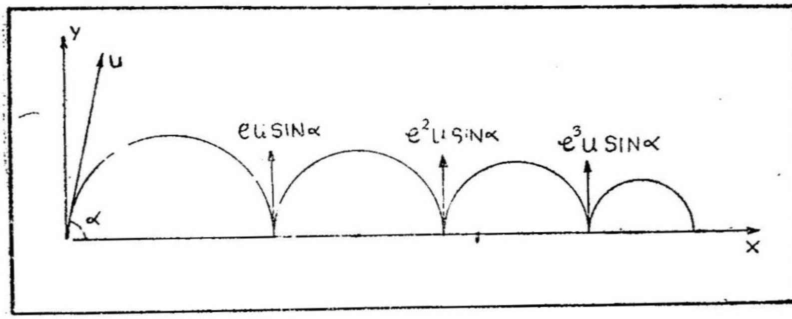
$$= \frac{\sqrt{2gh}}{g}\left(\frac{1+\phi}{1-\phi}\right), \; (u^2 = 2gh)$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1+\phi}{1-\phi}\right).$$

7·20-4. வழப்வழப்பான ஒரு கிடைத்தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து துகளொன்று கிடைத்தளத்திற்கு α கோணச் சாய்வில், u என்னும் வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. அத் துகளுக்கும், அத்தளத்திற்கும் இடையிலுள்ள நிலமீட்சிக் கெழு ϕ ஆயின் அத்துகள் தெறித்து ஓய்வதற்கு முன் கழியும் நேரத் தையும், அத்தளத்தின் மீது சென்ற தொலைவையும் காண்க.

தளத்தின் நிலைக்குத்துத் திசையில் துகளின் இயக்கத்தை நோக்குக. தொடக்க நிலைக் குத்து வேகம் $= u \sin \alpha$. முதலா வது, இரண்டாவது, மூன்ருவது, ... மோதுகைக்குப்பின்,

துகளின் நிலைக்குத்துத்தெறிப்பு வேகங்கள் முறையே $\phi u \sin \alpha$, $\phi^2 u \sin \alpha$, $\phi^3 u \sin \alpha$ ... ... ஆகும். தொடக்கத்திலிருந்து



படம் 7·27

முதலாவது மோதுகைக்கு முன், துகள் இயங்குவதற்கு எடுத்த நேரம் $= \frac{2u \sin \alpha}{g}$. அவ்வாறே முதலாவது, இரண்டாவது மோதுகைகளுக்கு இடையேயுள்ள நேரம் $= \frac{2u (\sin \alpha) \phi}{g}$. அது போலவே, மற்றைய அடுத்தடுத்து நிகழும் மோதல்களுக்கு இடையில் கழிந்த நேரங்கள் $\frac{2 \phi^2 u \sin \alpha}{g}$, $\frac{2 \phi^3 u \sin \alpha}{g}$ ... ஆகும்.

எனவே, துகள் தெறித்து ஓய்வதற்கு முன் கழியும் நேரம்

$$= \frac{2u \sin \alpha}{g} + \frac{2\phi u \sin \alpha}{g} + \frac{2\phi^2 u \sin \alpha}{g} + \dots \dots \dots$$

$$= \frac{2u \sin \alpha}{g} (1 + \phi + \phi^2 + \dots \dots), \phi < 1$$

$$= \frac{2u \sin \alpha}{g} \cdot \frac{1}{1 - \phi} = \frac{2u \sin \alpha}{(1 - \phi) g},$$

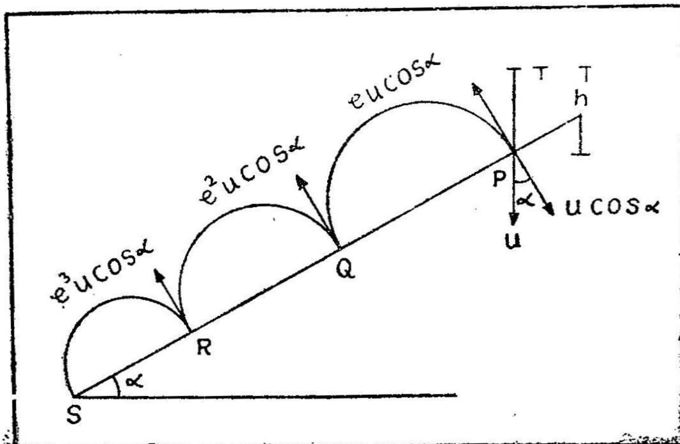
கிடைத்திசையில் இயக்கத்தைத் தடுப்பதற்கு எவ்வித விசையும் இல்லாமையால், துகளின் கிடைவேகம், மோதுகைகளால் மாருதிருக்கும். ஆகவே கிடைவேகம் எப்போதும் $u \cos \alpha$ ஆகவே இருக்கும். எனவே, துகள் சென்ற கிடைத் தொலைவு

$$= \frac{2u \sin \alpha}{g} \cdot \frac{1}{1 - \phi} \cdot u \cos \alpha = \frac{u^2 \sin 2 \alpha}{g (1-\phi)}$$

[குறிப்பு : துகளின் தெறிப்பு நின்றபின், அது அத்தளத்தின் மீது $u \cos \alpha$ என்னும் சீரான வேகத்துடன் இயங்கும்.]

7·20-5 மீட்சிக்கெழு e உடைய துகளொன்று, 6-மீ உயரத்திலிருந்து விடப்பட்டு, கிடைமட்டத்திற்கு 30° கோணத்தில் சாய்ந்த 3 மீ நீளமுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் உச்சியில் மோதுகிறது. துகள் சாய்தளத்தின் அடியை மூன்று தெறிப்புகளில் அடையுமெனில் $e(1+e)(1+e^2)(1+e+e^2)=0\cdot25$ என நிறுவுக.

படம் (7·28)-ல் $PQRS$ என்பது சாய்தளத்தின் மிகுதிச் சாய்வுக் கோட்டைக் குறிக்கிறது. துகள் P-யில் விழுந்து அடுத்தடுத்துள்ள தெறிப்புகளில் Q, R, S என்னுமிடங்களிலிருப்பதைக் கொள்க. துகள் P-யில் மோதும்போது நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிய வேகம் $u=\sqrt{2gh}=\sqrt{2g\times6}=\sqrt{12g}$. u என்னும் வேகத்தை, சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையிலும், அத்தளத்திற்கு இணையாகக் கீழ்முகமான திசையிலும் பிரிக்க. அவை முறையே $u\cos\alpha$, $u\sin\alpha$ ஆகும். P-யில் மோதுகை நிகழும்



படம் 7·28

போது, சாய்தளத்திற்கு இணையாக ஒரு விசையுமில்லை. சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவே கணத்தாக்கு எதிர்திசையொன்று செயல்படுகிறது. ஆகவே, $u\sin\alpha$ என்னும் பகிர்வு மோதுகையால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. ஆனால் $u\cos\alpha$ என்னும் பகிர்வு வேகம், $ue\cos\alpha$ ஆகத் திருப்பப்படுகிறது. துகள் ஒரு பரவளைவுப் பாதையில் சென்று, Q-ல் சாய்தளத்திற்கு செங்குத்தாக $eu\cos\alpha$ என்னும் வேகத்துடன் மோதுகிறது. மோதுகைக்குப்பின் இது $e^2u\cos\alpha$ என்னும் வேகத்துடன் திருப்பப்படுகிறது. மறுபடியும்

துகள் சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக $e^2 u \cos \alpha$ என்னும் வேகத்துடன் சாய்தளத்தை R என்னும் புள்ளியில் மோதுகிறது. பின்பு இது $e^3 u \cos \alpha$ என்னும் வேகத்துடன் திருப்பப்படுகிறது.

PQ, QR, RS என்னும் கோடுகளுக்கிடையில் அமையும் பரவளைவுப் பாதைகளை வரைய துகள் எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் t_1, t_2, t_3 ஆகுக. சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் துகளின் இயக்கத்தை நோக்குக. t_1 நேரத்தில், சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் சென்ற தொலைவு பூச்சியமாகும்.

எனவே,

$$0 = eu \cos \alpha \; t_1 - \frac{1}{2} g \cos \alpha \; t_1^2 ;$$

$$\therefore \quad t_1 = \frac{2\, eu \cos \alpha}{g \cos \alpha} = \frac{2\, eu}{g}$$

அவ்வாறே,

$$t_2 = \frac{2\, e^2 u}{g}; \quad t_3 = \frac{2\, e^3 u}{g}.$$

எனவே, துகள் P-யிலிருந்து S என்னுமிடத்தையடைய எடுத்துக் கொண்ட நேரம், $= t_1 + t_2 + t_3 = \frac{2\, eu}{g}(1+\varphi+\varphi^2)$.

இதேநேரத்தில் துகளொன்று சாய்தளத்தில் கீழ்நோக்கியவாறு இயங்கிய தொலைவு 4 மீ ஆகும். தொடக்கத்தில் சாய்தளத்தின் கீழ் நோக்கிய திசையில் $u \sin \alpha$ என்னும் வேகத்தைத் துகளானது பெற்றுள்ளது. அதன் ஈர்ப்பு முடுக்கம் $g \sin \alpha$ ஆகும்.

$$\therefore \quad u \sin \alpha \; (t_1+t_2+t_3) + \frac{1}{2} g \sin \alpha \; (t_1+t_2+t_3)^2 = 4.$$

அதாவது, $$u \sin \alpha \frac{2eu}{g} (1 + e + e^2) + \frac{1}{2} g \sin \alpha \frac{4e^2 u^2}{g^2} (1 + e + e^2) = 4,$$

அதாவது, $$\frac{2eu^2 \sin \alpha}{g} (1 + e + e^2) + \frac{2e^2 u^2 \sin \alpha}{g} (1 + e + e^2) = 4,$$

அதாவது, $$\frac{2eu^2 \sin \alpha}{g} (1 + e + e^2) [1 + e(1 + e + e^2)] = 4,$$

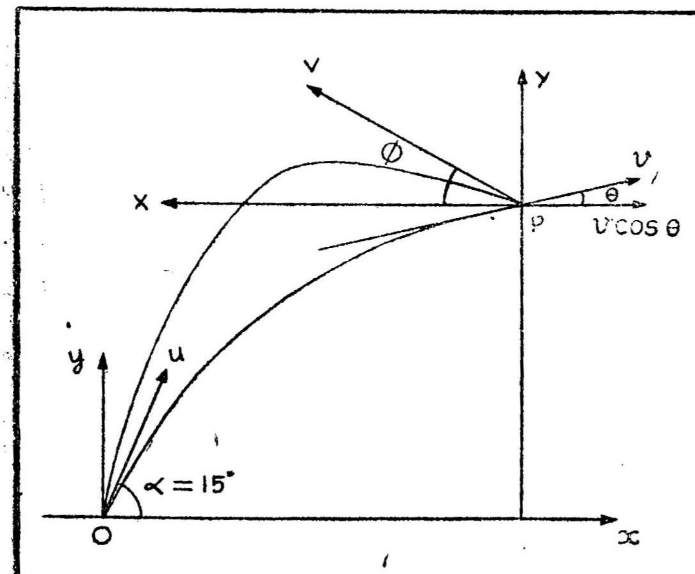
அதாவது, $\frac{2eu^2 \sin \alpha}{g}(1+e+e^2)(1+e)(1+e^2) = 4.$

$$\therefore \quad e(1+e)(1+e^2)(1+e+e^2)$$
$$= \frac{3g}{2u^2 \sin \alpha} = \frac{3g}{2 \times 12g \sin 30^\circ} = \frac{1}{4} = 0{\cdot}25.$$

7·20-6. ஒரு பந்தானது 15° ஏற்றக் கோணத்தில் 35மீ தொலைவிலுள்ள ஒரு மழமழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரில் மோதி, எறி புள்ளியை மீண்டும் அடைகிறது. பந்திற்கும் சுவருக்கு மிடையேயுள்ள நிலை மீட்சிக் கெழுவின் மதிப்பைக் காண்க.

[$g = 9{\cdot}8$ மீ/வி^{2} எனக் கொள்க.]

முதல் வழி : பந்தானது மழமழப்பான சுவரில் P என்னும் இடத்தில் மோதுவதாகக் கொள்க. அப்புள்ளி h மீ உயரத்தில் இருப்பதாகில், $P(25, h)$ என்னும் புள்ளி



படம் 7·29

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \alpha}$$ என்னும் பாதையிலுள்ளது.

$$\therefore \quad h = 25 \tan 15 - \frac{9{\cdot}8 \times 25 \times 25 \times 4(2-\sqrt{3})}{2 \times 35 \times 35}$$

$$h = 25(2-\sqrt{3}) - 10(2-\sqrt{3}) = 15(2-\sqrt{3})$$

சுவரை மோதும்போது பந்தின் வேகம் v எனவும் அதன் திசை கிடைக்கோட்டுடன் θ என்னும் கோணச் சரிவில் உள்ளது எனவும் கொள்க. மோதுகைக்குப்பின், பந்தானது, ϕ ஏற்றக் கோணத்தில், V மீ வேகத்துடன் தெறிப்பதாகில்,

$$V \cos \phi = ev \cos \theta = eu \cos \alpha$$

$$V \sin \phi = v \sin \theta = \sqrt{u^2 \sin^2 \alpha - 2gh}$$

$$\therefore \quad \tan \phi = \frac{1}{e} \tan \theta = \frac{1}{e} \frac{\sqrt{u^2 \sin^2 \alpha - 2gh}}{u \cos \alpha} = \frac{2 - \sqrt{3}}{5e}$$

ஆகும்.

மோதுகைக்குப்பின் பந்தானது, O-வை அடைவதால் PX, PY என்னும் அச்சுகளைக் குறித்து $O\,(25, -15\,(2, -\sqrt{3}\,))$ என்னும் புள்ளி, $y = x \tan \phi - \dfrac{gx^2}{2V^2 \cos^2 \phi}$ என்னும் வளைவுப் பாதையில் இருக்கும்.

$$\therefore \quad = 15\,(2 - \sqrt{3}\,) = 25 \times \frac{(2 - \sqrt{3}\,)}{54}$$

$$- \frac{9\ 8 \times 25 \times 25 \times 4\,(2 - \sqrt{3}\,)}{2\,e^2 \cdot 35 \times 35 \times 1}$$

$$-3 = \frac{1}{e} - \frac{2}{e^2}\,; \quad 3e^2 + e - 2 = 0$$

$$e = \frac{2}{3} \text{ அல்லது } -1 \text{ ஆகும்.}$$

$e = -1$ என்பது புறக்கணிக்கப்படும்.

எனவே $e = \dfrac{2}{3}$ ஆகும்.

இரண்டாவது வழி : பந்தானது எறிதானத்திலிருந்து, P என்னும் புள்ளியை அடைய எடுத்த நேரம் t_1 எனவும், பிறகு P-யிலிருந்து, மற்றொரு வளைவு பாதையில், O-வை வந்தடைய எடுத்த நேரம் t_2 எனவும் கொள்க. $\therefore$ $(t_1 + t_2)$ என்னும் நேரத்தில், துகளானது செங்குத்துத்திசையில் சென்ற மொத்தத் தொலைவு பூச்சியமாகும். $\therefore \quad O = u \sin \alpha\,(t_1 + t_2) - \dfrac{1}{2}\,g\,(t_1 + t_2)^2$

$$\therefore \quad t_1 + t_2 = \frac{2u \sin \alpha}{g}\,.$$

மோதுகைக்கு முன் பந்தானது கிடையாகச் சென்ற தொலைவு 25 மீ என்பதால் $(u\cos\alpha)\ t_1 = 25$. மோதுகைக்குப்பின் பந்தானது அதே கிடைத்தொலைவை கடப்பதால்

$$(eu\cos\alpha)\, t_2 = 25\ ; \quad \therefore \quad t_1 = \frac{25}{u\cos\alpha}\ ; \quad t_2 = \frac{25}{eu\cos\alpha}$$

$$\therefore \quad \frac{25}{u\cos\alpha} + \frac{25}{eu\cos\alpha} = \frac{2u\sin\alpha}{g}$$

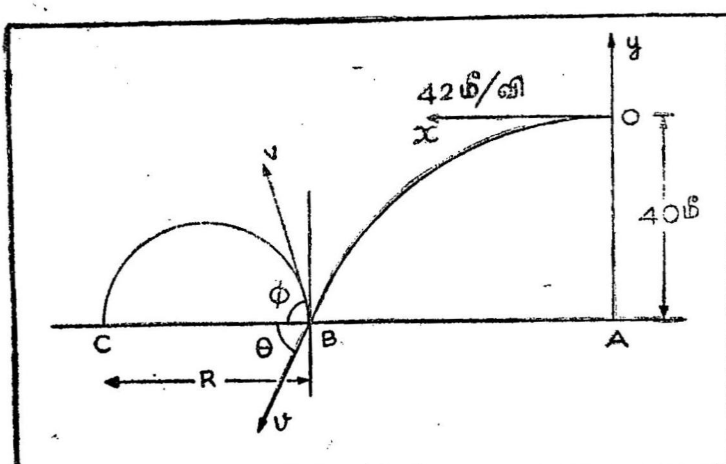
$$25\left(1+\frac{1}{e}\right) = \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$$

$$1+\frac{1}{e} = \frac{e^2\sin 2\alpha}{g}$$

$$= \frac{5}{2}$$

$$\therefore \quad e = \frac{2}{3}.$$

7·20-7. ஒரு வழவழப்பான மீட்சியுள்ள பந்து 40 மீ உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து வினாடிக்கு 42 மீ திசை



படம் 7·30

வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. மீட்சிக் கெழு $\frac{1}{4}$ ஆயின், பந்து தரையை மோதியபின், அடுத்துள்ள முதல் தெறிப்பில் அதன் கிடை வீச்சு 60 மீ ஆகுமெனக்காட்டுக.

பந்து தரையை B என்னுமிடத்தில் கிடைக்கோட்டுடன் θ கோணச் சரிவில் v என்னும் வேகத்தில் மோதட்டும். மோதிய பின் அது V என்னும் வேகத்துடன் கிடைக்கோட்டுடன் ϕ என்னும் ஏற்றக் கோணச் சாய்வில் தெறிக்கட்டும். கிடைத் திசையில், விசை எதுவுமில்லை என்பதால் $V \cos \phi = v \cos \theta = 42$ மீ/வி ஆகும்.

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதிப்படி,

$$V \sin \phi = ev \sin \theta = e \sqrt{(42 \sin \theta^{\circ})^2 + 2 \times 9.81 \times 40}$$

$$= \frac{1}{4} \times 28 = 7 \text{ மீ/வி}$$

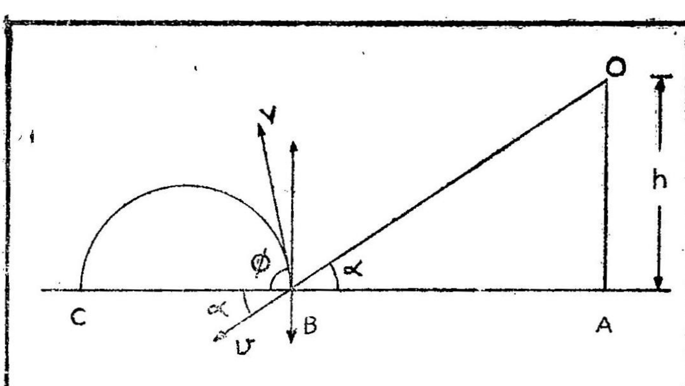
பந்து மறுமுறை கிடைத்தளத்தை C என்னுமிடத்தில் மோதுவதாகக் கொள்க. அப்போது அதன் கிடைவீச்சு,

$$R = \frac{(2V \cos \phi)(V \sin \phi)}{g}$$

$$= \frac{2 \times 42 \times 7}{9 \cdot 8}$$

$= 60$ மீ ஆகும்.

7·20·8. கிடைமட்டத்துடன் α கோணச் சாய்வில் உள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் உயரம் h ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மீள் சக்தியுடைய ஒரு பந்து அச்சாய்தளத்தின் மீது கீழ்முகமாக



படம் 7·31

இயங்கி அதன் அடியிலுள்ள ஒரு வழவழப்பான நிலைக் கிடைத் தளத்தின் மீது மோதுகின்றது. அக்கிடைத்தளத்தின் மீது அப் பந்தின் வீச்சைக் காண்க.

படம் (7·31)-ல் காட்டியவாறு பந்து B-ஐ அடையும்போது அதன் வேகம் $v = \sqrt{2gh}$ ஆகும். கிடைத்தளத்தில் B என்னுமிடத்தில் மோதுகைக்குப்பின் பந்தானது ϕ ஏற்றக்கோணச்சரிவில் V என்னும் வேகத்துடன் தெறிப்பதாகில் $V \cos \phi = v \cos \alpha$; $V \sin \phi = ev \sin \alpha$.

BC என்பது கிடைத்தள வீச்சு எனில்,

$$BC = \frac{2\,(V \cos \phi)\,(V \sin \phi)}{R}$$

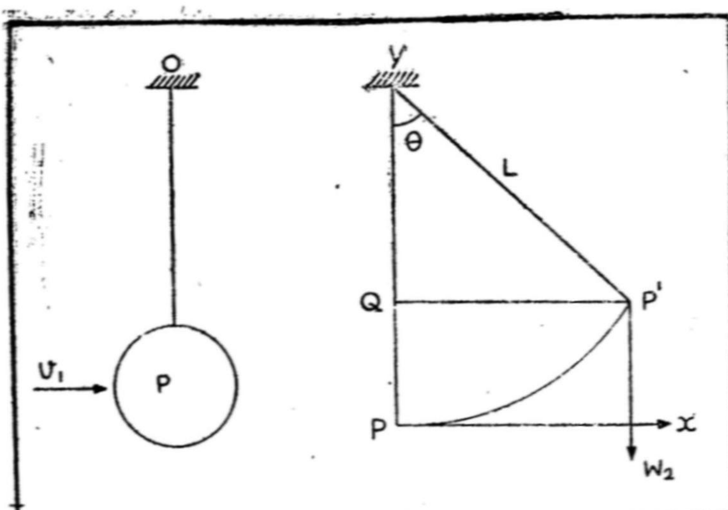
$$= \frac{2\,(v \cos \alpha)(ev \sin \alpha)}{g}$$

$$= \frac{e \cdot 2v^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}$$

$$= \frac{2e \cdot 2gh \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}$$

$$= 4\,eh \sin \alpha \cos \alpha.$$

7·20-9. $W_1 = 15$ கிராம் எடையுள்ள ரவை ஒன்று, படம் (7·32)-ல் காட்டியவாறு O என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து



படம் 7·32.

$L = 0·9$ மீ நீளமுள்ள கயிற்றில் தொங்கிக்கொண்டிருக்கும் $W_2 = 10$ கி.கி எடையுள்ள P என்னும் பொருளின்மேல் கிடையாகச் சுடுகிறது. தாக்குற்ற P என்னும் பொருளானது O என்னும்

புள்ளியைக் குறித்து $\theta = 30^\circ$ பெரும கோண அளவிற்கு ஊச லாடுகிறது. மோதுகை இளக்கமானது (Plastic) எனக் கருதி மோதுகைக்குமுன் ரவையின் வேகத்தைக் காண்க.

ரவையின் தொடக்க வேகம் v_1 மீ/வி என்க. P என்னும் பொருளின் தொடக்க வேகம் $v_2 = 0$ ஆகும். ரவையால் தாக்கப் பட்டவுடன், அதன் வேகம் v_2' மீ/வி ஆகுக. மோதுகை இளக்க மானதால் பொருளில் ரவையானது புதைந்து அதன் வேகமும் v_2' மீ/வி ஆகும். உந்தக் காப்பு விதியின்படி $\frac{W_1}{g} v_1 + \frac{W_2}{g} (0) = \frac{(W_1 + W_2)}{g} v_2'$. மோதுகையால் பொருள் தொகுதியின் இயக்க ஆற்றலில் இழப்பு ஏற்படுகிறது. எனினும், மோதுகைக்கு பின், ஆற்றலானது காப்புடையதாகும். P என்னும் பொருள், P' என்னும் இடத்தை அடையும்போது, அதன் வேகம் பூச்சியமாவ தாகக் கொள்க. Px என்னும் கோட்டை ஆதாரமாகக் கொள்க (Datum Line) பொருட்டொகுதியின் "வேலை-ஆற்றல்" சமன் பாட்டின்படி, $\frac{1}{2} \frac{(W_1 + W_2)}{g} v_2'^2 = (W_1 + W_2)(L - L\cos\theta)$.

$$\therefore \quad v_2' = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)} = 2\sqrt{gL}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad v_1 = 2\frac{(W_1 + W_2)}{W_1}\sqrt{gL}\cdot\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\left(\frac{10{\cdot}015}{0{\cdot}015}\right)\sqrt{9{\cdot}81 \times {\cdot}9}\cdot\sin 15^\circ$$

$$= 1026 \text{ மீ/விநாடி.}$$

7·20-10. விநாடிக்கு 20 மீ வேகத்தோடு இயங்கும், 16 கிகி நிறை உடைய பந்து ஒன்று அதே திசையில் விநாடிக்கு 4மீ வேகத் தோடு இயங்கும் 48 கி.கி நிறையுள்ள பந்தொன்றுடன் மோது கிறது. $\phi = \frac{1}{4}$ ஆயின் மோதுகைக்குப் பின் பந்துகளுடைய வேகங்களைக் காண்க; அன்றியும் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் இழப்பையுங் காண்க.

மோதுகைக்குப் பின் 16 கிகி. 48 கிகி. நிறைகளுள்ள பந்து களின் வேகங்களை முறையே v_1', v_2' என்க.

பந்து	நிறை	மோதலுக்குமுன் வேகம்	மோதலுக்குப்பின்வேகம்
1	$m_1 = 16$	$v_1 = 20$ மீ/வி →	v_1' →
2	$m_2 = 48$	$v_2 = 4$ மீ/வி →	v_2' →

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதிப்படி,

$$v_2' - v_1' = -\phi\,(v_2 - v_1) = -\frac{1}{4}(4-20) = 4 \quad \text{(i)}$$

உந்தத்தின் மொத்தம் மோதுகையால் மாறாததாகையால்,

$$16v_1' + 48v_2' = 16 \times 20 + 48 \times 4 .$$

$$v_1' + 3v_2' = 32 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(i), (ii) சமன்பாடுகளைக் கூட்ட

$$4v_2' = 36 ; \quad v_2' = 9 \text{ மீ/வி} ; \quad u_1' = 5 \text{ மீ/வி}$$

மோதுகைக்குப் முன் இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times 400 + \frac{1}{2} \times 48 \times 16 = 3584 \text{ ஜூல்கள்}$$

மோதுகைக்குப் பின் இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times 25 + \frac{1}{2} \times 48 \times 81 = 2144 \text{ ஜூல்கள்}$$

∴ இயக்க ஆற்றல் இழப்பு = 1440 ஜூல்கள்.

7·20-11. 16 கிகி. நிறையுள்ள ஒரு பந்து விநாடிக்கு 8மீ வேகத்தோடு இயங்கிக்கொண்டிருக்கும்போது அதற்கு எதிர்த் திசையில் விநாடிக்கு 4மீ வேகத்தோடு இயங்கும் 20 கிகி. நிறையுள்ள பந்தொன்றுடன் மோதுகிறது. $\phi = \frac{1}{2}$ ஆயின், மோதுகைக்குப்பின் பந்துகளின் வேகங்களைக் காண்க.

பந்து	நிறை	மோதுகைக்குமுன் வேகம்	மோதுகைக்குப்பின் வேகம்
1	$m_1 = 16$	$\vec{v_1} = 8$ மீ/வி	$\vec{v_1'}$
2	$m_2 = 20$	$\vec{v_2} = -4$ மீ/வி	$\vec{v_2'}$

$$v_2' - v_1' = -\frac{1}{2}(-4-8) = -\frac{1}{2} \times -12 = 6 \qquad \text{(i)}$$

உந்தத்தின் மொத்தம் மாருததாகையால்

$$16v_1' + 20v_2' = 16 \times 8 + 20 \times (-4) = 48$$

$$4v_1' + 5v_2' = 12 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \text{(ii)}$$

(i), (ii) என்னும் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண,

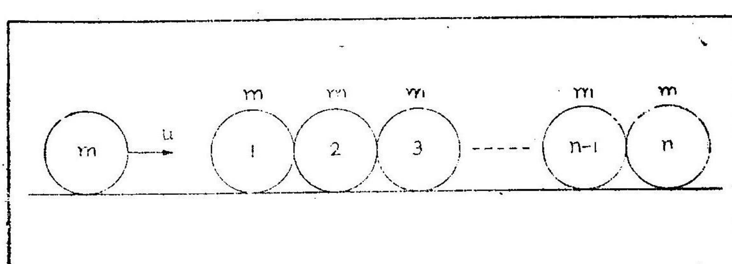
$v_1' = -2$ மீ/வி →; $v_2' = 4$ மீ/வினடி →.

v_1'-ன் மதிப்பு குறைமதிப்பாவதால், **16 கிகி.** நிறையின் இயக்க திசை மோதுகைக்குப்பின் நேரெதிராக மாற்றப்படுகிறது.

v_2'-க்கு மிகை மதிப்பு வருவதால், 20 கிகி. நிறை தன் தொடக்க இயங்கும் திசைக்கு, எதிர்திசையில் செல்கிறது.

எனவே ஒவ்வொரு பந்தும் மோதுகைக்குப்பின் அதனதன் திசையை மாற்றிக்கொள்கின்றன.

7·20-12. நிறைமீட்சியுடையதும் சமமான நிறைகளையுடையதுமான பந்துகள் பல, ஒரே நேர்கோட்டில் ஒன்றையொன்று தொட்டவண்ணம் படம் (1·33)-ல் காட்டியவாறு வைக்கப்



படம் 7·33

பட்டுள்ளன. அத்தகைய பண்புகளைப் பெற்ற மற்றொரு பந்து u என்னும் வேகத்துடன் பந்துகள் வைக்கப்பட்டுள்ள நேர்கோட்டில் நேரடியாக முதல் பந்தின்மீது மோதுகிறது. இரண்டாவது

பந்து மூன்றுவது பந்தின்மீது மோதுகிறது. இதே போல் மற்ற பந்துகளும் மோதிக் கொள்கின்றன. கோட்டில் n பந்துகள் வைக்கப்பட்டிருந்தால், மோதுகைகளுக்குப்பின் தொடக்கத்தி லிருந்து $(n-1)$ பந்துகள் ஓய்வுநிலையிலும், n-ஆவது பந்து u என்னும் வேகத்துடனும் இயங்குமெனக் காண்பி.

பந்துகளின் நிறையை m என்க. இங்கு நிறைமீட்சிக் கெழு வின் மதிப்பு ஒன்றுகும். தொடக்கத்தில் m நிறையுடைய பந்து u என்னும் வேகத்துடன் நேர்கோட்டில் முதலாவது பந்தை மோது வதை நோக்குக.

	மோதுகைக்கு முன் வேகம்	மோதுகைக்குப் பின் வேகம்
எடுத்த பந்து	$\overrightarrow{u}$	$\overrightarrow{v}$
முதலாவது பந்து	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{u_1}$

$$u_1 - v = -\psi(0-u); \quad u_1 - v = u.$$

உந்தக்காப்பு விதியின்படி.

$$mv + mu_1 = mu; \quad v + u_1 = u; \quad \therefore 2u_1 = 2u; \quad \therefore u_1 = u.$$

அப்போது $v = 0$ ஆகும்.

எனவே மோதுகைக்கு பின் முதலாவது பந்து u என்னும் வேகத்துடன் இரண்டாவது பந்தையடிக்கும். எடுத்த பந்து மோதுகைக்கு பின் ஓய்வு நிலையை அடைகிறது. அது போலவே முதலாவது பந்து நேர்கோட்டிலுள்ள இரண்டாவது பந்தை மோதியவுடன், அது ஓய்வு நிலையையடைவதுடன் இரண்டாவது பந்து u என்னும் வேகத்தோடு மூன்றுவது பந்தையடிக்கும். எனவே, n ஆவது பந்து இறுதி மோதுகைக்குபின், u என்னும் வேகத்துடனியங்கும்.

7·20-13. $m, 2m, 4m, 8m \ldots$ என்னும் நிறைகள் கொண்ட பல பந்துகள் ஒரே நேர்கோட்டில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. முதல் பந்து இரண்டாவதன் மீது u என்னும் வேகத்துடன் மோதுகிறது. இரண்டாவது மூன்றுவதின் மீது மோதுகிறது. இதேபோல் மற்ற பந்துகளும் மோதிக் கொள்கின்றன. எந்த இரு பந்துகளுக்கும் இடையேயுள்ள நிலைமீட்சிக்கெழு சமமெனக் கொண்டு, n ஆவது பந்தின் வேகத்தைக் காண்க.

முதலாவது பந்து, இரண்டாவது பந்தை மோதும்போதுள்ள நிலையைக் கவனிக்கவும். φ என்பது மீட்சிகுணகத்தைக் குறிக்கட்டும்.

பந்து	நிறை	மோதுகைக்கு முன் வேகம்	மோதுகைக்குப் பின் வேகம்
1	m	$u \rightarrow$	$u_1 \rightarrow$
2	$2m$	$0 \rightarrow$	$v_2 \rightarrow$

$$V_2 - u_1 = -\varphi(0-u) = \varphi u; \quad mu_1 + 2m\,V_2 = mu$$

$$u_1 + 2V_2 = u; \quad \therefore\ 3V_2 = u(1+e); \, V_2 = \frac{1+e}{3}u.$$

$$\therefore\ u_1 = u - \frac{2}{3}(1+e)u = \frac{u}{3}[3-2-2e] = \frac{1-2e}{3}u.$$

எனவே, இரண்டாவது பந்து $u_1 = \frac{1+e}{3}u$ என்னும் வேகத்துடன் 3-வது பந்தை மோதுகிறது. இவ்விரண்டின் மோதுகைக்கு ஏற்ற அமைப்பு பின்வருமாறு :

பந்து	நிறை	மோதுகைக்கு முன் வேகம்	மோதுகைக்குப் பின் வேகம்
2	$2m$	$\frac{1+e}{3}u$	$u_2 \rightarrow$
3	$4m$	0	$v_3 \rightarrow$

$$V_3 - u_3 = -e\left[0 - \left(\frac{1+e}{3}\right)u\right] = \frac{1+e}{3} \cdot eu$$

$$2m\,U_2 + 4m\,V_3 = 2m\left(\frac{1+e}{3}\right)u$$

$$\therefore\ U_2 + 2V_3 + \frac{1+e}{3}u$$

$$3V_3 = \left(\frac{1+e}{3}u\right)(1+e)$$

$$V_3 = \left(\frac{1+e}{2}\right)^2 u.$$

அவ்வாறே n-ஆவது பந்து மோதுகைக்குப்பின்

$$V_n = \left(\frac{1+e}{3}\right)^{n-1} u$$ என்னும் வேகத்துடனியங்கும்.

எனவே, அடுத்தடுத்து மோதுகைக்குப்பின், 2-ஆவது, 3-ஆவது, ... n-ஆவது பந்துகளின் வேகங்கள் முறையே

$$\left(\frac{1+e}{3}\right) u, \left(\frac{1+e}{3}\right)^2 n, \ldots\ldots \left(\frac{1+e}{3}\right)^{n-1} u$$ ஆகும்.

பந்துகள் நிறை மீட்சியுள்ளனவெனில், $e = 1$.

∴ மோதுகைக்குப்பின் அப்பந்துகளின் வேகங்கள் முறையே

$$\left(\frac{2}{3}\right) u, \left(\frac{2}{3}\right)^2 u, \ldots\ldots \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} u$$ ஆகும்.

$\left(\frac{2}{3}\right)$ என்பதை பொது விகிதமாக (Common Ratio) கொண்ட இவைகள், ஒரு பெருக்கத் தொடரிலமைகின்றன.

7·20-14. சமமான நிறைகளுடைய B, C என்னும் இரு பந்துகள் ஒரு நேர்கோட்டில் ஓய்வில் உள்ளன. அதே நிறையுடைய A என்னும் பந்து, விநாடிக்கு 10மீ வேகத்தில் B, C யின் திசையில் B-ஐ மோதுகிறது. அத்தகைய மோதுகையால் வரிசையாக மோதல்கள் பந்துகளுக்கிடையே நிகழ்கின்றன. நிலை மீட்சிக்கெழு $e = 0 \cdot 4$ எனின், எல்லாவித மோதுகைகளுக்குப் பின் அப்பந்துகளின் வேகங்களைக் காண்க.

முதலிரண்டு பந்துகளின் மோதுகையினமைப்புப் பின்வருமாறு

பந்து	நிறை	மோதுகைக்குமுன் வேகம்	மோதுகைக்குப்பின் வேகம்
A	m	10 மீ/வி →	v_1' →
B	m	0	v_2' →

$$v_2' - v_1' = -\phi(0-10) = 10 \times 0 \cdot 4 = 4.$$

$$mv_1' + mv_2' = 10m; \quad v_1' + v_2' = 10; \quad \therefore \; 2v_2' = 14$$

$v_2' = 7$ மீ/வி ; $v_1' = 3$ மீ/வி

B, C என்னும் பந்துகளின் மோதுகையமைப்பு கீழ்க்காணுமாறு அமையட்டும்.

பந்து	நிறை	மோதுகைக்குமுன் வேகம்	மோதுகைக்குப்பின் வேகம்
B	m	7 மீ/வி →	0 →
C	m	v_2'' →	v_3' →

$$\therefore \quad v_3' - v_2'' = -e(0-7) = 0{\cdot}4 \times 7 = 2{\cdot}8$$

$$mv_2'' + mv_3' = 7m\,; \quad v_2'' + v_3' = 7\,; \quad 2v_3' = 9{\cdot}8$$

$$v_3' = 4{\cdot}9 \text{ மீ/வி}\,; \quad v_2'' = 2{\cdot}1 \text{ மீ/வி}.$$

A, B என்னும் பந்துகளின் இரண்டாவதான மோதுகையினமைப்பு பின்வருமாறு :

பந்து	நிறை	மோதுகைக்கு முன் வேகம்	மோதுகைக்குப்பின் வேகம்
A	m	$v_1' = 3$ மீ/வி. →	v_1'' →
B	m	$v_2'' = 2{\cdot}1$ மீ/வி. →	v_2''' →

$$v_2''' - v_1'' = -e(2{\cdot}1 - 3) = 0{\cdot}36$$

$$mv_1'' + mv_2''' = m \times 3 + m \times 2{\cdot}1\,; \quad \therefore \quad 2v_2''' = 5{\cdot}46$$

$$v_2''' = 2{\cdot}73 \text{ மீ/வினுடி}\,; \quad v_1'' = 2{\cdot}73 \text{ மீ/வினுடி}.$$

B, C-பந்துகளின் இரண்டாவது மோதுகையின் அமைப்பு பின் வருமாறு :

பந்து	நிறை	மோதுகைக்கு முன் வேகம்	மோதுகைக்குப் பின் வேகம்
B	m	$v_2''' = 2{\cdot}73$ மீ/வி →	$v_2^{(IV)}$ →
C	m	$v_3' = 4{\cdot}9$ மீ/வி →	v_3''

இங்கு $v_1'' = v_2''' < v_3'$ என்பதால், A, B, C என்னும் பந்துகளுக்கு இடையே மேற்கொண்டு ஒருவித மோதுகையும் இல்லை என்றாகிறது. எனவே எல்லா மோதுகைகளுக்குப் பின்

A, B, C என்னும் பந்துகள், முறையே 2·73 மீ/வி, 2·73 மீ/வி; 4·9 மீ/வி என்னும் வேகத்துடன் இயங்கும்.

7·20-15. இரண்டு கிலோகிராம் நிறையுள்ள துகளொன்று தன்னை நோக்கித் தாக்க வரும் மூன்று கிலோகிராம் நிறையுள்ள துகளொன்றை மோதியவுடன், ஓய்வு நிலையைப் பெறுகிறது. அத் தருணத்தில் 3 கி.கி. நிறையுள்ள பொருள் தன் வேகத்தை எதிர்த் திசையில் பெற்றுள்ளதாகில், துகள்களுக்கு இடையே யுள்ள நிலைமீட்சிக் குணகத்தின் மதிப்பைக் காண்க.

துகள்களின் மோதுகையின் அமைப்பு பின்வருமாறு இருப்பதாகக் கொள்க.

பந்து	நிறை	மோதுகைக்கு முன் வேகம்	மோதுகைக்குப் பின் வேகம்
1	2	$\overrightarrow{u}$	$\overrightarrow{0}$
2	3	$\overrightarrow{-v}$	$\overrightarrow{v}$

$$\therefore \quad v - 0 = -e(-v - u) = e(v + u) \qquad \ldots \quad \text{(i)}$$

$$2 \times 0 + 3 \times v = 2 \times u + 3 \times -v$$

$$\therefore \quad 6v = 2u \quad \text{அல்லது} \quad u = 3v \qquad \ldots \quad \text{(iii)}$$

$$\therefore \quad v = e(v + 3v) = 4ev \qquad \ldots \quad \text{(iv)}$$

$$\therefore \quad 4e = 1$$

$$\therefore \quad e = \frac{1}{4} = 0\cdot25 \quad \text{ஆகும்.}$$

7·20-16. m நிறையுள்ள ஒரு கோளம் மழமழப்பான மேசையின் மீது ஓய்விலிருக்கும் M நிறையுள்ள கோளமொன்றை நேரடியாக மோதுகிறது. அதன்பின் M நிறையள்ள கோளம், மேசையில் நிலையாகவுள்ள செங்குத்துத் தளத்தை மோதுகிறது. இவ்விரு மோதுகைகளுக்குப்பின் இரு கோளங்களிலும் மோதல்கள் ஏற்படாமலிருக்க $m(1 + e' + ee') < eM$ என்றிருக்கவேண்டுமென நிறுவுக. இங்கு e, e' என்பவை, முறையே கோளங்களுக்கு இடையேயுள்ள நிலைமீட்சிக் கெழுவையும், செங்குத்துத் தளத்திற்கும், M நிறையைப் பெற்ற கோளத்திற்குமிடையேயுள்ள நிலைமீட்சிக் கெழுவையும் குறிக்கின்றன.

கோளங்களின் மோதுகையமைப்பு பின் வருமாறு :

கோளம்	நிறை	மோதுகைக்கு முன் வேகம்	மோதுகைக்குப் பின் வேகம்
1	m	$u \rightarrow$	$u' \rightarrow$
2	m	$0 \rightarrow$	$v' \rightarrow$

$$v' - u' = -e(0-u) = eu \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \text{(i)}$$

$$mu' + Mv' = mu \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \text{(ii)}$$

$$mv' - mu' = eum \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \text{(iii)}$$

(ii), (iii) ஆகியவற்றை கூட்டிட,

$$(M+m)\,v' = (1+e)\,mu; \quad v' = \frac{(1+e)\,mu}{M+m};$$

$$u' = v' - eu = \frac{(1+e)\,mu}{M+m} - eu.$$

$$\therefore \quad u' = \frac{(m-eM)\,u}{M+m}.$$

M நிறையுடைய கோளம், செங்குத்துத் தளம் ஆகியவற்றின் மோதுகையின் அமைப்பு பின்வருமாறு :

கோளம்	நிறை	மோதுகைக்கு முன் வேகம்	மோதுகைக்குப் பின் வேகம்
கோளம்	M	$\overrightarrow{v'} = \frac{(1+e)\,mu}{M+m}$	$\overrightarrow{-v''}$
செங்குத்துத் தளம்	0	0	0

$$\therefore \quad 0-(-v'') = -e'(0-v') = e'v';$$

$$v'' = e'v' = \frac{(1+e)\,e'mu}{M+m}$$

இரு கோளங்களும் மறுமுறை மோதிக்கொள்ளாமல் இருக்க வேண்டுமெனில்,

$u' + v'' < 0$ என்றுகவேண்டும்.

$$\frac{(m-eM)\,u}{M+m} + \frac{(1+e)\,e'mu}{M+m} < 0,$$

அதாவது, $m(1+e'+ee') < eM$ என்றுக வேண்டும்.

7·20-17. இரு மழமழப்பான கோளங்கள் ஒன்றை ஒன்று மோதும் தருணத்தில் அவற்றின் மையயிணைக்கும் கோடு x அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது. மோதுகைக் கணத்திலே அவற்றின் திசை வேகங்கள் முறையே $\underline{v} = 10\,\underline{i} - 5\,\underline{j}$ மீ/வி $\underline{u'} = 5\,\underline{j}$ செமீ/வி எனவும், நிலைமீட்சிக் கெழு 0·5 எனவும், முதலாம் கோளத்தின் நிறை, இரண்டாவதைப் போல் இரு மடங்கு நிறை எனவும் கொண்டு, மோதுகைக்குபின் இரண்டாவது கோளத்தின் திசை வேகத்தைக் காண்க.

கோளங்களின் மோதுகையினமைப்பு பின் வருமாறு உள்ளதாகக் கொள்க :

கோளம்	நிறை	மோதுகைக்குமுன் திசை வேகம்	மோதுகைக்குப் பின் திசை வேகம்
1	$2m$	$\underline{v} = 10\,\underline{j} - 5\,\underline{j}$	$\underline{V} = v_x\,\underline{i} + v_y\,\underline{j}$
2	m	$\underline{v'} = 5\,\underline{j}$	$\underline{V'} = v_x'\,\underline{i} + v_y\,\underline{j}$

மோதுகை x-அச்சுக்கு இணையான கோட்டிலமைவதால்,

$$v_x' - v_x = -\phi\,(0-10) = -\frac{1}{2}\,(0-10) = 5 \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

x-திசையிலுள்ள மொத்த உந்தம் மாறுததாகையால்

$2mv_x + mv_x' = 2m\,(10)$ ஆகும்.

அதாவது $2v_x + v_x' = 20 \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$

(ii)—(i) என்பது $3v_x = 15$, $v_x = 5$ செமீ/வி ஆகும்.

$\therefore \quad v_x' = v_x + 5 = 10$ செமீ/வி ஆகும். $\quad \ldots \quad \text{(iv)}$

y அச்சுத் திசையில் திசைவேகங்கள் மாறுததாகையால்,

$v_y = -5$ செமீ/வி ; $v_y' = v_x = 5$ செமீ/வி.

$$\therefore \quad \underline{V'} = v_x'\,\underline{i} + v_y'\,\underline{j}$$

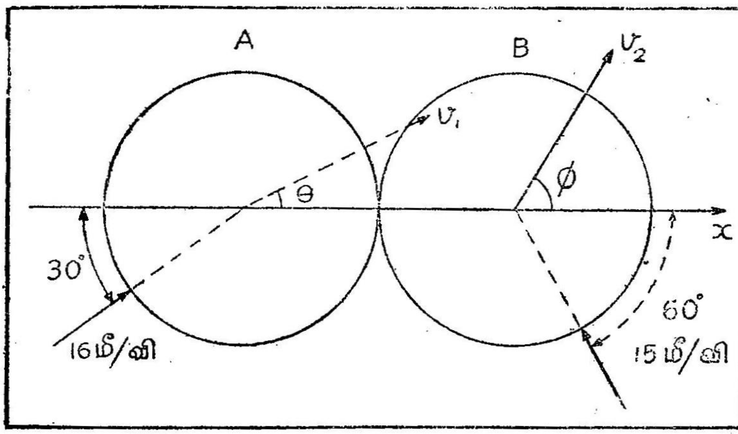
$$= 10\,\underline{i} + 5\,\underline{j} \text{ செமீ/வி.}$$

அவ்வாறே $\underline{V} = v_x\,\underline{i} + v_y\,\underline{j}$

$$= 5\,\underline{i} - 5\,\underline{j} \quad \text{செமீ/வினடி.}$$

7·2018. மழமழப்பான இரு சம பந்துகள் ஒன்றையொன்று மோதும்போது, அவற்றின் திசை வேகங்களின் எண் மதிப்புகள்

இயங்கும் திசைகள் படம் (7·34)-ல் காட்டியவாறு உள்ளன. $e = 0 \cdot 8$ எனில், மோதுகைக்குப்பின் அப்பந்துகளின் திசை வேகங்களைக் காண்க. மோதுகையால் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் இழப்பையும் காண்க.



படம் 7·34

மோதுகைக்குப் பின் A, B என்னும் பந்துகளின் வேகங்கள் v_1, v_2 என்றும், அவை x-அச்சுடன் θ, ϕ என்னும் கோணச் சரிவைப் பெற்றுள்ள திசைகளில் செயற்படுவதாகவும் கொள்க. இங்கு மோதுகைக்கோடு x இச்சுக்கு இணையாகவுள்ளது. பந்துகளின் மோதுகைக்கு உரிய நிலைமைகளை பின்வரும் அட்டவணை அறிவிக்கட்டும்.

பந்து	நிறை	மோதுகைக்குமுன் திசைவேகம்	மோதுகைக்குப்பின் திசைவேகம்
1	m	$10\angle 30^\circ = \begin{cases} 10\cos 30^\circ \rightarrow \\ 10\sin 30^\circ \downarrow \end{cases}$	$v_1 \angle \theta = \begin{cases} v_1 \cos\theta \rightarrow \\ v_1 \sin\theta \downarrow \end{cases}$
2	m	$15\angle 120^\circ = \begin{cases} -15\cos 60^\circ \rightarrow \\ 15\sin 60^\circ \downarrow \end{cases}$	$v_2 \angle \phi = \begin{cases} v_2 \cos\phi \rightarrow \\ v_2 \sin\phi \uparrow \end{cases}$

$$v_1 \cos\theta - v_2 \cos\phi = -0 \cdot 8\,(10\cos 30^\circ + 15\cos 60^\circ)$$
$$= -12 \cdot 928 \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$$v_1 \sin\theta = 10\sin 30^\circ = 5 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

$$v_2 \sin \phi = 15 \sin 60^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

$$m_1 v_1 \cos \theta + m v_2 \cos \phi = m \times 10 \frac{\sqrt{3}}{2} + m(-15)\frac{1}{2} \, ;$$

$$v_1 \cos \theta + v_2 \cos \phi = 1 \cdot 16 \quad \ldots \quad \text{(iv)}$$

எனவே $v_1 = 7 \cdot 72$ மீ/வி ; $\theta = 139^\circ 39'$;

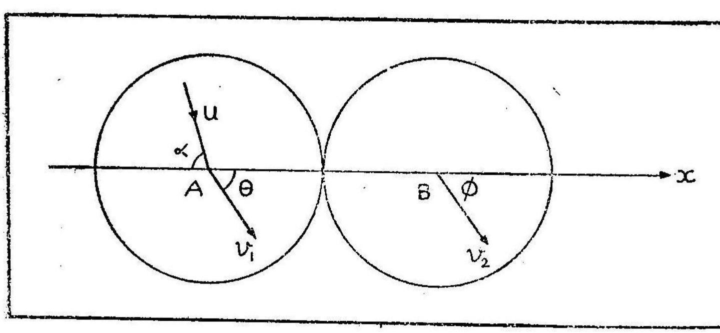
$v_2 = 14 \cdot 78$ மீ/வி ; $\phi = 61^\circ 32'$.

மோதுகையால் இயக்க ஆற்றலிழப்பு

$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - e^2)(u \cos \alpha - v \cos \beta)^2$$

$= 23 \cdot 5 \; m$ மீட்டர் கிகி. விசை.

7·20-19. m நிறையுள்ள ஒரு கோளம் ஓய்விலிருக்கும் M நிறையுள்ள கோளமொன்றைச் சரிவாய் மோதுகின்றது. $m = eM$ ஆயின், மோதுகைக்குப்பின் அக் கோளங்களுடைய இயக்க திசைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணங்களில் உள்ளன எனக் காட்டுக.



படம் 7·35

இரு கோளங்களின் மோதுகைக்கு ஏற்றதான அமைப்பை, கீழ்க்காணும் அட்டவணை குறிக்கட்டும் :

கோளம்	நிறை	மோதுகைக்கு முன் திசை வேகம்	மோதுகைக்கு பின் திசை வேகம்
1	$m = eM$	$u \angle \alpha = \begin{cases} u \cos \alpha \rightarrow \\ u \sin \alpha \downarrow \end{cases}$	$v_1 \angle \theta = \begin{cases} v_1 \cos\theta \rightarrow \\ v_1 \sin\theta \rightarrow \end{cases}$
2	M	$v \angle 0^\circ = \begin{cases} 0 \rightarrow \\ 0 \downarrow \end{cases}$	$v_2 \angle \phi = \begin{cases} v_2 \cos\phi \rightarrow \\ v_2 \sin\phi \rightarrow \end{cases}$

$$v_1 \cos\theta - v_2 \cos\phi = -e(u \cos\alpha - 0) = -eu \cos\alpha \quad \dots \quad (i)$$

$$eMv_1 \cos\theta + Mv_2 \cos\phi = eMu \cos\alpha$$

$$ev_1 \cos\theta + v_2 \cos\phi = eu \cos\alpha \quad \dots \quad (ii)$$

$$v_1 \sin\theta = u \sin\alpha \quad \dots \quad \dots \quad (iii)$$

$$v_2 \sin\phi = 0$$

(i) + (ii) என்பது

$(1+e)\, v_1 \cos\theta = 0; \quad \therefore \quad \cos\theta = 0.$ அல்லது $\theta = 90°$

மேலும் $v_2 \sin\phi = 0; \quad v_2 \neq 0; \quad \therefore \quad \phi = 0°$

எனவே $\phi \sim \theta = \frac{\pi}{2} \sim 0 = \frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

7·21 பயிற்சி

7·21-1. விநாடிக்கு 8 மீட்டர் வேகத்தோடு இயங்கும் ஒரு பந்து வழவழப்பான ஒரு தளத்தின்மீது தளத்துடன் 30° கோணச் சாய்வில் மோதுகின்றது. நிலைமீட்சிக்கெழு $\frac{1}{2}$ ஆயின், மோதுகைக்குப் பின் அதன் வேகத்தையும், இயக்கத் திசையையும் காண்க. [விடை : 7·2 மீ/விநாடி ; 16·6°]

7·21-2. பாரமான மீள்சக்தியுடைய கண்ணாடிக் கோளமொன்று ஓரறையின் உட்கூறையிலிருந்து (Ceiling) கிடைத் தளத்தின்மீது விழுந்து 3 மீட்டர் உயரத்திற்குத் தெறிக்கிறது. அது மறுமுறை தெறிக்கும்போது 2 மீ உயரத்தை அடையுமெனில், கோளத்திற்கும், தரைக்குமிடையேயுள்ள நிலைமீட்சிக் கெழுவின் மதிப்பைக் காண்க. $\left[\text{விடை} : e = \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$

7·21-3 ஒரு கோளம் 45 மீட்டர் உயரத்திலிருந்து மீள் சக்தியுடைய ஒரு தளத்தின் மீது விழுகிறது. மீள்சக்தி குணகம் $\frac{1}{4}$ எனில், அக்கோளம் ஓய்வடையுமுன் தெறித்த தொலைவையும், கழித்த நேரத்தையும் காண்க.

$\left[\text{விடை} : 51 \text{ மீட்டர்} ; 17 \frac{\sqrt{2}}{7} \text{ விநாடிகள்}\right]$

7·21-4. ஒரு கிலோகிராம் எடையுள்ள கோளமொன்று 100 மீட்டர் உயரத்திலிருந்து மீள்சக்தியுடைய ஒரு கிடைத் தளத்தின்மீது விழுந்து, 10 மீட்டர் உயரத்திற்குத் தெறிக்கிறது. (a) மீள்சக்தி குணகம், (b) கிடைத்தளத்தின் தாக்களவை ஆகிய வற்றை காண்க. [விடை : $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 5·94 கி.வி. விநாடி.]

7·21-5. பாரமான மீள்சக்தியுடைய பந்தொன்று ஒரறையின் உட்கூரையிலிருந்து (Ceiling) விழுகின்றது. அது தரையிலிருந்து இரு முறை தெறித்த பிறகு, கூரையின் உயரத்தில் $\frac{1}{4}$ பங்கு எழு கிறது. நிலை மீட்சிக் கெழு $\frac{1}{\sqrt{2}}$ எனக் காட்டுக.

7.21-6. விநாடிக்கு 4 மீட்டர் வேகத்தோடு இயங்கும் ஒரு கோளம் வழவழப்பான ஒரு நிலைத்தளத்தின்மீது 45° கோண சாய்வில் மோதுகிறது. நிலைமீட்சிக் கெழு $\frac{1}{2}$ ஆயின், அக் கோளத்தின் மோதுகைக்குப் பின்னுள்ள இயக்க திசையையும், வேகத்தையும் காண்க.

[விடை : $\sqrt{10}$ மீ/விநாடி ; $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$]

7·21-7. மீள் சக்தியுடைய கோளமொன்று h உயரத்தி லிருந்து ஒரு கிடைத்தளத்தின்மேல் விழுகின்றது. அது இரண் டாவது மோதுகையின் பின் h^{1} உயரத்திற்குத் தெறிக்குமெனில், நிலைமீட்சிக் குணகத்தின் மதிப்பைக் காண்க.

[விடை : $\left(\frac{h^{1}}{h}\right)^{\frac{1}{2}}$]

7·21-8. ஒரு பந்து 2 விநாடிகளுக்கு நிலைக்குத்தாக விழுந்து கிடைமட்டத்திற்கு 30° கோணச் சாய்விலுள்ள ஒரு தளத்தை அடிக்கின்றது. $e = \frac{3}{4}$ எனில் அது தளத்தை மறுபடியும் அடிக்குமுன்னர் கழிந்த நேரம் யாது? [விடை : 3 விநாடிகள்]

7·21.9 பாரமான மீள் சக்தியுடைய பந்தொன்று h மீ உயரத் திலிருந்து விழுந்து கிடைமட்டத்திற்கு 60° கோணச் சாய்வி லுள்ள ஒரு சாய்தளத்தைச் சந்திக்கிறது. அது அத் தளத்தை மோதும் முதலிரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க. [விடை : $2\sqrt{3}\,he(1+e)$]

7·21-10. வழவழப்பான நிலையான தளத்தின்மீது, ஒரு பந்து தளத்துடன் 30° கோணத்தில் மோதுகிறது. மோதலுக்குப் பின் அதனியக்கவாற்றல், மோதலுக்கு முன் உள்ளதைப் போல் பாதி அளவே இருக்குமெனில் நிலைமீட்சிக் கெழுவையும் பந்து தெறித்து விழும் திசையையும் காண்க.

[விடை : $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\theta = 45°$]

7·21-11. மீள்சக்தியுடைய பந்தொன்று தரையில் தந்த ஒரு புள்ளி O-விலிருந்து, கிடைமட்டத்திற்கு α என்னும் கோணச் சாய்வில் u என்னும் வேகத்துடன் எறியப்பட்டு, O-விலிருந்து d தொலைவிலுள்ள வழவழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரில் மோதி, அதிலிருந்து தெறித்து, மீண்டும் O-ஐ அடைகிறது. e என்பது மீட்சிக்கெழுவெனில், $d = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \cdot \frac{e}{1+e}$ என நிறுவுக.

7·21-12. ஒரு பந்தானது 45° ஏற்றக் கோணத்தில் 21 மீ. வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. அது 15 மீ தொலைவிலுள்ள ஒரு மழமழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரில் மோதி எறி புள்ளியை மீண்டும் அடைகிறது. பந்திற்கும் சுவருக்குமிடையேயுள்ள நிலை மீட்சிக்கெழுவின் மதிப்பைக் காண்க. ($g = 9·8$ மீ/வி எனக் கொள்க.)

[விடை : $e = \frac{1}{2}$]

7·21-13. 5 கிகி. நிறையுடைய பந்து வினாடிக்கு 2மீ வேகத்தோடியங்கிக்கொண்டு வினாடிக்கு 1மீ வேகத்தோடு இயங்குகின்ற 4 கிகி. நிறையுள்ள கோளம் ஒன்றில் நேரடியாக மோதுகிறது. நிலைமீட்சிக் கெழு $\frac{1}{5}$ எனில், மோதுகைக்குப்பின் அப்பந்துகளின் வேகங்களைக் காண்க. [விடை : 5/3 மீ/வி ; 22/15 மீ/வி].

7·21-14. ஒரு கிகி. நிறையுள்ள கோளம் வினாடிக்கு 5மீ வேகத்தோடு இயங்கிக்கொண்டு வினாடிக்கு 3மீ வேகத்தோடு இயங்கும் 2 கிகி. நிறையுள்ள கோளமொன்றின்மீது நேரடியாக மோதுகிறது. $e = \frac{1}{2}$ எனில், மோதுகைக்குப்பின் அக்கோளங்களின் வேகங்களையும், இயக்க ஆற்றலின் இழப்பையும் காண்க.

[விடை : வினாடிக்கு 3மீ ; வினாடிக்கு 4மீ ; 1 ஜூல்].

7·21-15. 4 கிகி. நிறையுள்ள கோளம் விநாடிக்கு 8மீ வேகத்தோடு இயங்கி, விநாடிக்கு 5மீ வேகத்தோடு இயங்கும் 3 கிகி. நிறையுள்ள கோளமொன்றின் மீது நேரடியாக மோதுகிறது. $e = \frac{1}{2}$ எனில், மோதுகைக்குப்பின் அக் கோளங்களின் வேகங்களைக் காண்க. [விடை : 6·5 மீ/வி ; 8 மீ/வி].

7·21-16. விநாடிக்கு 3·6மீ வேகத்தோடு இயங்கும் கோளம் அதே கோட்டில் எதிர்த்திசையில் விநாடிக்கு 1·8மீ வேகத்தில் இயங்கும் சமநிறையுடைய கோளத்தைச் சந்திக்கிறது. நிலை மீட்சிக் கெழு $\frac{1}{3}$ ஆயின், மோதுகைக்குப்பின் அவற்றின் வேகங்களைக் காண்க. [விடை : முதல் கோளம் ஓய்வடையும்; அடுத்தது 1·8மீ வேகத்தில் திரும்பும்].

7·21-17. ஒரு கோளம் ஓய்விற்கிடக்கும் ஒரு சமகோளத்தின் மீது நேரடியாக மோதுகிறது. நிலைமீட்சிக்கெழு e-ஆயின், மோதுகைக்குப்பின் அவற்றின் வேகங்கள் $(1 - e) : (1 + e)$ என்னும் விகிதத்தில் இருக்குமெனக் காட்டுக.

7·21-18. 8 கிகி. நிறையுள்ளதும், விநாடிக்கு 4மீ வேகத்தில் ஒரு நேர்கோட்டில் இயங்குவதுமான கோளமொன்றை 12கிகி. நிறையுள்ளதும், விநாடிக்கு 9மீ வேகத்துடன் அதே திசையில் இயங்குவதுமான மற்றொரு கோளம் மோதுகிறது. $e = \frac{1}{5}$ எனில், மோதுகைக்குப்பின் கோளங்களின் வேகங்களை காண்க. [விடை : 7·6 மீ/வி ; 6·6 மீ/வி].

7·21-19. நிறைமீட்சியுள்ள மூன்று கோளங்கள் 1 : 3 : 6 என்னும் விகிதத்தில் நிறைகளைப்பெற்றும், சமமான உந்தங்களையுடையனவாகவும் உள்ளன. சிறிய கோளங்கள் ஒவ்வொன்றும் அதற்கு முன்னுள்ள கோளத்தை மோதியபின் ஓய்வு நிலையைப் பெறும் எனக்காட்டுக.

7·21-20. ஒரு பந்து தன் நிறையின் இரண்டு மடங்கைப் பெற்றதும் தன் திசைவேகத்தில் $\frac{1}{7}$ பங்கு திசை வேகத்துடன் அதே திசையில் இயங்குவதுமான மற்றொரு பந்தின் மீது நேரடியாக மோதுகிறது. நிலைமீட்சிக் கெழு $\frac{3}{4}$ எனின், மோதுகையால் முதல் பந்து ஓய்வடையும் எனக் காட்டுக.

7.21-21 ஒரு பந்து தன் திசைவேகத்தில் $\frac{1}{n}$ பங்கு திசைவேகத்துடன் அதே திசையில் இயங்கும் மற்றொரு பந்தின்மீது நேரடியாக மோதுகிறது. இரண்டாவது பந்தின் நிறை முதல் பந்தின் நிறையைப்போல் m மடங்குள்ளது. மோதுகையால் முதல் பந்து ஓய்வு பெறுமெனில், நிலைமீட்சிக் கெழுவின் மதிப்பு, $\frac{m+n}{m(n-1)}$ ஆகுமெனக் காட்டுக. அன்றியும் $m > \frac{n}{n-2}$ எனவும் காட்டுக.

7.21-22. m கி.கி. நிறையுள்ள A என்னும் கோளம், ஒரு வழவழப்பான தரையின்மீது M கி.கி. நிறையுள்ள மற்றொரு B என்னும் கோளத்திற்கும் நிலைக்குத்தான சுவருக்கும் இடையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. A ஆனது B-ஐ நேரடியாக மோதும்படி எறியப்படுகிறது. $M = 15\ m$ என்றும் கோளங்களிடையேயும், A என்னும் கோளத்திற்கும் சுவருக்குமிடையேயும் உள்ள நிலைமீட்சிக் கெழு $\frac{3}{5}$ என்றும் இருக்குமெனில், A என்னும் கோளம் B-யுடன் இரண்டாவது மோதுகைக்குப்பின் ஓய்வடையுமெனக் காட்டுக.

7.21-23. ஒரு சுவரிலிருந்து 9 மீ. தொலைவில் ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தளத்தின்மீது ஓய்வில் கிடக்கின்ற ஒரு பந்து விநாடிக்கு 6 மீ வேகத்தோடு அச்சுவருக்குச் செங்கோணத்தில் இயங்குகின்ற வேறொரு சமநிறையுள்ள பந்தாலே நேராக மோதப்படுகிறது. அப்பந்துக்களுக்கு இடையிலுள்ள நிலைமீட்சிக் குணகமும் அப்பந்துகளுக்கும் சுவருக்குமிடையிலுள்ள குணகமும், ஒவ்வொன்றும் $\frac{1}{2}$ ஆயின், அவையிரண்டாம் முறையாக 3·6 விநாடிகள் முடிவிலே மோதுமெனக் காட்டுக.

7.21-24. வெவ்வேறான நிறைகளையுடைய இரு மழமழப்பான கோளங்கள் ஒன்றையொன்று மோதிக் கொள்ளும்பொழுது அவற்றின் மையமிணைக்கும் கோடு x அச்சுக்கு இணையான திசையில் அமைகிறது. கோளங்களின் இயக்க ஆற்றல் மோதுகைக்கு முன்னும், பின்னும் சமமாகுமெனில் மோதுகையால் அவற்றினுடைய சார்புத் திசைவேகத்தின் x அச்சுப் பகிர்வு தன் குறியை மாற்றிக்கொள்ளும் எனக் காட்டுக.

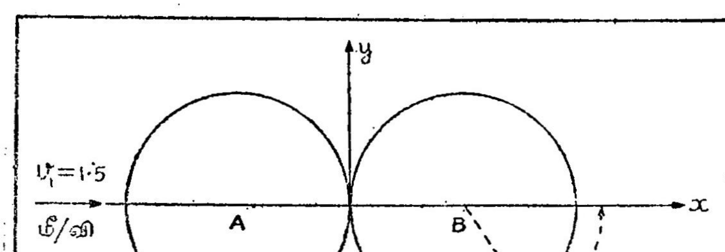
இரு கோளங்கள் ஒன்றையொன்று u என்னும் சார்புத்திசைவேகத்துடன் நேரடியாக மோதிக்கொள்கின்றன. அவற்றின் மொத்த நிறைகளின் கூடுதல் m எனவும், நிலைமீட்சிக்கெழு e எனவும் கொண்டு, கோளங்கள் சமமான நிறையைப்

பெற்றுள்ளபோது, மோதுகையால் இயக்க ஆற்றலின் இழப்பு உச்ச மதிப்பைப் பெறும் எனக் காட்டுக.

7·21-25. வினாடிக்கு 50 $\underline{i}$ செமீ திசை வேகத்தில் இயங்கிக் கொண்டு இருக்கும் 200 கிராம் நிறையுள்ள கோளத்தை, 50 $\underline{j}$ செமீ/வினாடி திசைவேகத்தோடு இயங்குகின்ற 100 நிறையுள்ள கோளமொன்று மோதுகிறது. மோதுகையின் போது மையமிணைக்கும் கோடு y-அச்சுக்கு இணையாகவுள்ளது. கோளங்கள் மழமழப்பானவை எனவும். அவற்றுக்கிடையேயுள்ள நிலைமீட்சிக் கெழு 0·2 எனவும் கொண்டு, ($\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$)-சுட்டமைப்பில், மோதுகைக்குப்பின் அக் கோளங்களின் திசை வேகங்களைக் காண்க. [விடை : $50\,\underline{i} + 20\,\underline{j}$ செமீ/வி; $10\,\underline{j}$ செமீ/வி]

7·21-26. சமநிறையும், நிறை மீள்சக்தியும் கொண்ட இரு பந்துகள் மோதிக்கொள்கின்றன. மோதுகைக்கு முன் அவற்றின் இயக்கத்திசைகள் செங்கோணங்களில் இருந்தால், மோதுகைக்குப் பின்னும் அவற்றின் இயக்க திசைகள் செங்கோணங்களிலேயே இருக்குமெனக் காட்டுக.

7·21-27. சமநிறையுர், 0·9 என்னும் மீள் சக்திக் கெழுவையும் கொண்ட இரண்டு பந்துகள் படம் (7·36)-ல் காட்டியவாறு

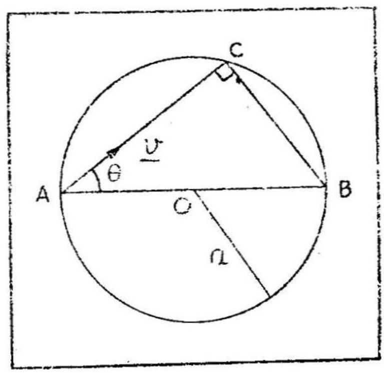


படம் 7·36

மோதிக்கொள்கின்றன. மோதுகைக்குப்பின் அவற்றின் திசை வேகங்களையும், மோதுகையால் ஏற்பட்ட இயக்க ஆற்றலில் இழப்பின் வீதத்தையும் காண்க.

[விடை : $\underline{v_1}' = -0{\cdot}875\,\underline{i}$; $\underline{v_2}' = 1{\cdot}375\,\underline{i} + 1{\cdot}732\,\underline{j}$; ஆற்றலிழப்பின் வீதம் 9·35%]

7·21-28. படம் (7·37)-ல் காட்டியவாறு நிலைக்குத்தாகவும் மழமழப்பானதாகவும் உள்ள விளிம்பைப்பெற்ற, வழவழப்பான வட்டமேஜை ஒன்றின் விளிம்பில் உள்ள A என்னும் புள்ளியி



படம் 7·37

லிருந்து, v என்னும் வேகத்துடன் எறியப்பட்டு C என்னும் விளிம்புப் புள்ளியில் மோதி, B என்னும் புள்ளிக்குச் செல்வதாகில் நிலை மீட்சி கெழுவின் மதிப்பை காண்க. [விடை : $e = \tan^2 \theta$].

7·21-29. ஒரு வேகத்தோடு இயங்குகின்ற ஒரு பந்து அதே வேகத்தோடு அதன் திசைக்குச் செங்குத்தாக இயங்கும் மற்றொரு சம நிறையுடைய பந்தின் மீது மோதுகிறது. மோதுகைக் கணத்தில் அப்பந்துகளுடைய மையங்களை இணைக்கும் கோடு, இரண்டாம் பந்தின் இயக்க திசைக்குச் செங்குத்தாகும். e என்பது மீட்சிக் குணகமெனில், இரண்டாம் பந்தின் இயக்கத் திசை $\tan^{-1}\left(\frac{1+e}{2}\right)$ என்னும் கோணத்தாலே திரும்பப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

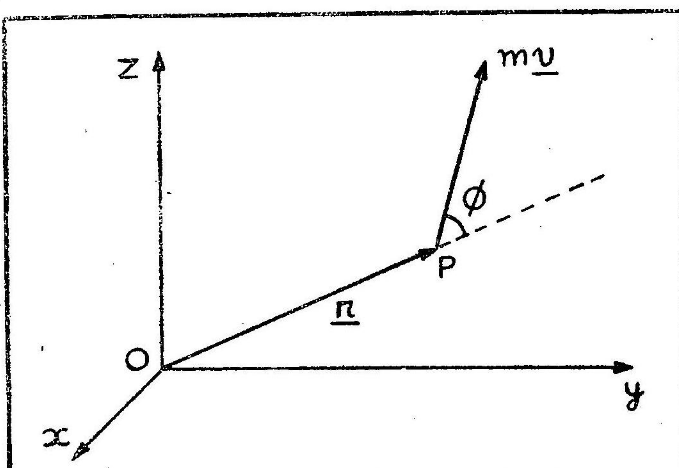
7·21-30. ஒரு கோளம் ஓய்விலுள்ள சமநிறையுடைய கோளத்தின் மீது மோதுகின்றது. மோதுகைக்குப பின் இயக்கத் திசைகளானவை மோதுங் கோளத்தின் தொடக்க இயக்கத் திசைக்கு $30°$ கோணச் சாய்விலிருந்தால், மீட்சிக்குணகம் $\frac{1}{3}$ எனக் காட்டுக.

8. துகளொன்றின் உந்தத்திருப்பம்

(Moment of Momentum of a particle)

t என்னும் நேரத்தில், m நிறையுள்ள துகளொன்று $\underline{P}$ என்னும் புள்ளியில், $\underline{v}$ என்னும் திசைவேகத்தில் (x, y, z) என்னும் குறிப்பிட்டச்சு அமைப்பைக்குறித்து, படம் (8.1)-ல் காட்டியவாறு, இயங்குவதாகக்கொள்க.

$\underline{r}$ என்பது P-யின் நிலைத்திசையியாகுக. அந்நேரத்தில், $m\,\underline{v}$ என்பது துகளின் உந்தத்தைக் குறிக்கிறது.



படம் 8·1

O-என்னும் புள்ளிபற்றி, அவ்வுந்தத்தின் திருப்பம்,

$\underline{r} \wedge m\,\underline{v}$ ஆகும். இதுவே, துகளின் உந்தத்திருப்பம், அல்லது சுழல் உந்தம் (Angular Momentum) எனப்படும். இது $m\,\underline{H_0}$ என்னும் திசையியால் குறிக்கப்படும்.

$$\therefore \quad m\,\underline{H_0} = \underline{r} \wedge m\,\underline{v}$$

அதன் எண்மதிப்பு, $mH_0 = rmv \sin \phi$ ஆகும். அது செயற்படும் திசையானது, $\underline{r}$, $m\,\underline{v}$ என்னும் திசையிகள் வரையறுக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாயும், $\underline{r}$, $m\,\underline{v}$, $m\,\underline{H_0}$ என்பவை ஒரு வலப்புறத்திருகுச்சுருளில் ஏற்படும் சிழற்சியின் அமைப்புக்கு ஒத்தவாறும் எடுக்கப்படும்.

இயக்க விசையியலில், உந்தத்திருப்பத்தின் பயனையறிவதற்கு, $m\,\underline{v}$ என்னும் உந்தத்தையுடையதும் $\underline{F}$ என்னும் மாறு விசைக்குக் கட்டுப்பட்டு இயங்குவதுமான துகளொன்றின் இயக்கத்தை நோக்குக.

O-என்னும் நிலையான புள்ளிபற்றி, திருப்புத்திறன்கள் எடுப்பதாகவும் கொள்க.

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

$$\underline{F} = \frac{d}{dt}\,(m\,\underline{v})$$

O-வைப்பற்றி, $\underline{F}$-ன் திருப்புத்திறன்,

$$\underline{M_0} = \underline{r} \wedge \underline{F} = \underline{r} \wedge \frac{d}{dt}\,(m\,\underline{v}) \quad \text{ஆகும்.}$$

மேலும், t-ஐக் குறித்து,

$m\,\underline{H_0} = \underline{r} \wedge m\,\underline{v}$ என்னும் சமன்பாட்டின் வகைக்கெழுவை வரையறுக்க. அப்போது,

$$\frac{d}{dt}\left\{ m\,\underline{H_0} \right\} = \frac{d}{dt}\left\{ \underline{r} \wedge m\,\underline{v} \right\}$$

$$= \frac{d\,\underline{r}}{dt} \wedge m\,\underline{v} + \underline{r} \wedge \frac{d}{dt}(m\,\underline{v})$$

$$= \underline{v} \wedge m\,\underline{v} + \underline{r} \wedge \underline{F}$$

$$= O \qquad + \underline{r} \wedge \underline{F}$$

$$= \underline{M_0} \quad \text{ஆகும்.}$$

எனவே, உந்தத்திருப்பத்தின் வீதமே, O-பற்றி விசையின் திருப்புத்திறனுக்குச் சமமாகும். கட்டிறுக்கப் பொருள்களின் இயக்கத்தை ஆய்வுற, இச்சமன்பாடு பெரிதும் உதவுகிறது.

8·1. துகளொன்றிற்கான உந்தத்திருப்பம், கோணத் தாக்களவை ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள உறவைக் காணுதல்.

t_0, t_1 என்னும் நேரங்களில், துகளானது r_0, r_1 என்னும் நிலைத்திசையிகள் வரையறுக்கும் புள்ளிகளில் முறையே, $\underline{v_0}$, $\underline{v_1}$ என்னும் திசை வேகத்துடன் இயங்குவதாகக் கொள்க.

$$\underline{r} \wedge \underline{F} = \frac{d}{dt}\left\{ m \underline{H_0} \right\} = \frac{d}{di}\left\{ \underline{r} \wedge m \underline{v} \right\}$$

என்னும் சமன்பாட்டை, (t_0, t_1) இடைவெளி நேரத்தில், நேரத்தைக்குறித்துத் தொகையிட,

$$\int_{t_0}^{t_1} (\underline{r} \wedge \underline{F})\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left\{ \underline{r} \wedge m \underline{v} \right\} dt$$

$$= \int_{\underline{v_0}}^{\underline{v_1}} d\left\{ r \wedge m \underline{v} \right\}$$

$$= \underline{r_1} \wedge m \underline{v_1} - \underline{r_0} \wedge m \underline{v_0}$$

$$= \triangle\left(\underline{r} \wedge m \underline{v} \right)$$ என்பது கிடைக்கும்.

$(t_1 - t_0)$ இடைவெளி நேரத்தில், 0 என்னும் நிலையானபுள்ளி பற்றி, $\underline{F}$ என்னும் விசையால் விளைவிக்கப்பட்ட கோணத் தாக்களவை (Angular impulse)யை மேற்கூறிய சமன்பாட்டின் இடது பறம் குறிக்கிறது. எனவே, "ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையான மையப் புள்ளி பற்றி, குறிப்பிட்ட நேர இடைவெளியில், துகளொன்றிற்கான உந்தத்திருப்பத்தின் மாற்றம், அத்துகளின் மேல் நிகழும் நிகர கோணத்தாக்களவைக்குச் சமமாகும்" என்னும் கோட்பாடு பெறப்படுகிறது.

8·3. உந்தத் திருப்பத்தின் காப்பு (Conservation of Moment of Momentum).

துகளொன்று எவ்வித புற விசைகளுக்கும் கட்டுப்படாமலிருக்கும்போது. அது நேர்கோட்டில் சீரான இயக்கத்தைப் பெற்றிருக்கும் என்ற நியூட்டனின் முதலாவது விதியின் தத்துவத்தை துகளுக்கான உந்தக்காப்பு விதியானது (Conservation of Momentum) மற்றொருவகையில் விளக்குகிறது. எவ்விதப் புறவிசைகளும் துகளின்மேல் செயற்படுவதில்லை எனில், அதன்மேல் ஒருவித

தாக்களவையும் இல்லை என்பதாகிறது. அதாவது, அத்துகளில் உந்தமாற்றம் ஏதுமில்லை என்ருகும். எனவே உந்தம் அழிவின்மை யாகும்.

ஆனல் துகளொன்றின்மேல் செயற்படும் விசை பூச்சிய மாயில்லாதபோதிலும், அத்துகளில் ஏற்படும் கணத்தாக் களவையின் நிகர மதிப்பு பூச்சியமாக இருக்கக்கூடும். எடுத்துக் காட்டாக, காலவட்ட ஒழுங்குடைய பாதையைத் துகளொன்று திரும்பத்திரும்ப வரையறுப்பதாகக்கொள்க. அத்தகைய பாதை யில், துகளைக் கட்டுப்படுத்தி இயங்கச்செய்யும் விசை பூச்சியமாவ தில்லை. எனினும் t என்னும் ஒவ்வொரு கால வட்ட நேரத்திலும், அத்துகள் ஒரேமாதிரியான வடிவமைப்புப்பாதையை வரைவதால், துகளின்மேல் ஏற்படும் கணத்தாக்களவையின் நிகர மதிப்பு, எக் கணத்திலும் பூச்சியமாக இருக்கத்தக்கதாகும். அதாவது, t_0 என்னும் ஒவ்வொரு நேரத்திற்கும்,

$$\int_{t_0}^{t_0+t} \underline{F}\, dt = \underline{0} \quad \text{ஆகும்.}$$

துகளொன்றில் நிகழும் கோணத்தாக்களவை பூச்சியமெனில், அத்துகளுக்கான உந்தத்திருப்பம் மாருததாகும். இதுவே துகளுக் கான உந்தத் திருப்புக் காப்புவிதி எனப்படும். அதாவது,

$$\int_{t_0}^{t_1} \underline{r} \wedge \underline{F}\, dt = 0 \quad \text{என்பதால்,}$$

$$\Delta\left(\underline{r} \wedge m\,\underline{v}\right) = 0 \quad \text{ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \underline{r} \wedge m\,\underline{v} = \text{ஒரு மாறிலி}$$

அதாவது $m\,\underline{H}_0$ என்பது ஒரு மாறிலியாகும்.

இத்தகைய உந்தத்திருப்பத்தின் காப்புவிதி மைய விசைகளின் கீழ் இயங்கும் துகளுக்கு மேலான விளக்கத்தை அளிக்கிறது.

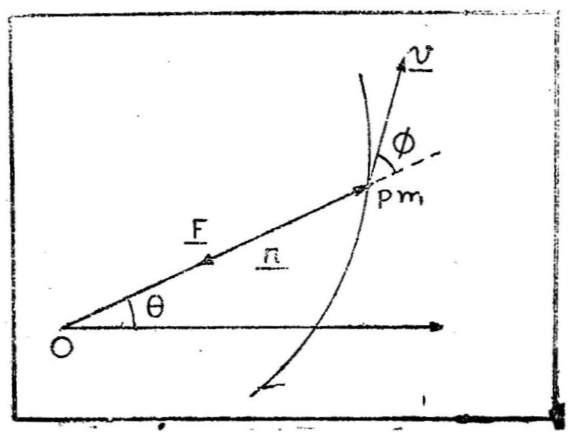
8·3. மையவிசையின்கீழ் இயக்கம் (Motion under central forces)

நிலையான ஒரு புள்ளியை நோக்கியோ அல்லது அப்பாலோ (away) செயற்படுகின்ற விசையால் துகளொன்று தாக்கப்படு மெனில், அவ்விசையானது, மைய விசை (central force) எனப் படும். அந்த நிலையான புள்ளி விசை மையம் (centre of force) எனக் கூறப்படும். மையவிசையால் தாக்கப்பட்டு, துகள் வரையும் பாதை மைய விசைப்பாதை (central orbit) எனப்படும்.

8 3-1. மைய விசைப்பாதை ஒரு தளவளைவரையாகும்.

அத்துகள் எந்நேரத்திலும் அதன் பாதைக்கு வரையப்படும் தொடுகோடு, அந்நிலைப்புள்ளி ஆகிய இவற்றின் தளத்திலேயே இயங்குகிறது. மேலும் துகளின் மேல் செயற்படும் மையவிசையும் இத்தளத்திலேயே உள்ளது. தவிரவும் இத்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் முடுக்கத்தின் கூறு ஏதுமில்லை. ஆகவே, மைய விசைப்பாதை ஒரு தளத்திலமைவதாகும் (Plane curve).

அத்தகைய மைய விசையை $\underline{F}$ எனக் கொண்டால், t என்னும் நேரத்தில், துகளிருக்கும் நிலையை வரையறுக்கும் $\underline{M}$ என்னும் நிலைத்திசையி, அவ்விசைக்கு இணையாகவோ அல்லது எதிரிணையாகவோ, படம் (8·2)-ல் காட்டியவாறு இருக்கிறது. எனவே, $\underline{r}$ என்னும் திசையி,



படம் 8·2

$\underline{r} \wedge \underline{F} = O$ என்னும் சமன்பாட்டை நிறைவேற்றுகிறது. எனவே, $\underline{F}$ என்னும் மைய விசையால், துகளில் நிகழும் கோணத்தாக்களவை பூச்சியமாகும்.

ஆகவே, $$\Delta(\underline{r} \wedge m\underline{v}) = \int_{t_0}^{t_1} (\underline{r} \wedge \underline{F})\, dt = 0$$

அதாவது, $\Delta\ (\underline{r} \wedge m\,\underline{v}) = 0$

அதாவது, $m\,\underline{H_0} = \underline{r} \wedge m\,\underline{v} =$ ஒரு மாறிலி

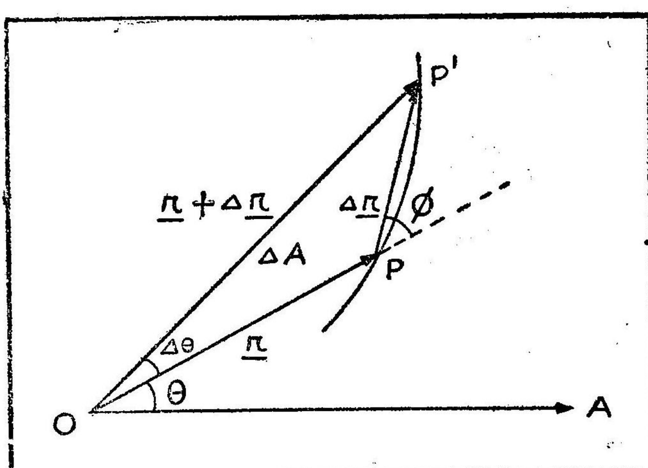
எனவே, $m\,\underline{H_0}$ என்னும் உந்தத்திருப்பத்திசையி ஒரு மாறிலியாகும்.

$\underline{m\,H_0}$ என்னும் திசையி பூச்சியமாகுமெனில், துகள் வரையும் பாதையானது, நிலைப்பள்ளி O வழியே நேராகச் (directly) செல்லும். ஏனெனில், அப்போது $\underline{r}$-ம், $\underline{m\,v}$-ம் இணையாகின்றன.

$\underline{m\,H_0}$ பூச்சியமாகாதெனில், அத்திசைக்குச் செங்குத்தாக அமையும், $\underline{r}$, $\underline{m\,v}$ என்னும் திசையிகளால், வரையறுக்கப்படும் தளத்திலேயே துகளின் பாதை இருக்க வேண்டியதாகிறது.

8·3-2. மைய விசைக்குட்பட்டு இயங்கும் துகளின் ஆரைத் திசையி (radius vector) வரையும் பரப்பளவுத் திசைவேகம் (areal velocity) ஒரு மாறிலியாகும் என் காணுதல்.

t, $t+\Delta t$ என்னும் நேரங்களில் துகள் $\underline{P}$, $\underline{P'}$ என்னுமிடங்களில் இருப்பதாகக் கொள்க. O-வைக்குறித்து, அவற்றின் நிலைகளை $\underline{OP} = \underline{r}$, $\underline{OP'} = \underline{r} + \Delta\underline{r}$ என்னும் நிலைத் திசையிகள் குறிப்பதாகக்கொள்க. படம் (8·3)-ல், $\underline{PP'} = \Delta\underline{r}$ ஆகும்.



படம் 8·3

எனவே, Δt என்னும் மிகச்சிறியநேரத்தில், $\underline{r}$ என்னும் ஆரைத்திசையியில் ஏற்படும் சிறிதான இடப்பெயர்ச்சி $\Delta\underline{r}$ ஆகும். அச்சிறிய நேரத்தில், ஆரைத்திசையி வரைந்த பரப்பளவானது, $\underline{r}$, $\Delta\underline{r}$, $\underline{r}+\Delta\underline{r}$ என்னும் திசையிகள் அமைக்கும்

முக்கோணத்தின் பரப்பளவால் மதிப்பிடப்படும். எனவே. $\triangle A$ என்பது அச்சிறிய பரப்பளவைக் குறிப்பதாகில்,

$$\triangle A = \frac{1}{2}\left| \underline{r} \wedge \triangle \underline{r} \right|$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle A}{\triangle t} = \frac{1}{2}\left| \underline{r} \wedge \frac{\triangle \underline{r}}{\triangle t} \right|$$

$$\underset{\triangle t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\triangle A}{\triangle t} = \frac{1}{2}\left| \underline{r} \wedge \underset{\triangle t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\triangle \underline{r}}{\triangle t} \right|$$

$$\therefore \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left| \underline{r} \wedge \frac{d\underline{r}}{dt} \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| \underline{r} \wedge \underline{v} \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| \underline{H_0} \right| \quad (m\ \underline{H_0} = \text{உந்தத்திருப்பம்} = \text{ஒரு மாறிலி})$$

$$= \frac{1}{2} h_0$$

= ஒரு மாறிலியாகும்.

எனவே, மைய விசைக்குட்பட்டு இயங்கும் துகளுக்கு பரப்பளவு திசைவேகம் ஒரு மாறிலியாகும். மேலும், p என்பது O-விலிருந்து, தொடுகோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்து நீளத்தைக் குறிக்கட்டும். அப்போது,

$$h_0 = \left| \underline{r} \wedge \underline{v_0} \right|$$

$$= r\,v \sin\phi$$

$$= (r \sin\phi)\, v$$

$$= p\,v \quad \text{ஆகும்.}$$

ஆகவே, $h_0 = pv$ = பரப்பளவு திசைவேகத்தின் இருமடங்கு.

= ஒரு மாறிலியாகும்.

பரப்பளவு திசைவேகம் ஒரு மாறிலியாகும் என்பதைக் கீழ்க்காணும் வகையிலும் பெறலாம்.

ஆரைத்திசையிக்குச் செங்குத்துத்திசையில் எவ்விதவிசையும் செயல்படாததால், முடுக்கத்தின் குறுக்குக்கூறு எப்போதும் பூச்சியமாகும்.

எனவே,

$$m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0$$

அதாவது, $\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0$

அதாவது, $r^2 \dot{\theta} =$ ஒரு மாறிலி

$= h_0$ எனக்கொள்க.

$\therefore \quad r^2 \dot{\theta} = h_0$ ஆகும்.

மேலும்,

$$\frac{dA}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\frac{1}{2} r (r + \Delta r) \sin \Delta \theta}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{2} r (r + \Delta r) \frac{\sin \Delta \theta}{\Delta \theta} \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

$$= \frac{1}{2} h_0 \text{ ஆகும்.}$$

தவிரவும், பரப்பளவுத் திசைவேகம்,

$$\frac{dA}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\text{வட்டப்பகுதி } POP'\text{-ன் பரப்பு}}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta POP'}{\Delta t}, \text{ (தோராயமாக)}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\frac{1}{2} PP' \times ON}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{2} p \times \frac{\widehat{PP'}}{\Delta t}, \text{ தோராயமாக)}$$

$$= \left(\underset{\triangle t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\triangle s}{\triangle t} \right) \times \frac{1}{2} p$$

$$= v \times \frac{1}{2} p$$

$$= \frac{1}{2} pv \quad \text{ஆகும்.}$$

8·4. மாதிரிக் கணக்குகள்

m நிறையுடைய துகளொன்றின்மேல், நிலையான O என்னும் புள்ளியை நோக்கியும், O-விலிருந்து அத்துகளுக்குள்ள தொலைவின் நேர்விகிதத்திலும் உள்ள $\underline{F} = -m n^2 \underline{r}$ என்னும் விசை செயற் படுவதாகில், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) அவ்விசை ஒரு காப்புக்களத்தைக் குறிக்கும்.

(ii) துகள் O-விலிருந்து r தொலைவிலுள்ளபோது, அதன் நிலை ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m n^2 r^2$

(iii) $v^2 + n^2 r^2 =$ ஒரு மாறிலி.

இங்கு $\underline{F} = -m n^2 r = -m n^2 (x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k})$

$$\therefore \quad \text{curl}\, \underline{F} = \nabla \wedge \underline{F} = -mn^2 \times \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= -mn^2 \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y) \right\} \underline{i} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(z) \right\} \underline{j} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x) \right\} \underline{k} \right]$$

$$= 0$$

எனவே, $\underline{F} = -mn^2\,\underline{r}$ என்பது ஒரு காப்புவிசையாகும்.

$$\underline{F} \text{ செய்த வேலை} = \int_0^r \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

$$= -mn^2 \int_0^r \underline{r} \cdot d\underline{r}$$

$$= -mn^2 \int_0^r r\,dr$$

$$= -mn^2 \frac{r^2}{2}$$

∴ துகளின் நிலை ஆற்றல் = $-(\underline{F}$ செய்த வேலை)

$$= \frac{1}{2} mn^2r^2.$$

$\underline{F}$ என்பது ஒரு காப்புவிசையாவதால்,

$K \cdot E + P \cdot E =$ ஒரு மாறிலி

அதாவது, $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mn^2r^2 =$ ஒரு மாறிலி $= k$

அதாவது, $v^2 + n^2r^2 = \frac{2k}{m} =$ ஒரு மாறிலியாகும்.

8·5. மைய விசைப் பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

ஒரு தளத்தியங்கும் துகளொன்றின் முடுக்கம் எப்போதும் அத்தளத்திலுள்ள ஒரு நிலையான O என்னும் புள்ளியை நோக்கியுள்ளது. அதன் பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

O-வை முனைப்புள்ளியாகவும் (pole), O-வின் வழியே OX என்னும் ஒரு நிலையான கோட்டை, படம் (8·4)-ல் காட்டியவாறு வரைந்து, அதனைத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொள்க.

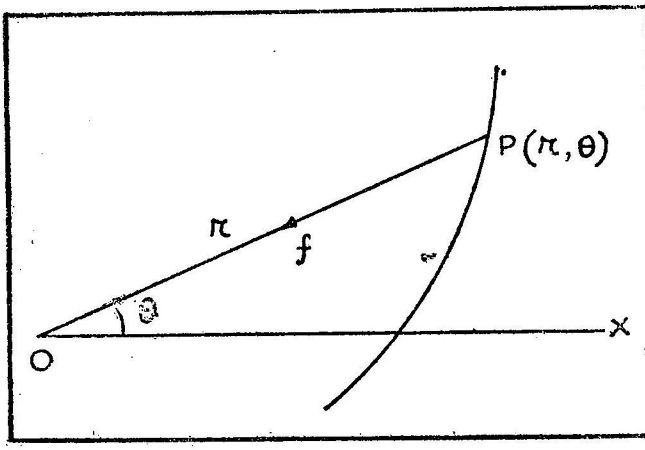
t என்னும் நேரத்தில் துகளின் நிலையை P என்னும் புள்ளி குறிக்கட்டும். அப்புள்ளியின் கோணதூரக்கூறுகள் (r, θ) ஆகுக. துகளின் நிறையை m எனவும், PO திசையில் செயற்படும் முடுக்கத்தை f எனவும் கொள்க.

ஆரைத்திசையில் துகளின் இயக்கச் சமன்பாடு,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mf,$$

அல்லது $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -f$ ... ... (1)

ஆகும்.



படம் 8·4

மேலும், OP-விற்குச் செங்குத்துத்திசையில் விசை ஏதுமில்லாததால்,

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0,$$

அல்லது $r^2\dot{\theta}$ = ஒரு மாறிலி ஆகும்.

இங்கு $r^2\dot{\theta} = h$ எனக்கொள்க. ... ... (2)

$u = \frac{1}{r}$ எனக்கொண்டால்,

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} = hu^2,$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2} \times hu^2\frac{du}{d\theta}$$

$$= -h\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2} \times hu^2$$

$$= -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$ ஆகும்.

எனவே,

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -f \text{ என்னும் சமன்பாடு}$$

$$-h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} h^2 u^4 = -f,$$

அல்லது $$u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{f}{h^2 u^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

என்றாகும்.

இதுவே கோணதூரக் கூறுகளில் மையவிசைப் பாதையின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடாகும்.

குறிப்பு : (i) $p = r \sin\phi$

$$\therefore \quad \frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2}\operatorname{cosec}^2\phi = \frac{1}{r^2}\left\{1 + \cot^2\phi\right\}$$

$$= \frac{1}{r^2}\left\{1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$= u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

$$\therefore \quad -\frac{2}{p^3}\frac{dp}{d\theta} = 2u\frac{du}{d\theta} + 2\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$= 2\frac{du}{d\theta}\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$$

$$= 2\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{f}{h^2u^2} \text{ ஆகும்.}$$

அல்லது $$-\frac{dp}{p^3} = \frac{f}{h^2u^2}\,du$$

$$= \frac{f}{h^2}\, r^2 d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{f}{h^2}\,dr$$

$$\therefore \quad \frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} = f \text{ ஆகும்.}$$

(ii) $v = \dfrac{h}{p}$ என்பதால்,

$$v^2 = \frac{h^2}{p^2} = h^2\left\{u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\} \text{ ஆகும்.}$$

(iii) விசை மையத்திலிருந்து மையப்பாதைக்கு வரையும் ஆரைத்திசையி மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பை அடையும் போது, மையப்பாதையிலுள்ள அப்புள்ளி கவியம் (apse) எனப் படும். எனவே,

$$\frac{dr}{d\theta} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \text{ என்பதால், } p = r \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, ஒருகவியத்தில் துகள் ஆரைத்திசையிக்குச் செங்குத் தாக இயங்கும். கவியத்தையும், தொடக்க முனைப் புள்ளியையும் சேர்க்கும் தொலைவு கவியத்தொலைவாகும்.]

மைய விசைப்பகுதியில் இருவகையான கணக்குகள் உள்ளன. அவையாவன :

(1) பாதையானது தரப்பட்டு, விசைப்பகுதியைக்காணல்

(2) மைய விசையானது தரப்பட்டு, துகள் வரையும் பாதை யைக் காணல்

8·6. மாதிரிக்கணக்குகள்.

8·6-1. d-ஐ விட்டமாகக்கொண்ட வட்டத்தில், O என்பது ஒரு நிலையான புள்ளியாகக்கொண்டால், அவ்வட்டத்தின் சமன் பாடு $r = d\cos\theta$ ஆகும்.

இங்கு $u = \dfrac{\sec\theta}{d}$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\sec\theta\tan\theta}{d}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{\sec\theta\tan^2\theta}{d} + \frac{\sec^3\theta}{d} = \frac{\sec\theta}{d}(2\sec^2\theta - 1)$$

$$\therefore \quad \frac{f}{h^2u^2} = u + \frac{du^2}{d\theta^2} = \frac{\sec\theta}{d} + \frac{2\sec^3\theta}{d} - \frac{\sec\theta}{d}$$

$$= \frac{2}{d}u^3d^3$$

$$\therefore \quad f = 2d^2h^2\cdot u^5 = \frac{2h^2d^2}{r^5} = \frac{r}{r^5} \text{ ஆகும்.}$$

குவியத்தை முனைப்புள்ளியாக (pole) க்கொண்ட கூம்பு வளைவின் கோண தூரச்சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad u = \frac{1 + e\cos\theta}{l}$$

மேலும் $\dfrac{du}{d\theta} = -\dfrac{e\sin\theta}{l}$, $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} = -\dfrac{e\cos\theta}{l}$

$$\therefore \quad \frac{f}{h^2u^2} = u + \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$= \frac{1 + e\cos\theta}{l} - \frac{e\cos\theta}{l} = \frac{1}{l}$$

$$\therefore \quad f = \frac{h^2u^2}{f} = \frac{h^2}{l} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{r}{r^2},\ r = \frac{h^2}{l}$$

எனவே, முனைவிலிருந்து துகளினது தொலைவின் வர்க்கத்தின் எதிர்விகிதத்தில் விசை மாறுகிறது.

8·6-2. t என்னும் நேரத்தில் ஒரு தளத்திலியங்கும் துகளொன்றின் கோண தூரக் கூறுகள் முறையே,

$r = t^3 - 2t^2$, $\theta = t^3 - 4t$ ஆகும். அத்துகளின் எடை 5 கிலோ கிராம் எனவும், அது ஒரு கிடைத்தளத்திலியங்குமெனில், துகளின்மேல் செயற்படும் விசையின் ஆரை, குறுக்குப் பகிர்வுகளை (a) $t = 0$, (b) $t = 1$ விநாடி என்னும் நேரங்களில் காண்க. (r மீட்டரிலும், t விநாடியிலும் அளவிடப்படுவதாகக் கொள்க)

இங்கு $\underline{F_r} = m\,\underline{a_r}$; $\underline{F_\theta} = m\,\underline{a_\theta}$ ஆகும்.

$r = t^3 - 2t^2$	$\theta = t^3 - 4t$
$\therefore\ \dot{r} = 3t^2 - 4t$	$\dot{\theta} = 3t^2 - 4$
$\ddot{r} = 6t - 4$	$\ddot{\theta} = 6t$

$$\therefore \quad \underline{a_r} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\underline{i_r}$$

$$= \{6t - 4 - (t^3 - 2t^2)(3t^2 - 4)^2\}\,\underline{i_r}$$

$$\underline{a_\theta} = (2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\underline{i_\theta}$$

$$= \{2(3t^2 - 4t)(3t^2 - 4) + (t^3 - 2t^2)\,6t\}\,\underline{i_\theta}$$

எனவே,

$$\underline{a_r}\Big|_{t=0} = -4\ \underline{i_r}\ \text{மீ/(வினாடி)}^2 \qquad \therefore \quad \underline{F_r} = m\ \underline{a_r}$$

$$= \frac{5}{9\cdot81}(-4)\ \underline{i_r} = -\frac{20}{9\cdot81}\ \underline{i_r}$$

$$\therefore \quad = -2\cdot038\ \underline{i_r}\ \text{கி.கி. விசை}$$

$$\underline{a_\theta}\Big|_{t=0} = 0 \qquad \underline{F_\theta} = m\ \underline{a_\theta} = \frac{5}{9\cdot81} \times 0 = 0$$

அவ்வாறே,

$$\underline{a_r}\Big|_{t=1} = 3\ \underline{i_r} \qquad \therefore \quad \underline{F_r} = 1\cdot5285\ \underline{i_r}\ \text{கி.கி. விசை}$$

$$\underline{a_\theta}\Big|_{t=1} = -4\ \underline{i_\theta} \qquad \underline{F_\theta} = -2\ 038\ \underline{i_\theta}$$

8·6-3. விசை விதி $\frac{\mu}{r^3}$ எனில், பாதையைக்காண்க.

இங்கு $u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{f}{h^2u^2} = \frac{\mu u^3}{h^2u^2} = \frac{\mu}{h^2}\cdot u$ ஆகும்

எனவே $\left[D^2 - \left(-1 + \frac{\mu}{h^2}\right)\right] u = 0$ என்னும் வகைக்கெழு சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இச்சமன்பாட்டிற்கு மூன்றுவகையான தீர்வுகள் பின்வருமாறு காணலாம்.

வகை 1 : $-1 + \frac{\mu}{h^2} = n^2 > 0$ ஆகுக.

அப்போது, துணைச்சமன்பாடு

$s^2 - n^2 = 0$ ஆகும்

$\therefore \quad s = \pm n$

எனவே, முழுத்தீர்வு $u = Ae^{n\theta} + Be^{-n\theta}$ ஆகும்.

வகை 2 : $\frac{\mu}{h^2} - 1 = n^2 = 0$ ஆகுக.

அப்போது, வகைக்கெழு சமன்பாடு

$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = 0$ ஆகும்.

ஒருமுறை தொகையிட,

$\frac{d u}{d\theta} = A =$ ஒருமாறிலி ஆகும்.

மேலும் மறுமுறை தொகையிட

$$u = A\theta + B \text{ ஆகும்.}$$

வகை 3 : $\frac{\mu}{h^2} - 1 = n^2 < 0$

அப்போது, துணைச்சமன்பாடு,

$$s^2 + n^2 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$s = \pm\, in \text{ ஆகும்.}$$

எனவே முழுத்தீர்வு,

$$u = A \cos n\theta + B \sin n\theta \text{ ஆகும்.}$$

8·7 பயிற்சி

8·7–1. ஒரு துகள் முனைப்புள்ளியைநோக்கி மைய விசைகளின்கீழ் பின்வரும் வளைவரைகளை வரைகின்றது. ஒவ்வொன்றிற்குமுரிய, ஈர்ப்புவிசை விதிகளைக்காண்க.

(i) $r = 2a\cos\theta$ விடை : $f \propto \frac{1}{r^5}$

(ii) $r^2 = a^2 \sec 2\theta$ $f \propto r$

(iii) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ $f \propto \frac{1}{r^7}$

(iv) $r^n = a^n \cos n\theta$ $f \propto \frac{1}{r^{2n+3}}$

(v) $r = a + b\cos\theta$ $f \propto \frac{1}{r^4}$

8·7-2. மையத்தை நோக்கி செயல்படும் $\frac{\mu}{(\text{தொலைவு})^2}$ என்னும் முடுக்கத்தின் கீழ் ஒரு துகள் இயங்குகிறது. அது R தொலைவிலிருந்து V என்னும் வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. எறி கோணம் $\sin^{-1}\left[\frac{\mu}{VR\left(V^2 - \frac{2\mu}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$ எனில், அதன் பாதை ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவாகுமென (rectangular hyperbola) நிறுவுக.

8·8. கோளியக்கம் (Planetary motion)

8·8-1. கெப்ளரின் கோளியக்க விதிகள் (Kepler's laws of planetary motion).

கண்டறிந்த விவரங்களைக் கடுமையாக ஆராய்ந்ததன் பயனால், கோள்களின் இயக்கத்தைப்பற்றிய முடிவுகளை (conclusion) விளக்கிக்கூற, கீழ்க்கண்ட மூன்று விதிகளை நிறுவினர். அவையாவன :

(1) ஞாயிற்றை ஒரு குவியமாகக்கொண்டு, கோள்கள் நீள் வட்டங்களை வரைகின்றன.

(2) ஞாயிற்றிலிருந்து ஒரு கோளுக்கு இணைக்கப்படும் ஆரைத்திசையினால் வரையப்படும் பரப்பளவையின் வீதம் ஒரு மாறிலியாகும்.

அதாவது, ஞாயிற்றிலிருந்து ஒரு கோளுக்கு இணைக்கப்படும் ஆரைத்திசையி, சமகால இடைவெளிகளில் சம பரப்புகளை வரைகிறது.

(3) காலவட்ட நேரத்தின் இரு படிகள், ஞாயிற்றிலிருந்து கோள்கள் இருக்கும் சராசரித் தொலைவுகளின் முப்படிகளுக்கு விகித சமத்தில் உள்ளன.

இவ் விதிகள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு 60 ஆண்டுகள் கழிந்த பின்னர்தான், அவற்றைப் பயன்படுத்தி, நியூட்டன் ஈர்ப்பு விசை விதியைப் (Law of gravitation) பின் வருமாறு தொகுத்துக் கூறினர்.

"இப் பேரண்டத்திலுள்ள ஒவ்வொரு துகளும் மற்ற ஒவ்வொரு துகளையும் ஒரு விசையால ஈர்க்கிறது. இவ் விசை அந்துகள்களின் நிறைப் பெருக்கத்திற்கு நேர் விகிதத்திலும், அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொலைவின் வர்க்கத்திற்கு எதிர் விகிதத்திலும் இருக்கிறது.

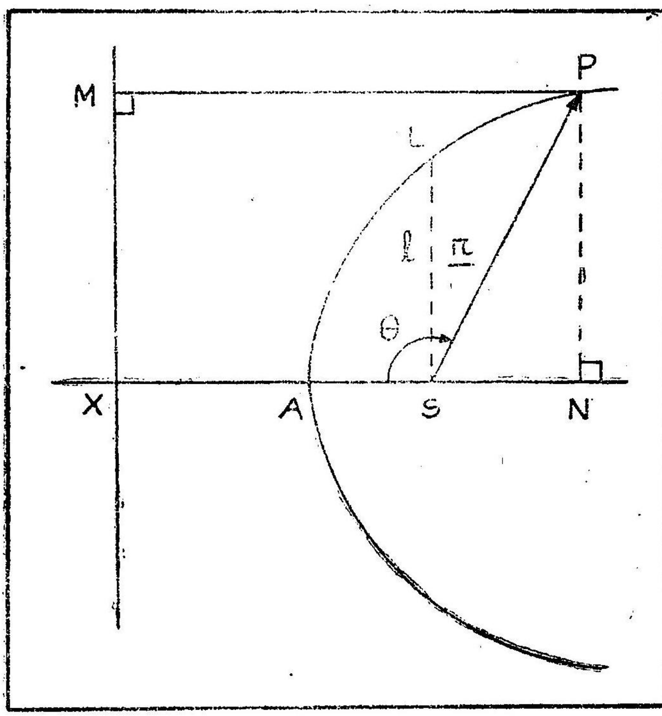
கோண தூரக் கூறுகளில் ஒரு கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு,

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ ஆகும். இங்கு e என்பது மையத் தொலைத் தகவு (eccenticity) எனப்படும். l என்பது அரைச் செவ்வகலம் (semi-latus rectum) ஆகும்.

$e < 1$ என்றால், வளைவானது, நீள் வட்டம் (Ellipse) எனப்படும் ;

$e = 1$ என்றால், வளைவானது, பரவளைவு (Parabola) எனப் படும்;

$e > 1$ என்றால், வளைவானது, அதிபரவளைவு (Hyperbola) எனக் கூறப்படும்.



படம் 8·5

நியூட்டனின் ஈர்ப்பு விசை விதியின் அடிப்படையில், கெப்ளரின் கோளியக்க விதிகளின் உண்மையை நிறுவலாம்.

முதல் விதியை நிறுவுதல்

$\underline{H_0} = \underline{r} \wedge \underline{v}$ என்னும் சமன்பாட்டில்,

$\underline{r} = r\,\underline{i_r}$,

$\underline{v} = \dfrac{d\,\underline{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(r\,\underline{i_r})$

$$= \frac{dr}{dt}\underline{i_r} + r\frac{d\,\underline{i_r}}{dt}$$

$$= \dot{r}\ \underline{i_r} + r\frac{d\,\underline{i_r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$= \dot{r}\ \underline{i_r} + r\,\dot{\theta}\ \underline{i_\theta}$ என்பவைகளைப் பயன்படுத்த,

$$\underline{H_0} = r\,\underline{i_r} \wedge (\dot{r}\ \underline{i_r} + r\,\dot{\theta}\,\underline{i_\theta})$$

$$= r^2\dot{\theta}\,(\underline{i_r} \wedge \underline{i_\theta})$$

$= r^2\dot{\theta}\ \underline{k}$ என்றாகும்.

இதன் எண்ணிப் பகிர்வு,

$h_0 = |\,\underline{H_0}\,| = |\,r^2\dot{\theta}\ \underline{k}\,| = r^2\dot{\theta}$ ஆகும்.

எனவே, பரப்பளவு திசைவேகம்,

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{h_0}{2}$ ஆகும்.

M நிறையுடைய ஞாயிற்றிலிருந்து, r தொலைவிலுள்ளதும், m நிறையுடையதுமான கோளின்மேல் செயற்படும் விசையானது ஈர்ப்பு விசை விதியை ஏற்பதாகக் கொண்டால்,

$\underline{F} = -\frac{G\,Mm}{M^2}\underline{i_n}$ ஆகும்.

எனவே, முடுக்கம்,

$$\underline{a} = \frac{d\,\underline{v}}{dt} = \frac{\underline{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2}\underline{i_r}$$

$$= -\left(\frac{\mu}{r^2}\right)\underline{i_r}, \quad \mu = GM$$

$$\therefore\ h_0\frac{d\underline{v}}{dt} = r^2\dot{\theta} \times -\frac{\mu}{r^2}\ \underline{i_r}$$

$$= -\mu\dot{\theta}\ \underline{i_r}$$

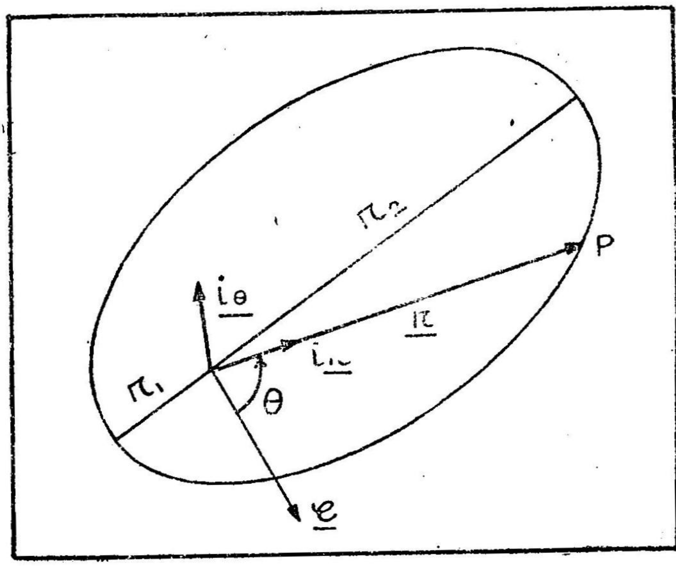
$$= \mu(-\dot{\theta}\ \underline{i_r})$$

$$= \mu\frac{d\,\underline{i_\theta}}{dt}$$

$$\therefore\ \int h_0\frac{d\,\underline{v}}{dt}\,dt = \int \mu\frac{d\,\underline{i_\theta}}{dt}\,dt$$

அதாவது, $h_0\,\underline{v} = \mu\,(\underline{i_\theta} + \underline{e})$ ஆகும்.

இங்கு $\underline{e}$ என்பது துகள் இயங்கும் $(\underline{i_r}, \underline{i_\theta})$ என்னும் தளத்தில் ஒரு மாறிலித் திசையியாகும். [படம் (8 6)-ஐப் பார்க்க)



படம் 8·6

$$\therefore \quad \underline{r} \wedge \underline{v} = \underline{H_0} = r\,\underline{i_r} \wedge \frac{\mu}{h_0}(\underline{i_\theta} + \underline{e})$$

$$= \frac{\mu r}{h_0}\left[\underline{i_r} \wedge (\underline{i_\theta} + \underline{e})\right]$$

$$= \frac{\mu r}{h_0}\left[\underline{i_r} \wedge \underline{i_\theta} + \underline{i_r} \wedge \underline{e}\right]$$

$$= \frac{\mu r}{h_0}\left[\underline{k} + (\underline{i_\theta} \wedge \underline{k}) \wedge \underline{e}\right],$$

$$\left(\therefore \quad \underline{i_r} = \underline{i_\theta} \wedge \underline{k}\right)$$

$$= \frac{\mu r}{h_0}\left[\underline{k} + (\underline{i_\theta} \cdot \underline{e})\,\underline{k} - (\underline{k} \cdot \underline{e})\,\underline{i_\theta}\right]$$

$$= \frac{\mu r}{h_0}\left[\underline{k} - e \sin\theta\,\underline{k}\right],$$

$$\left(\therefore \quad \underline{k} \cdot \underline{e} = 0;\ e = |\underline{e}|\right)$$

$$\therefore \quad h_0 \, \underline{k} = \frac{\mu r}{h_0}(1 - e \sin\theta) \, \underline{k}$$

அதாவது, $$\frac{\left(\frac{h_0}{\mu}\right)}{r} = 1 - e\sin\theta \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

இது e, என்னும் மையத் தொலைத்தகவைப் பெற்றுள்ள ஒரு கூம்பு வளைவின் சமன்பாடாகும்.

கோள்களின் வளைவரைகள் மூடிய பாதைகளாக இருக்கத் தக்கதால், பரவளைவு அதிபரவளைவுப் பாதைகள் தவிர்க்கப்படும். எனவே, மேற்கூறிய சமன்பாடு, ஒரு நீள் வட்டத்தைக்குறிக்கிறது. ஆகவே, கெப்ளரின் முதல் விதியானது, இங்கு ஈர்ப்பு விதியின் அடிப்படையில் தருவிக்கப்பட்டுள்ளது.

இரண்டாவது விதியை நிறுவுதல்

ஒரு துகளானது மையவிசைக்குட்பட்டு இயங்கும்போது, அது தன்பாதையை ஒரு மாறாப் பரப்பளவு திசைவேகத்துடன் வரைகின்றதென முன்பே கூறப்பட்டது. அதாவது, துகளை (அல்லது கோளை) விசை மையத்துடன் (ஞாயிற்றுடன்) இணைக்கும், ஆரைத்திசையி சமநேரங்களில் சமபரப்புக்களை வரைகிறது. இதுவே கெப்ளரின் இரண்டாவது விதியாகும்.

மூன்றாவது விதியைத் தருவித்தல்

துகளொன்று, நீள்வட்டப் பாதையை வரைய எடுத்துக் கொள்ளும் காலவட்ட நேரம் T ஆனது அப்பாதையிலடைபடும் பரப்பளவையை, பரப்புத் திசைவேகத்தால் வகுத்துப் பெறலாம், எனவே,

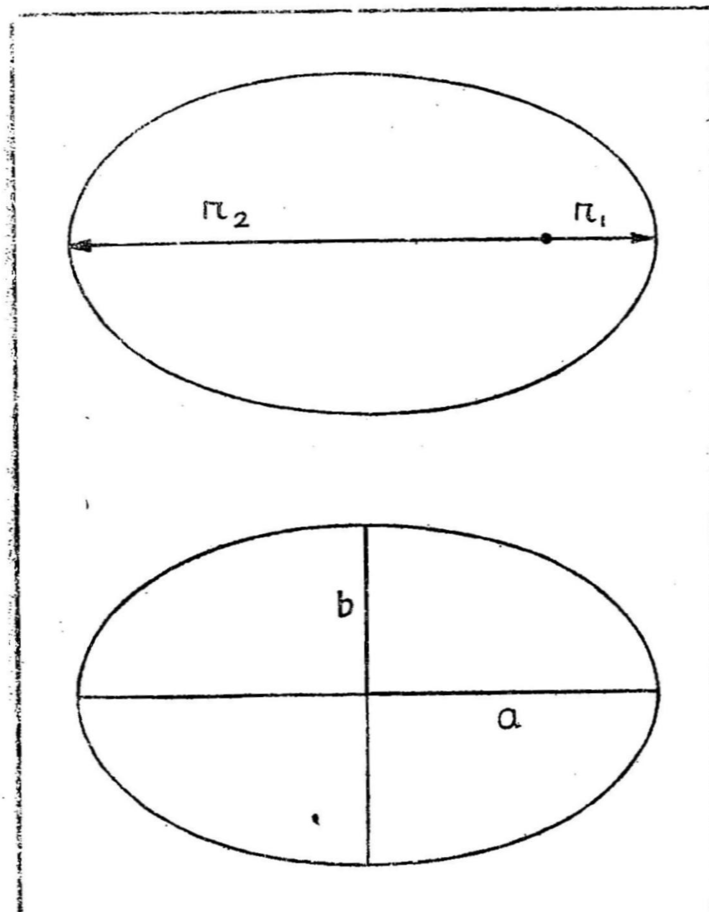
$$T = \text{பாதையின் காலவட்ட நேரம்}$$

$$= \frac{\text{பரப்பளவு}}{\text{பரப்புத் திசைவேகம்}}$$

$$= \frac{\text{பரப்பளவு}}{\frac{1}{2} h_0} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

பாதையை வரையறுக்கும் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, h_0-க்கும், சராசரித் தொலைவுக்கும் (mean distance) உள்ள உறவை வெளிப்படுத்தலாம். பாதையின் சராசரி தொலைவு என்பது படம் (8·7)-ல் காட்டியவாறு, குவியத்திலிருந்து துகள் பெறும், சிறும, பெருமத் தொலைவுகளின் கூட்டுச் சராசரியாகும். இதுவே

நீள்வட்ட பேரச்சின் அரைத் தொலைவாகும். (length of the semi-major axis). இதன் மதிப்பை a எனக் கொள்ளுவது வழக்கம்.



படம் 87

எனவே,

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \quad \text{ஆகும்.}$$

இச் சிறும, பெருமத் தொலைவுகளை, θ-க்கு, முறையே, $-90°$, $+90°$ என்னும் மதிப்புகளை (1)-வது சமன்பாட்டில் எடுத்துப் பெறலாம்.

$$\therefore \quad r_1 = \frac{\left(\frac{h_0^2}{\mu}\right)}{1-e\sin(-90^\circ)} = \frac{\left(\frac{h_0^2}{\mu}\right)}{1+e}$$

$$\therefore \quad r_2 = \frac{\left(\frac{h_0^2}{\mu}\right)}{1-e\sin(90^\circ)} = \frac{\left(\frac{h_0^2}{\mu}\right)}{1-e}$$

அகவே, $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{h_0^2}{\mu}\right)\left\{\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right\}$$

$$= \left(\frac{h_0^2}{\mu}\right)\frac{1}{(1-e^2)}$$

$$\therefore \quad h_0 = \sqrt{a\mu(1-e^2)}$$

மேலும் ஒரு நீள் வட்டத்தின் சிற்றச்சின் அரைத்தொலைவு b-ஆனது,

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும். நீள் வட்டத்தின் பரப்பளவையை, πab எனக் கொண்டு, கால வட்ட நேரத்தைக் கணக்கிடலாம். அப்போது. (2)-வது சமன்பாட்டின்படி,

$$T = \frac{\pi a b}{\frac{h_0}{2}}$$

$$= \frac{2\pi a \cdot a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\, a^{\frac{3}{2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{ஒரு மாறிலி.} \quad \ldots \quad (4)$$

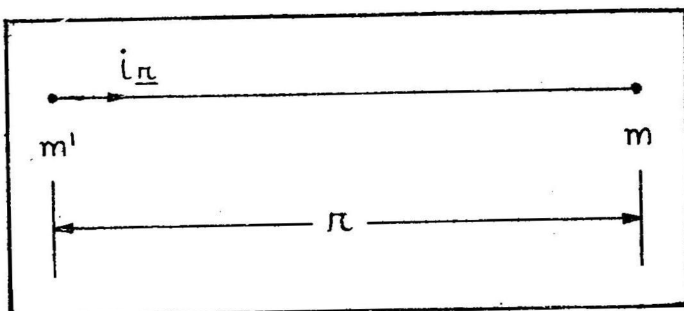
அதாவது, காலவட்ட நேரத்தின் வர்க்கம், நீள் வட்டப் பேரச்சு அரைத்தொலைவின் கனத்திற்கு நேர்விகித சமத்தி லுள்ளது. இதுவே, கெப்ளரின் மூன்றாவது விதியாகும்.

[குறிப்பு : இங்கு ஞாயிற்றின் முடுக்கம் புறக்கணிக்கப்பட்டு, அது ஓய்விலுள்ளதாகக் கொண்டு, கணிப்புகள் மேற்கொள்ளப் பட்டுள்ளன.]

8 8-2. எதிர்வர்க்க விதியைத் தழுவிய விசை ஒன்றால் இயங்கும் துகளின் ஆற்றலைக் காணுதல்.

m, m' என்னும் நிறைகளையுடைய இரு துகள்களுக்கு இடையிலுள்ள தொலைவு r எனில், நியூட்டனின் எதிர்வர்க்க விதிக்குக் கட்டுப்பட்டு துகள்கள் இயங்குவதால், m' நிறையுடைய துகளின் மேல் செயற்படும் ஈர்ப்பு விசையானது,

$$\underline{F'} = + \frac{G\,m\,m'}{r^2}\,\underline{i_r} \text{ ஆகும்.}$$



படம் 8·8

அவ்வாறே, m நிறையுடைய துகளின் மேல் செயற்படும் ஈர்ப்பு விசையானது,

$$\underline{F'} = - \frac{G\,m'\,m}{r^2}\,\underline{i_r} \text{ ஆகும்.}$$

m என்னும் துகளானது, $\underline{F}$ என்னும் விசையால், $\underline{r_1}$ என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கும் புள்ளியிலிருந்து, $\underline{r_2}$ என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கும் புள்ளிக்கு இயங்குவதாகில், $\underline{F}$ செய்த வேலை,

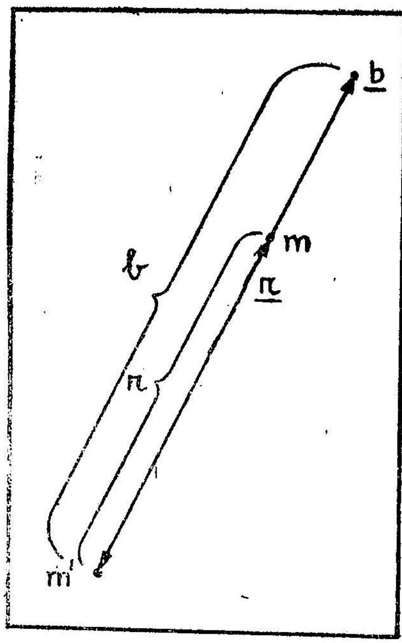
$$\int_{\underline{r_1}}^{\underline{r_2}} \underline{F}\,.\,d\,\underline{r} = - Gmm' \int_{\underline{r_1}}^{\underline{r_2}} \frac{\underline{i_r}\,.\,d\,(r\;\underline{i_r})}{r^2}$$

$$= - Gmm' \int_{\underline{r_1}}^{r_2} \frac{dr + r\,(\underline{i_r}\,.\,d\,\underline{i_r})}{r^2}$$

$$= -Gmm' \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \quad , \qquad (\because \quad \underline{i_r} \,.\, d\underline{i_r} = 0)$$

$$= Gmm' \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \qquad \ldots \qquad (5)$$

m' நிறையுடைய துகள் தொடக்கப் புள்ளியில் நிலையாக இருப்பதாகக் கொண்டால், m நிறையுடைய துகள், $\underline{b}$-ஐ நிலைத்திசை



படம் 8·9

யாக உடைய குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளியிலிருந்து, $\underline{r}$ என்னும் நிலைத் திசையி வரையறுக்கும் புள்ளிக்கு, படம் (8·9)-ல் காட்டியவாறு இயங்கும்போது, m-ன் நிலை ஆற்றல்,

$$(p.e)_b = -Gmm' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \text{ ஆகும்.}$$

$\underline{b}$ என்னும் குறிப்பிட்ட புள்ளி (reference point) எட்டாப் புள்ளியிலமையுமெனில் $(b \to \infty)$,

m-ன் நிலை ஆற்றல்.

$$(p \cdot e) = -\frac{Gmm'}{r}$$

$$= -\frac{\mu m}{r}, \quad (\mu = Gm') \quad \ldots \quad (6)$$

எனக் குறிக்கப்படும்.

இத்தகைய ஈர்ப்பு விசை ஒரு காப்புக் களத்தை (conservative field) வரையறுக்கக்கூடுமாதலால், m என்னும் துகளின் மொத்த ஆற்றல் ஒரு மாறிலியாகும்.

எனவே,

m-ன் மொத்த ஆற்றல் = இயக்க ஆற்றல் + நிலை ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} mv^2 - \frac{\mu m}{r} \quad \ldots \quad (7)$$

= ஒரு மாறிலி.

மொத்த ஆற்றல் பூச்சியமாகுமெனில், அப்போது, அத்துகளின் வேகமானது, அத்துகள் விசைக்களக் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து தப்பி ஓடும் வேகமென (Escape speed)க் கொள்ளப்படும். v_e என்பது தப்பி ஓடும் வேகத்தைக் குறிப்பதாகில்,

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \quad \text{ஆகும்.}$$

மேலும்,

$$h_0 \underline{v} = \mu (\underline{i_\theta} + \underline{e}) \quad \text{என்பதால்,}$$

$$h_0 \underline{v} \cdot h_0 \underline{v} = \mu (\underline{i_\theta} + \underline{e}) \cdot \mu (\underline{i_\theta} + \underline{e})$$

அதாவது,

$$h_0^2 (\underline{v} \cdot \underline{v}) = \mu^2 (1 + 2\, \underline{i_\theta} \cdot \underline{e} + e^2)$$

அதாவது $$v^2 = \frac{\mu^2}{h_0^2} \left\{ 2(1 + \underline{i_\theta} \cdot \underline{e}) + (e^2 - 1) \right\}$$

$$= \frac{\mu^2}{h_0^2} \{ 2(1 - e \sin\theta) + e^2 - 1 \} \quad \text{ஆகும்}$$

அதாவது $$v^2 = \frac{\mu^2}{h_0^2} \{ 2(1 - e \sin\theta) + (e^2 - 1) \} \quad \ldots \quad (8)$$

ஆனால் துகளியங்கும் பாதையின் சமன்பாடு

$$r = \frac{\left(\frac{h_0^2}{\mu}\right)}{1 - e\sin\theta}$$ என்பதால்,

துகளின் திசைவேகம்,

$$v^2 = \frac{\mu^2}{h_0^2}\left\{\frac{2\,h_0^2}{\mu\,r} + e^2 - 1\right\}$$

$$= \frac{2\,\mu}{r} + \left(\frac{\mu}{h_0}\right)^2 (e^2 - 1),$$

அதாவது,

$$v^2 = v^2 + \left(\frac{\mu}{h_0}\right)^2 (e^2 - 1)$$ ஆகும்.

மேலும்,

$$(t \cdot e) = \text{துகளின் மொத்த ஆற்றல்}$$

$$= \frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{\mu\,m}{r}$$

$$= \frac{1}{2}\,m\left[\frac{2\,\mu}{r} + \left(\frac{\mu^2}{h_0}\right)(e^2 - 1)\right] - \frac{\mu\,m}{r}$$

$$= \frac{1}{2}\,m\,\frac{\mu^2}{h_0^2}\,(e^2 - 1) \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9)$$

இதனைப் பயன்படுத்தியும், பின் வரும் முடிவுகளைப் பெறலாம்.

(i) $v > v_e$ எனில், $(t \,.\, e) > 0$, $e > 1$ ஆகும்.
அப்போது, துகள் இயங்கும் பாதை ஓர் அதிபரவளை வாகும்.

(ii) $v = v_e$ எனில், $(t \cdot e) = 0$, $e = 1$ ஆகும்.
அப்போது, துகள் இயங்கும் பாதை ஒரு பரவளைவாகும்.

(iii) $v < v_e$ எனில், $(t \cdot e) < 0$, $e < 1$ ஆகும்.
அப்போது, துகள் இயங்கும் பாதை ஒரு நீள்வட்டமாகும்.

எனவே, எதிர்வர்க்க விதிக்குட்பட்டு, ஒரு துகள் விசை மையத்திலிருந்து, r தொலைவில், v என்னும் வேகத்துடன் எத் திசையிலெறியப்பட்டாலும், அத் துகளின் பாதை,

$$v^2 \lesseqgtr v_e^2 = \frac{2\mu}{r} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (10)$$

என்பதற்கேற்ப, ஒரு நீள் வட்டம், ஒரு பரவளைவு அல்லது ஓர் அதிபரவளைவாகும்.

8·8-3. **நீள் வட்டப்பாதையை வரையும் துக்ளின் ஆற்றல்**

$$\text{துகளின் மொத்த ஆற்றல்} = \frac{1}{2}\ m\ \frac{\mu^2}{h_0^{\ 2}}\ (e^2-1)$$

ஆனால்,
$$h_0 = \sqrt{a\mu\,(1-e^2)}$$

எனவே,

நீள்வட்டப்பாதையிலியங்கும் துகளின் மொத்த ஆற்றல்

$$= -\frac{m\ .\ \mu^2\ .\ (1-e^2)}{2\ .\ a\mu\ (1-e^2)}$$

$$= -\frac{\mu m}{2a} \qquad \ldots \qquad (11)$$

ஆகும்.

இங்கு $2a$ என்பது, நீள் வட்டப்பாதையின் நெட்டச்சுத் தொலைவைக் (length of the major axis) குறிப்பதால். துகளின் ஆற்றல் நெட்டச்சுத் தொலைவை மட்டுமே சார்ந்துள்ளதாகிறது.

ஆகவே, எதிர்வர்க்க விதியைத் தழுவி, துகளொன்றில் செயற்படும் விசையானது, அத் துகளை ஒரு நீள் வட்டப் பாதையிலியங்கிடச் செய்யுமாயின், துகளின் மொத்த ஆற்றல் அப் பாதையின் நெட்டச்சு நீளத்தை மட்டுமே சார்ந்துள்ளதாகும்.

8·8-4. **நீள் வட்டப் பாதையின் கால வட்ட நேரம்**

நீள் வட்டத்தின் பரப்பு $= \pi ab$

பரப்புத் திசை வேகம் $= \dfrac{h_0}{2}$ = ஒரு மாறிலி.

எனவே, பாதையை வரைய எடுக்கும் நேரம்,

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{h_0}{2}}$$

$$= \frac{2\pi ab}{h_0}$$

$$= \frac{2\pi a\ .\ a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a\mu\,(1-e^2)}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\ a^{\frac{3}{2}} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (12)$$

ஆகும்.

புவியை ஒரு கோளமாகக் கொண்டு, எதிர்வர்க்க விதியைத் தழுவி துகள் வரையும் வீசுபாதைகளின் ஒரு சில சிறப்புப் பண்புகளையும் கீழ்வருமாறு கண்டிடலாம்.

8·8–5 புவியீர்ப்பு முடுக்கம்

$\bar{g}$ என்பது புவியின் மேற்பரப்பிலமையும் துகளொன்றின் முடுக்கத்தையும், $\bar{r}$ என்பது புவியின் ஆரையையும் குறிக்கட்டும். புவிமையத்திலிருந்து r தொலைவிலுள்ள துகளின் முடுக்கத்தை g எனக் கொள்க. m m' என்பவை துகள், புவி ஆகியவற்றின் நிறைகளை அறிவிக்கட்டும்.

எனவே, புவிமையத்திலிருந்து, துகளின் தொலைவுக்கு ஏற்ற வாறு, அதன்மேல் செயற்படும் விசையை இரு வழிகளில் காணலாம்.

$$\bar{F} = m\bar{g} = \frac{Gmm'}{\bar{r}^2},$$

$$F = mg = \frac{Gmm'}{r^2}$$

$$\therefore \quad \bar{g}\,\bar{r}^2 = g\,r^2 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

அல்லது $$g = \bar{g}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^2$$

மேலும், $$\bar{g}\,\bar{r}^2 = Gm' \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \underline{F} = \frac{Gm'm}{r^2}\,\underline{i_r}$$

$$= \bar{g}\,.\,\bar{r}^2\,.\,\frac{m}{r^2}\,\underline{i_r}$$

$$= (m\bar{g})\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^2\,\underline{i_r} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (3)$$

துகளின் நிலை ஆற்றலானது,

$$(p\,.\,e) = -\,\frac{Gm'm}{r}$$

$$= -\,\frac{\bar{g}\,\bar{r}^2\,m}{r}$$

$$= -\,\frac{m\,\bar{g}\,\bar{r}^2}{r} \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (4)$$

என்றாகும்.

(3), (4)—என்னும் சமன்பாடுகள், புவிக்கு அருகாமையில், எதிர் வர்க்க விசையையும், நிலை ஆற்றலையும் அறிவிக்கின்றன.

8·8-6. துணை கோளின் வட்டப் பாதை இயக்கம்

r ஆரையுள்ள வட்டப்பாதையில், புவியீர்ப்பு விசைக்கு மட்டுமே கட்டுப்பட்டு இயங்கும் துகளின் இயக்கச் சமன்பாடு எளிதான அமைப்பைப் பெறும். இங்கு mg என்பது மைய விசை யாகவும், துகளின் முடுக்கம், அது இயங்கும் பாதைக்குச் செங் குத்துத் திசையிலும் அமையும்.

வட்டப்பாதையிலியங்கும் துகளின் வேகத்தை v_0 எனக் குறித்தால், $\frac{v_0^2}{r}$ என்பது மையத்தை நோக்கிச் செயல்படும் துகளின் முடுக்கத்தை அறிவிக்கும்.

எனவே,

$$mg = m\frac{v_0^2}{r},$$

அல்லது, $v_0^2 = gr$ ஆகும்.

$$= \bar{g}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^2 r$$

$$= \bar{g}\,\bar{r}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)$$

$$= \underline{v_0}^2\left(\frac{\bar{r}}{r}\right) \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு $\underline{v_0}$ என்பது புவியின் மேற்பரப்பிற்கு அருகாமையில், வட்டப்பாதையிலியங்கும் துகளின் மிதந்து செல்லும் வேகத்தைக் (Skimming speed) குறிக்கிறது.

மேலும்,

$$w = \frac{v_0}{r}$$

$$= \bar{v}_0\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{r}$$

$$= \bar{w}\,\bar{r}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{r}$$

$$= \bar{w}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ ஆகும்.}$$

தப்பி ஓடும் வேகம் (Escape speed)

புவியீர்ப்புவிசை ஒன்றுக்கு மட்டுமே கட்டுப்பட்டு இயங்கும் எறிபொருள், புவிமையத்திலிருந்து r_1 தொலைவிலுள்ளபோது, v_1 என்னும் வேகத்தையும், r_2 தொலைவிலுள்ளபோது, v_2 என்னும் வேகத்தையும் பெற்றிருக்குமெனில்,

ஆற்றல் காப்புத் தத்துவத்தின்படி,

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{m \overline{g}\, \overline{r}^2}{r_1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{m \overline{g}\, \overline{r}^2}{r_2}$$ ஆகும்.

$r_2 \to \infty$ என்றாகும்போது, $v_2 \to 0$ ஆகும். அப்போது, எறிபொருள் புவியீர்ப்பு விசையிலிருந்து விடுவிக்கப்பட்டு இயங்குவதாகக் கொள்ளப்படும். எனவே, புவிமையத்திலிருந்து, r தொலைவில் வட்டப்பாதையிலியங்கும் துகள், புவியீர்ப்பிலிருந்து தப்பி ஓடுவதற்குரிய v_e என்னும் வேகம்,

$$\frac{v_e^2}{2} - \frac{\overline{g}\, \overline{r}^2}{r} = 0,$$

அல்லது $v_e^2 = \dfrac{2 \overline{g}\, \overline{r}^2}{r} = 2 v_0^2$ என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

எனவே, புவிக்கு அருகாமையில் குறிப்பிட்ட ஓர் இடத்திலுள்ள துகள் தப்பி ஓடுவதற்கான இயக்க ஆற்றல் அத்துகள் ஓர் வட்டப்பாதையிலியங்குவதற்கான இயக்க ஆற்றலின் இருமடங்காகும்.

மேலும், புவி மையத்திலிருந்து, r தொலைவிலுள்ள துகளின் நிலை ஆற்றல்,

$$(p \cdot e)_r = -\frac{1}{2} m v_e^2$$ ஆகும்.

8·8-7. வட்டப்பாதையிலியங்கும் துணைகோள் ஒன்றிற்கு, காற்று முதலிய உராய்வினால் ஏற்படும் விளைவு:

துணைகோள் வரையும் வட்டப்பாதைக்கு ஏற்றதான மொத்த ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_e^2$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m \cdot 2 v_0^2$$

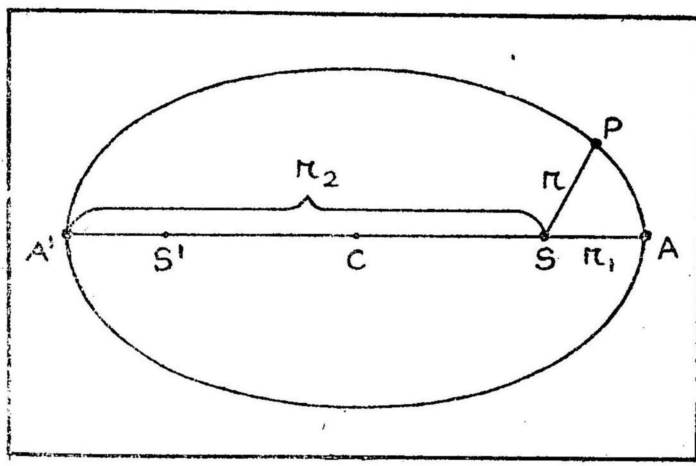
$$= -\frac{1}{2} m v_0^2$$

$$= -\frac{m \overline{g}\, \overline{r}^2}{2r}$$

எனவே, துணைகோளின் ஆற்றல், காற்று முதலிய உராய்வினால் அழிக்கப்படும்போது, அதுவரையும் வட்டத்தின் ஆரை குறையவேண்டிய நிலைமை ஏற்படும்.

8·8-8. துணைகோள் இயங்கும் பாதையைக் காணுதல்.

r_1, r_2 என்பவை ஞாயிற்றின் அண்மைநிலை (Perigee point), சேய்மைநிலை (Apogee point) யிலமையும் துணைகோளின் ஆரைத்



படம் 8·10

தொலைவுகளையும், a என்பது நீள்வட்டப்பாதையின் நெட்டச்சின் ஆரைத் தொலைவையும் குறிப்பதாகில், படம் (8·10)-ல் காட்டியவாறு,

$$r_1 = a(1-e)$$

$$r_2 = a(1+e)$$ ஆகும். எனவே,

$$\frac{1-e}{1+e} = \frac{r_1}{r_2},$$

அல்லது $e = \dfrac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$ ஆகும்.

அந்நிலைகளில் துணைகோளின் வேகங்கள் முறையே, v_1, v_2 எனில்,

$$r_1 v_1 = r_2 v_2$$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1+e}{1-e}$$ ஆகும்.

புவிக்கு வெளியே, m நிறையுடைய துணை கோள் ஒன்று, புவிமையத்திலிருந்து, r ஆரைத் தொலைவிலமைந்து, ஒரு வட்டப் பாதையிலியங்கும்போது,

$v_0 =$ வட்டப்பாதைக்குரிய வேகம் $= \sqrt{gr}$,

$v_e =$ தப்பி ஓடும் வேகம் $= \sqrt{2v_0^2} = \sqrt{2}\, v_0 = \sqrt{2gr}$,

நிலை ஆற்றல் $= -\frac{1}{2} m v_e^2 = -\frac{1}{2} m \times 2v_0^2 = -mv^2$,

என்பவை முன்னரே வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

$(v_0)_1$, $(v_0)_2$ என்பவை துணைகோள், ஞாயிற்றின் அண்மை, சேய்மை நிலைப்புள்ளிகளில் வட்டப்பாதைகளிலியங்குவதற்கான வேகங்களைக் குறிக்குமெனில், ஆற்றல் காப்பு விதியின்படி,

$$v_1^2 - 2(v_0)_1^2 = v_2^2 - 2(v_0)_2^2 \text{ ஆகும்.}$$

மேலும், வட்டப்பாதையிலியங்கும் துணைகோளின் வேகத்தை,

$v_0^2 = \overline{v_0}^2 \frac{\overline{r}}{r}$ என்னும் சமன்பாடு வரையறுப்பதால்,

$$\frac{(v_0)_1^2}{(v^0)_2^2} = \frac{\overline{v_0}^2 \frac{\overline{r}}{r_1}}{\overline{v_0}^2 \frac{\overline{r}}{r_2}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1+e}{1-e} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad v_1^2 - 2(v_0)_1^2 = v_2^2 - 2(v_0)_2^2$$
$$= v_1^2\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 - 2(v_0)_1^2\left(\frac{1-e}{1+e}\right)$$

ஆகும்.

அதாவது,

$$v_1^2\left[1 - \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2\right] = 2(v_0)_1^2\left[1 - \frac{1-e}{1+e}\right],$$

அதாவது,

$$v_1^2\left[\frac{4e}{(1+e)^2}\right] = 2(v_0)_1^2\left[\frac{2e}{1+e}\right]$$

அதாவது $\quad v_1^2 = (1+e)(v_0)_1^2$ ஆகும்.

அவ்வாறே, $\quad v_2^2 = (1-e)(v_0)_2^2$ ஆகும்.

புவிமையத்திலிருந்து r தொலைவிலுள்ள எறி பொருள் ஒன்று. ஆரைத்திசையி-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் v என்னும் திசை வேகத்துடன் இயங்குவதாகக் கொள்க. அவ்வெறிபொருளின் இயக்க ஆற்றல்

$$u_0 = \frac{1}{2} mv^2 \text{ ஆகும்.}$$

(i) $u_0 = \frac{1}{2} mv_0^2$ என்றிருக்குமெனில்,

$$v^2 = v_0^2, \text{ அல்லது } v = v_0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, எறிபொருள், r ஆரையுள்ள ஒரு வட்டப்பாதையி லியங்கும்.

(ii) அப் பொருளின் இயக்க ஆற்றல் $2u_0$ என்றிருக்குமெனில்

$$\frac{1}{2} mv^2 = 2u_0 = mv_0^2$$

$$\therefore \quad v^2 = 2v_0^2 = v_e^2$$

$\therefore \quad v = v_e$ ஆகும். அதாவது, எறிபொருள் ஒரு பரவளைவுப் பாதையிலியங்கும்.

(iii) அப்பொருளின் இயக்க ஆற்றல், $2u_0$-க்கு மேலான மதிப்பைப் பெறுமெனில்,

$$\frac{1}{2} mv^2 > 2u_0 = 2 \cdot \frac{1}{2} mv_0^2 = mv_0^2$$

$$\therefore \quad v^2 > 2v_0^2 = v_e^2$$

$$\therefore \quad v > v_e \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, எறிபொருள் ஓர் அதிபரவளைவுப்பாதையிலியங்கும்.

(iv) அப்பொருளின் இயக்க ஆற்றலானது, u^2, $2u_0$-களுக்கு இடையிலுள்ள மதிப்புக்களைப் பெறுவதாகில்.

$$u_0 < \frac{1}{2} mv^2 < 2u_0 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot mv_0^2,$$

அதாவது, $v_0^2 < v^2 < 2v_0^2 = v_e^2$,

அதாவது, $v_0 < v < v_e$ ஆகும்.

எனவே, பொருளானது ஒரு நீள்வட்டப்பாதையிலியங்கும். அந் நீள்வட்டத்திற்குரிய மையத்தொலைத்தகவு (eccentricity)

$$= \left(\frac{k \cdot e}{u_0}\right) - 1 \text{ ஆகும்.}$$

(v) $\frac{1}{2} mv^2 < u_0$ எனில், பொருளானது (துணைகோளானது) இங்கும் ஒரு நீள்வட்டத்தியங்கும். ஆனால் துணை கோள் ஞாயிற்றின் அண்மை நிலையிலிருந்து எறியப்படுவதற்குப் பதிலாக, சேய்மை நிலையிலிருந்து எறியப்படும். அப்போது

$$e = 1 - \left(\frac{k \cdot e}{u_0} \right)$$ ஆகும்.

8.8-9. கோளினத்திற்கான இயக்க ஆற்றலின் மற்றொரு பண்பு.

ஒரு தளத்தியங்கும் துகளொன்றின் திசைவேகத்தை, ஆரை, குறுக்குக்கூறுகளாகப் பிரித்தால்,

$$\underline{v} = \dot{r}\ \underline{i_r} + r\dot{\theta}\ \underline{i_\theta}$$ ஆகும்.

$$\therefore\ (\underline{v} \cdot \underline{v}) = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

எனவே, துகளின் இயக்க ஆற்றல்,

$$k \cdot e = \frac{1}{2} m (\underline{v} \cdot \underline{v})$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$ ஆகும்.

$(k \cdot e)_r$, $(k \cdot e)_t$ என்பவை இயக்க ஆற்றலின் ஆரைப் பகிர்வையும், குறுக்குப்பகிர்வையும் குறிக்குமெனில்,

$$(k \cdot e)_r = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 ; \quad (k \cdot e)_t = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 .$$

J நேர இடைவெளியில் இயக்க ஆற்றல் மதிப்புக்களின் சராசரி இயக்க ஆற்றல்,

$$\overline{(k \cdot e)} = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{1}{2} mv^2\, dt$$ —என்னும் சமன்பாட்டால்

வரையறுக்கப்படும்.

$r^2 \dot{\theta} = h_0 =$ ஒரு மாறிலியாவதால்,

$$dt = \frac{r^2}{h_0} d\theta$$ என்றாகும்.

மேலும், $r = \dfrac{\left(\dfrac{h_0^2}{\mu}\right)}{1 - e\sin\theta}$ எனக்கொண்டால்

$$dt = \frac{h_0^4}{\mu^2} \cdot \frac{1}{h_0} \cdot \frac{1}{(1 - e\sin\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \frac{h_0^3}{\mu^2} \cdot \frac{d\theta}{(1 - e\sin\theta)^2}$$

தவிரவும்,

$$v^2 = \frac{\mu^2}{h_0^2}(1 - 2e\sin\theta + e^2) \text{ என்பதால்,}$$

$$\overline{(k \cdot e)} = \frac{h_0 m}{2t} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - 2e\sin\theta + e^2)}{(1 - e\sin\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \frac{h_0 m}{2t} \int_0^{2\pi} \left\{1 + \frac{e^2\cos^2\theta}{(1 - e\sin\theta)^2}\right\} d\theta$$

$$= \frac{h_0 m}{2t} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 - e\sin\theta}$$

$$= \frac{h_0 m}{t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - e\sin\theta)}$$

$$= \frac{2 h_0 m}{t} \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(z-e)^2 + (1-e^2)}, \quad \left[z = \tan\frac{\theta}{2} \right.$$

$$d\theta = \frac{2dz}{1 + z^2}$$

$$\left. \sin\theta = \frac{2z}{1 + z^2} \right]$$

$$= \frac{2h_0 m}{J} \left[\tan^{-1} \frac{z - e}{\sqrt{1 - e^2}} \right]_{-1}^{+1}$$

$$= \frac{2h_0 m}{J\sqrt{1 - e^2}} \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \right]$$

$$= \frac{2h_0 m}{t\sqrt{1 - e^2}} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi h_0 m}{t\sqrt{1 - e^2}}$$

$$= \frac{\pi h_0 ma}{tb} \qquad (\therefore\ b = a\sqrt{1 - e^2})$$

9. துகள்களின் தொகுதிக்குரிய விசையியல்

(Kinematics of a system of particles)

9-1. முன்னுரை

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட துகள்கள், ஒன்றை ஒன்று தொட்டுக் கொண்டிருப்பதாகில் அவற்றின் இயக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சார்புள்ளவையாகும். அவ்வித இயக்கங்களை அறிவதற்கு, ஒவ்வொரு துகளையும் தனிப்படுத்தி, அத்தகைய துகள்கள் ஒவ்வொன்றின் இயக்கத்திற்கு ஏற்றதான.

$$\underline{F} = m\,\underline{a}$$

என்னும் சமன்பாட்டை வரையறுக்க வேண்டி வரும்.

எனினும், வெவ்வேறு துகள்களின் முடுக்கங்கள் கணக்கியலாக, ஒருசில வரையுற்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு (definine constraints) இணக்கமளிக்கக் கூடியவகையில் இருக்கக்கூடும். எடுத்துக்காட்டாக, ஏதேனும் இரு துகள்களைச் சேர்க்கும் ஒரு மெல்லிய இழையின் நீளம் மாறாமலிருப்பது, துகள்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் உரிய சமன்பாடுகளைத் தொடர்புபடுத்தி, தீர்வு காண்பதற்கு இணக்கமாயுள்ளது.

நிலையியலில், பொருள்கள், அவற்றின் நிறைகளைப் பெற்ற துகள்களாகவோ அல்லது கட்டிறுக்கப் பொருள்களாகவோ கருதப்பட்டன. இயக்க இயலிலும் அத்தகைய கருத்துக்கள் பயன்படுத்தப்படும்.

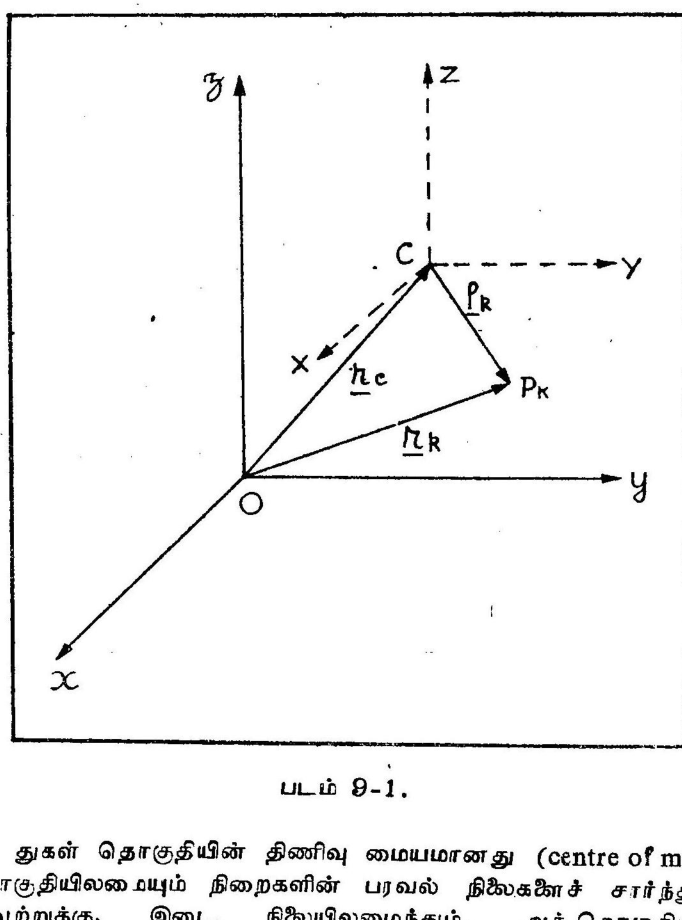
முந்தைய அத்தியாயங்களில், துகள் ஒன்றின் இயங்கும் பாதை கொடுக்கப்பட்டபோது, அதன்மேல் செயல்படும் விசைகளைப் பற்றிய விவரங்கள் தெரிந்துள்ள போது, துகளின் இயங்கு வரையைக் காண்பதிலும், கருத்துக்கள் விளக்கப்பட்டன.

இங்கு துகள்களின் தொகுதிக்குரிய இயக்க இயல் விவரிக்கப்படும்.

9-2 திணிவு மையத்தின் இயக்கம் (Motion of Centre of Mass)

படம் (9-1.)-ல் காட்டியுள்ளவாறு $m_1, m_2, \ldots m_k \ldots m_n$ என்னும் நிறைகளைப் பெற்ற n துகள்கள் இயங்குவதாகக் கொள்க. m_k நிறையயைப் பெற்ற k ஆவது துகளின் இயக்கத்தை ஆராய்ந்து, துகட்டொகுதியின் இயக்கத்தை வரையறுக்கலாம்.

t என்னும் நேரத்தில், m_k நிறையைப் பெற்ற, k ஆவது துகளின் நிலையை, பரந்த வெளியில். (x, y, z) என்னும் நிலையான குறிப்பிட்டச்சு அமைப்பில் $\underline{r}_k$, $k = 1, 2, \ldots n$ என்னும் நிலைத் திசையி (position vector) வரையப்படும்.



படம் 9-1.

துகள் தொகுதியின் திணிவு மையமானது (centre of mass) தொகுதியிலமையும் நிறைகளின் பரவல் நிலைகளைச் சார்ந்தும், அவற்றுக்கு, இடை நிலையிலமைந்தும், அத் தொகுதியின்

பண்புகளை ஈடு செய்யக் கூடியதுமான, கற்பனைப் புள்ளியாகும். c என்னுமிடத்தில் அத்துகட்டொகுதியின் திணிவு மையம் இருப்பதாகில்.
அதன் நிலைத்திசையி $\underline{r_c}$ ஆனது,

$$\underline{r_c} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \underline{r_k}}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும். நிறைகளின் கூடுதல்

$$\underline{M_c} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} m_k \underline{r_k} \quad \text{ஆகும்.}$$

இச்சமன்பாட்டின்படி, எண்ணிப்பகிர்வுகளை கீழ்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ என்பவை C என்றும் திணிவு மையத்தின் அச்சுத்தொலைவுகளையும், (x_k, y_k, z_k), $k = 1, 2, \ldots n$ என்பது m_k என்னும் நிறையைப்பெற்ற துகள் நிலையின் (P_k-யின்) அச்சுத் தொலைவுகளையும் குறிக்குமெனில்,

$$\bar{x}\,\underline{i} + \bar{y}\,\underline{j} + \bar{z}\,\underline{k} = \frac{\sum m_k (x_k \underline{i} + y_k \underline{j} + z_k \underline{k})}{\sum m_k}$$

$$= \left[\frac{\sum_{K=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{K=1}^{n} m_k}\right] \underline{i} + \left[\frac{\sum_{K=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{K=1}^{n} m_k}\right] \underline{j} + \left[\frac{\sum_{K=1}^{n} m_k z_k}{\sum_{K=1}^{n} m_k}\right] \underline{k}$$

ஆகும். எனவே

$$\bar{x} = \frac{\sum_{K=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{K=1}^{n} m_k}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{K=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{K=1}^{n} m_k}; \quad \bar{z} = \frac{\sum_{K=1}^{n} m_k z_k}{\sum_{K=1}^{n} m_k}$$

என்னும் சமன்பாடுகளும் துகட்டொகுதி திணிவு மையத்தின் இருப்பிடத்தை வரையறுக்கின்றன.

9-3. திணிவு மையத்தின் இடத்தைக் காணுதல் (Location of the mass centre)

m_1, m_2 என்னும் நிறைகளைப் பெற்ற துகள்களினிருப்பிடத்தை $\underline{r}_1$ $\underline{r}_2$ என்னும் நிலைத் திசையிகள் வரையறுப்பதாகில், அத்துகள்களுக்குரிய திணிவு மையத்தின் இருப்பிடத்தை

$$(\underline{r}_c)_2 = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}$$

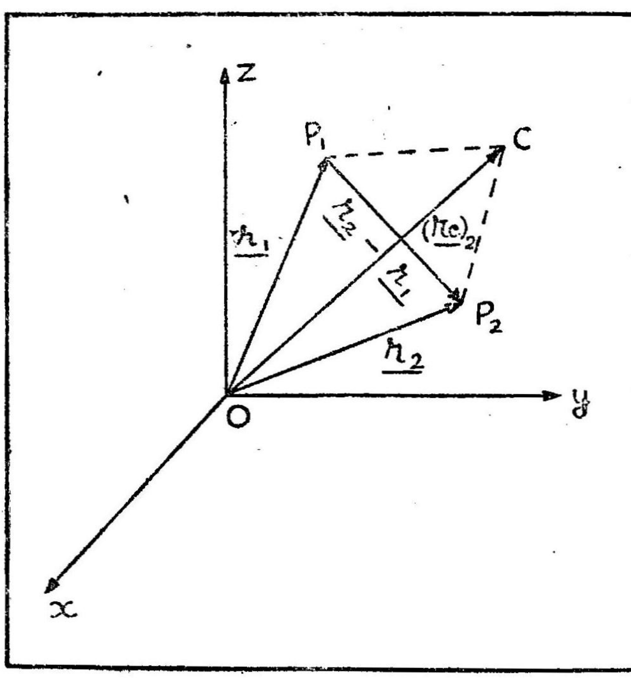
என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கிறது.

இச் சமன்பாட்டை

$$(\underline{r}_c)_2 = \underline{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)$$

$$= \underline{r}_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

எனவும் மாற்றியமைக்கலாம்.



படம் 9·2

படம் (9-2.)-ல் திசையி முக்கோண விதிப்படி,

$$\underline{P_1C} = (\underline{r_c})_2 - \underline{r_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\underline{r_2} - \underline{r_1});$$

$$\underline{CP_2} = \underline{r_2} - (\underline{r_c})_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\underline{r_2} - \underline{r_1})$$

என்னும் திசையிகள், $\underline{P_1P_2} = (\underline{r_2} - \underline{r_1})$ என்னும் திசையிக்கு இணையாக உள்ளதால், C என்னும் புள்ளி P_1P_2 என்னும் நேர் கோட்டிலமைந்து, அதை $\frac{P_1C}{CP_2} = \frac{m_2}{m_1}$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியாகவுமுள்ளது.

எனவே, இரு துகள்களின் திணிவு மையம், அத்துகள்களைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் மேலும், அக்கோட்டை, நிறைகளின் எதிர் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியாகவும் இருப்பது புலனாகும்.

இவ்வழியைப் பின்பற்றி, இரண்டிற்கு மேலுள்ள துகட்டொகுதியின் திணிவு மையத்தின் இருப்பிடத்தையும் காணலாம்.

முதலில், $m_1, m_2 \dots m_{n-1}$ என்னும் நிறைகளைப் பெற்ற $(n-1)$ துகள்களின் திணிவு மையத்தை வரையறுத்து, அப்புள்ளியில் $(m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1})$ நிறையுடைய துகள் ஒன்றுள்ளதாகக் கொள்க. இப் புள்ளிக்கும், m_n நிறையைப் பெற்ற m ஆவது துகள் அமையும் புள்ளிக்கும் உரிய திணிவு மையமே, துகள்களுக்கு உரிய திணிவு மையத்தை வரையறுக்கும்.

$$(\underline{r_c})_{n-1} = \frac{m_1\underline{r_1} + m_2\underline{r_2} + \dots + m_{n-1}\underline{r_{n-1}}}{m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}}$$

எனக் கொண்டால், n துகள்களின் திணிவு மையத்தை,

$$(\underline{r_c})_n = (\underline{r_c})_{n-1} + \frac{m_n}{\Sigma m_k}\left[\underline{r_n} - (\underline{r_c})_{n-1}\right]$$

என்னும் சமன்பாடு வரையறுக்கிறது.

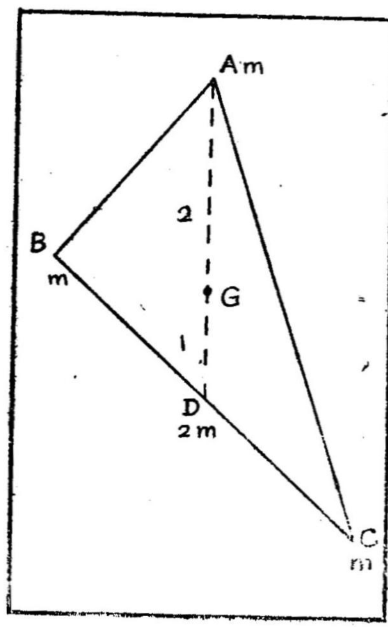
எடுத்துக்காட்டாக, சமமான m என்னும் நிறையுடைய மூன்று துகள்கள் A, B, C என்னும் இடங்களில், படம் (9·3)-ல் காட்டியவாறு இருப்பதாகக் கொள்க

B, C என்னுமிடங்களில் உள்ள துகள்களுக்கு உரிய திணிவு மையம், BC-ல், $BD : DC :: 1 : 1$ என்றுள்ள D என்னும் புள்ளியில் அமையும்.

அதாவது,

{ m, B யில்; m, C யில் } ≡ { $2m$, D யில்; அதாவது BC-ன் நடுப் புள்ளியில் } ஆகும்.

{ $2m$, D யில்; M, A யில் } ≡ { $3m$, G யில், அதாவது ADயில் $DG : GA :: 2 : 1$ என்னும் புள்ளியில் } ஆகும்.



படம் 9·3.

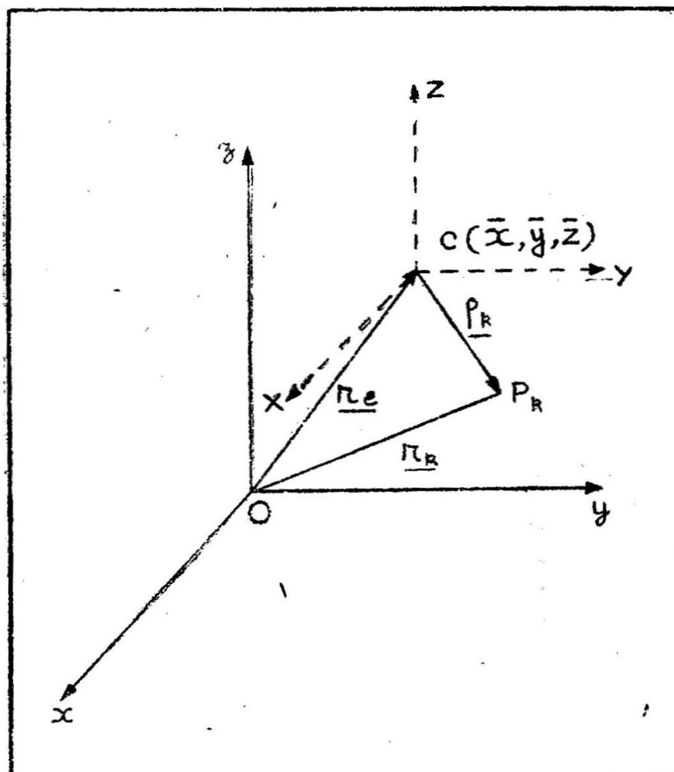
எனவே, மூன்று சமமான நிறைகளையுடைய துகள்களின் திணிவு மையமானது, இத்துகள்களின் இருப்பிடங்களைச் சேர்ப்ப பதால் அமையும் முக்கோணத்தின் மையக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியில் அமைகிறது.

இத்துகள்கள், ஒரு புவியீர்ப்பு தளத்தில் (gravitational field) இருப்பதாகில், k ஆவது துகளின் எடை, $w_k = m_k g$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \underline{\mathbf{r}_c} = \frac{\Sigma w_k \underline{r_k}}{\Sigma w_k} \text{ ஆகும்.}$$

$C(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ என்னும் திணிவு மையத்தைத் துவக்கப் புள்ளியாக எடுக்கும்போது, (படம் 9·4)-ல் காட்டியவாறு,

$$\underline{\rho_k} = \underline{CP_k} = \underline{OP_k} - \underline{Oe} = \underline{r_k} - \underline{r_c}$$



படம் 9·4.

$$\therefore \quad \Sigma m_k \underline{\rho_k} = \Sigma m_k (\underline{r_k} - \underline{r_c}) = (\Sigma m_k \underline{r_k}) \; \Sigma m_k \underline{r_c}$$
$$= M\underline{r_c} - \underline{r_c} \; (\Sigma m_k) = M\underline{r_c} - M\underline{r_c} = 0$$

ஆகும்.

எடுத்த துகட்டொகுதியின் சேர்க்கை, ஒரு தொடராக ஓரினமான கட்டிறுக்கப் பொருளை (continuous rigid body) உருவாக்குவதாகக் கொண்டால் வரையறுத்த தொகையீட்டு முறைப்படி, பொருளின் திணிவு மையம்.

$$\underline{r_c} = \frac{\lim\limits_{\triangle m \to 0} \Sigma \triangle m\, \underline{r}}{\lim\limits_{\triangle m \to 0} \Sigma \triangle m} = \frac{\int \underline{r}\, dm}{\int dm}$$

(எல்லை $\triangle m \to 0$)

என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

[குறிப்பு : கட்டிறுக்கப் பொருள் உறைவிடம் கொள்ளும் அமைப்புக்கு ஏற்றவாறு, கீழ், மேல் தொகையிடல் வரம்புகள் வரையறுக்கப்பட்டு, இங்கு தொகையைக் கணக்கிடுவதாகக் கொள்ள வேண்டும்]

மேற்கூறிய, சமன்பாட்டின் எண்ணிப் பகிர்வுகளையும் கீழ் வருமாறு பெறலாம்.

$$\overline{x}\,\underline{i} + \overline{y}\,\underline{j} + \overline{z}\,\underline{k} = \frac{\int (x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k})\, dm}{\int dm}$$

$$= \frac{\int xdm}{\int dm}\underline{i} + \frac{\int ydm}{\int dm}\underline{j} + \frac{\int zdm}{\int dm}\underline{k}$$

என்பதால்,

$$\overline{x} = \frac{\int xdm}{\int dm};\quad \overline{y} = \frac{\int ydm}{\int dm};\quad \overline{z} = \frac{\int zdm}{\int dm}$$ ஆகும்.

இம்மூன்று எண்ணிச் சமன்பாடுகளும், திணிவு மையத்தின் இருப்பிடத்தை வரையறுக்கின்றன. இங்கும், திணிவு மையத்தைத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொள்ளும்போது,

$$\int \rho\, dm = \int (\underline{r_c} - \underline{r})\, dm$$

$$= \int \underline{r_c}\, dm - \int \underline{r}\, dm$$

$$= \underline{r_c} \int dm - M\,\underline{r_c}$$

$$= M\,\underline{r_c} - M\,\underline{r_c}$$

$$= 0$$ ஆகும்.

மேலும்,

$(\Sigma m_k)\,\underline{r_c} = \Sigma m_k\,\underline{r_k}$ என்னும் சமன்பாட்டை ... (i)

t-யைக் குறித்து வகையிட,

$$(\Sigma m_k)\frac{d\,\underline{r_c}}{dt} = \frac{d}{dt}\Sigma m_k\,\underline{r_k} = \Sigma m_k \frac{d\,\underline{r_k}}{d_t}, \quad \dots \dots \quad \text{(ii)}$$

அதாவது, $M\,\underline{v_c} = \Sigma m_k\, \underline{v_k}$ ஆகும்.

இங்கு $\underline{v_c} = \frac{d\,\underline{r_c}}{dt}$, $\underline{v_k} = \frac{d\,\underline{r_k}}{dt}$ என்பவை முறையே திணிவு மையம். k-ஆவது துகள் ஆகியவற்றின் திசை வேகங்களைக் குறிக்கின்றன.

(ii) சமன்பாட்டை, t-யைக் குறித்து மறுமுறை வகையிட

$$(\Sigma\, m_k)\frac{d^2\,\underline{r_c}}{dt^2} = \Sigma\, m_k \frac{d^2\,\underline{r_k}}{dt^2}$$

$$M\,\underline{a_c} = \Sigma\, m_k\,\underline{a_k} \quad \text{ஆகும்.}$$

இங்கு $\underline{a_c}$, $\underline{a_k}$ என்பவை, முறையே c, k ஆவது துகள் ஆகியவற்றின் முடுக்கங்களைக் குறிக்கின்றன.

$$(\Sigma m_k)\,\underline{v_c} = \Sigma m_k\,\underline{v_k}$$

$$(\Sigma m_k)\,\underline{a_c} = \Sigma m_k\,\underline{a_k}\,,$$

என்னும் சமன்பாடுகள், திணிவு மையத்தின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றிற்கும், துகட்டொகுதியிலுள்ள துகள்களின் திசை வேகங்கள், முடுக்கங்கள் ஆகியவற்றிற்கும் உள்ள தொடர்பை வெளிப்படுத்துகின்றன.

தவிரவும், $\Sigma\, m_k\,\underline{\rho_k} = 0$ என்றுவதால்,

$$\frac{d}{dt}\Sigma\, m_k\,\underline{\rho_k} = \Sigma\, m_k \frac{d\,\underline{\rho_k}}{dt} = 0,$$

அதாவது $\Sigma\, m_k\,\underline{v_{ck}} = 0$ ஆகும்.

இங்கு $\underline{v_{ck}} = \frac{d\,\underline{\rho_k}}{dt}$ என்பது, திணிவு மையம் குறித்து, k ஆவது துகளின் சார்பு திசை வேகத்தைக் குறிக்கிறது.

அவ்வாறே,

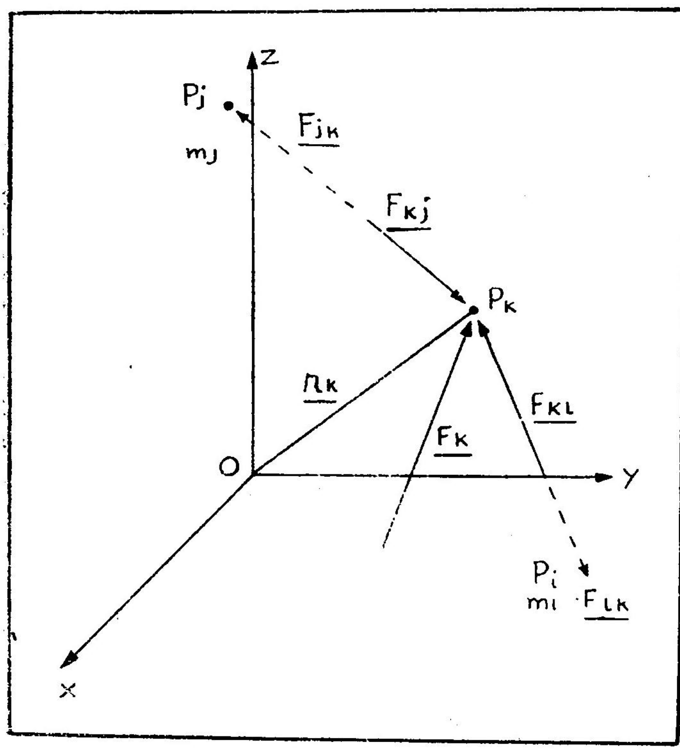
$$\frac{d^2}{dt^2}\Sigma\, m_k\,\underline{\rho_k} = \Sigma\, m_k \frac{d^2\,\underline{\rho_k}}{dt^2} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது $\Sigma\, m_k\,\underline{a_{ck}} = 0$.

இங்கு $\underline{a_{ck}} = \frac{d^2\,\underline{\rho_k}}{dt^2}$ என்பது, திணிவு மையம் குறித்து k ஆவது துகளின் சார்பு முடுக்கத்தைக் குறிக்கிறது.

9-4. துகட்டொகுதி ஒன்றின் இயக்க இயல் சமன்பாட்டைக் காணுதல்

துகட்டொகுதி ஒன்றின் இயக்கம் (படம் 9·5)-ல் காட்டிய வாறு அமைவதாகக் கொள்க. ஒவ்வொரு துகளும் புறவிசைகள், உள் விசைகள் ஆகியவற்றால் தாக்கப்பட்டு இயங்குகிறது.



படம் 9·5.

k ஆவது துகளின் இயக்கத்தை நோக்குக.

அத் துகளின் மேல் செயல்படும் புறவிசைகளின் விளைவு விசையை $\underline{F_k}$ எனக் கொள்க. மேலும் அத்துகளுக்கும், ஏனைய துகள் களுக்குமிடையே செயல், எதிர்ச் செயல், விளைவிக்கக் கூடியதும் சமனும் எதிருமான உள் விசைகள் இருக்கின்ற காரணத்தால், k ஆவது துகளின் மேல், i, j என்னும் துகள்கள் F_{ki}, $\underline{F_{kj}}$ என்னும் விசைகளைச் செயல்படுத்தும். இவ்விசைகளுக்கேற்றவாறு k ஆவது துகளும், i, j என்னும் துகள்களின் மேல் சமனுமெதிருமான $\underline{F_{ik}}$, $\underline{F_{jk}}$ என்னும் விசைகளைச் செயல்படுத்தும்.

$\underline{f_k}$ என்பது k ஆவது துகளின் மேல் செயல்படும் உள் விசைகளின் தொகு பயனைக் குறிக்குமெனில்,

$$\underline{f_k} = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq k}}^{n} \underline{f_{ki}} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு எல்லா உள் விசைகளும் இரட்டையாக சமமாகவும், எதிராகவும் செயல்படுவதால், அவ்வுள் விசைகளின் குறியியற் கூட்டுத் தொகை பூச்சியத்திற்குச் சமனுகும். மேலும் 0 என்னும் புள்ளி பற்றி, அத்தகைய உள்விசை சுழலிணைப்புத்திறன்களின் குறியியல் கூடுதலும் பூச்சியமாகும்.

$$\text{எனவே,} \quad \sum_{k=1}^{n} \underline{f_k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \underline{f_{ki}} = 0$$

மேலும்,

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge \underline{f_k} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

ஆனுல் துகட்டொகுதியின் மேல் செயல்படும் $\underline{F_k}$ என்னும் புறவிசைகளின் தொகுபயன் விசையும், 0-வைப் பற்றி, அப் புற விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் விளைவுத் திருப்புத் திறனும் பூச்சியத்திற்குச் சமமாகாது. எனவே அவற்றை முறையே,

$$\underline{R} = \sum_{k=1}^{n} \underline{F_k}, \quad \underline{M_0} = \sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge \underline{F_k}$$

என எழுதலாம்.

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, k-ஆவது துகளின் இயக்க இயல் சமன்பாடு, $m_k \underline{a_k} = \underline{F_k} + \underline{f_k}$ ஆகும்.

இவ்விதச் சமன்பாட்டை ஒவ்வொரு துகளுக்கும் வரையறுத்துக்கூட்டிட,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \underline{a_k} = \sum_{k=1}^{n} (\underline{F_k} + \underline{f_k}) = \sum_{k=1}^{n} \underline{F_k} + \sum_{k=1}^{n} \underline{f_k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{F_k} + 0 = \underline{R} \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{ஆனல்,} \quad \sum_{k=1}^{n} m_k \underline{a_k} = M \underline{a_c} \text{ என்றுவதால்,}$$

$$M a_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \underline{a_k} = \sum_{k=1}^{n} F_k = R \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, துகட்டொகுதியின் திணிவு மையத்தினியக்கம், அத் தொகுதியிலுள்ள துகள்களின் மொத்த நிறையைப் பெற்று, அத் தொகுதியில் செயல்படும் புறவிவிசைகளின் தொகுபயன் (அல்லது விளைவு) விசைக்கு உட்படுத்தப்பட்டுள்ள துகள் ஒன்றின் இயக்கத்தைப் போன்றுள்ளது. மேலும் துகட்டொகுதிக் குரிய திணிவு மையத்தின் இயக்கத்தை விளைவிக்கும் அத்தகைய தொகுபயன் விசை, அதன் செயல்படும் புள்ளியை சார்ந்திருக்க வில்லை என்னும் வியப்புமிக்க செய்தியும் கிடைககிறது. தவிரவும், துகட்டொகுதியின் இயக்கம் எவ்வளவு குழப்பமாயுள்ள போதிலும், தொகுதியின் திணிவு மையத்தின் இயக்கம், உள்விசைகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை என்ற காரணத்தால், அவ்வியக்கம் சிக்கல் ஏதுமின்றி அமைகிறது. ஆகவே, துகட்டொகுதிக்குரிய திணிவு மையத்தின் இயக்கத்தை அறிவதற்கு, துகள் ஒன்றின் இயக்க இயலைப் பயன்படுத்துவதே போதுமானதாகும்

9·5. மாதிரிக் கணககுகள்.

9·5-1. படம் (9·6)-ல் காட்டியுள்ள அமைப்பைப்பெற்ற பொருட்டொகுதி ஓய்வு நிலையிலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. A என்னும் பொருள் 2மீட்டர் இயங்கியபின் அதன் திசை வேகத் தைக் காண்க.

$$N = 50\,; \quad F = \mu N = 0{\cdot}2 \times 50 = 10$$

A-என்னும் பொருள் 2மீட்டர் கிடையாக இயங்கும்போது, B-என்னும் பொருள் 1·0 மீ தொலைவு கீழ்நோக்கி இயங்குகிறது. எனவே B-ன் திசைவேகம்

$$= \frac{1}{2} \times A\text{ன் திசைவேகம்}\,; \quad \therefore \quad v_B + \frac{1}{2} v_A$$

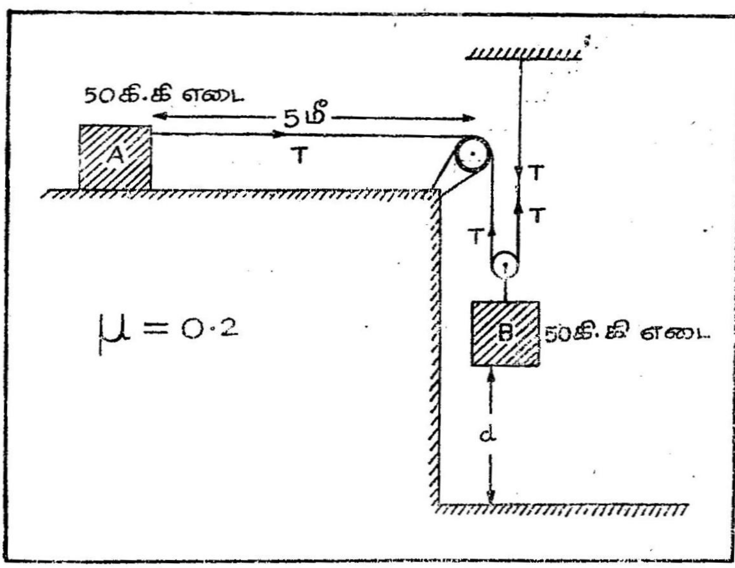
$$V_{1-2} = \text{பொருட்டொகுதி செய்தவேலை } 50 \times 1{\cdot}0 - 10 \times 2$$
$$= 30 \text{ மீ.கி.கி விசை}$$

பொருட்டொகுதியில் ஏற்பட்ட இயக்க ஆற்றல் மாற்றம்

$$= \frac{1}{2}\frac{50}{g} v_A^2 + \frac{1}{2}\frac{50}{g} v_B^2 = \frac{25}{g}(v_A^2 + v_B^2)$$

$$= \frac{25}{g} \cdot \frac{5}{4} v_A^2$$

$$= \frac{125}{9.8 \times 4} v_A^2$$



படம் 9 6.

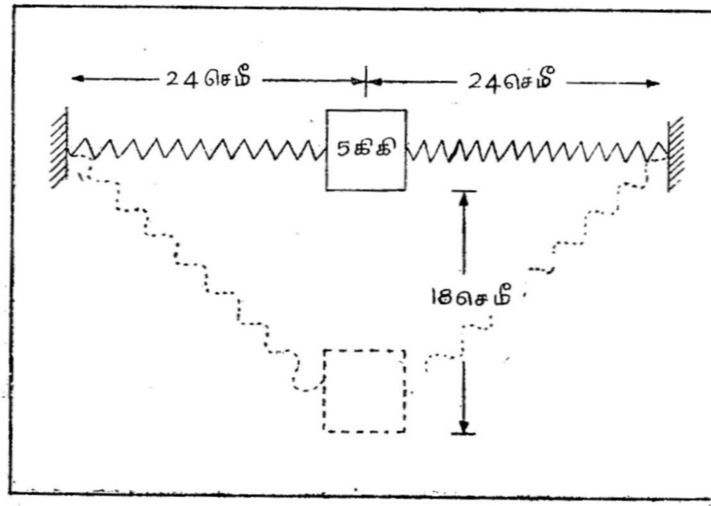
''வேலை-ஆற்றல்'' கோட்பாட்டின் படி,

$$\frac{125\ v_A^2}{9{\cdot}8 \times 4} = 30$$

$$\therefore \quad v_A = 3{\cdot}068 \text{ மீ/விநாடி.}$$

9·5-2. 5 கிலோகிராம் எடையுள்ள பொருளொன்று இரு திருத்துச்சுருள்வில்களால் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. படம் (9·7)-ல் காட்டியவாறு, சுருள்வில்கள் கிடையாக உள்ளபோது, அப் பொருள் ஓய்வு நிலையிலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. தொடக்கத்தில் சுருள்வில் ஒவ்வொன்றும் 2கிகி இழுவிசையைப் பெற்றுள்ளது. அப்பொருளானது 18 செ.மீ தொலைவு கீழ்நோக்கி

இயங்கும்போது, அதன் திசைவேகத்தைக்காண்க. சுருள்வில் ஒவ்வொன்றும் $k = 0 \cdot 5$ கிகி/செ.மீ என்னும் வில்மாறிலியைப் பெற்றுள்ளதாகக்கொள்க.



படம் 9·7.

தொடக்க நிலையில் திருகுச்சுருள்வில் ஒவ்வொன்றிலும் x_1 செ.மீ அளவு நீட்சி ஏற்படுகிறதெனில் $T = kx_1$; $2 = 0 \cdot 5 x_1$; $x_1 = 4$ செமீ. பொருளானது 18 செமீ. கீழ் நோக்கி இயங்கிய போது, திருகுச்சுருள் ஒவ்வொன்றிலும் ஏற்பட்ட நீட்சியை x_2 செமீ. எனவும், பொருளின் திசைவேகத்தை v செமீ/விநாடி எனவும் கொள்க. $x_2 = \sqrt{24^2 + 18^2} - 20 = 10$ செ மீ. எனவே திருகுச்சுருள் ஒவ்வொன்றும் செய்த வேலை

$$= \frac{1}{2} k (x_1^2 - x_2^2) = -21$$ கிகி.செமீ. 5 கிகி. எடையுள்ள பொருள் செய்த வேலை $= 5 \times 18 = 90$ கிகி செமீ.

$\therefore \quad V_{1-2} =$ விசைகளனைத்தும் செய்த வேலை $= 2 \times (-21) + 90 = 48$ கிகி செமீ

இயக்க ஆற்றல் மாற்றம் $= \frac{1}{2} \times \frac{5}{981} \times v^2 - 0 = \frac{5}{1962} v^2$

எனவே வேலை-ஆற்றல் சமன்பாட்டின்படி,

$$\frac{5}{1962} v^2 = 48$$

$\therefore \quad v = 1 \cdot 373$ மீ/விநாடி

இந்தியாவில் சில மாநிலங்களில் மட்டுமே தொழிலாளர் கூட்டுறவுகள் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. பொதுவாக மூன்று வகையான சங்கங்களை இத் துறையில் காணலாம். அவை தொழிலாளர் ஒப்பந்த சங்கங்கள் (Labour Contract Societies), வனத் தொழிலாளர் (Forest Labour) சங்கங்கள், கூட்டுறவுப் போக்குவரத்துச் சங்கங்கள் என்பன.

தொழிலாளர் ஒப்பந்த சங்கங்கள் (Labour Contract Societies)

சாலைகள் அமைப்பது, பாலங்கள், கால்வாய் கட்டுவது, கல் உடைத்தெடுப்பது போன்ற வேலைகளை ஒப்பந்தத்தின் பேரில் பெற்று இச் சங்கங்கள் தமது உறுப்பினர்களைக் கொண்டு அவற்றைச் செய்து முடிக்கின்றன. சொந்த நிலமில்லாத தொழிலாளிகளே இச் சங்கங்களில் பெரும்பாலும் உறுப்பினர்களாகச் சேருகின்றனர். இச் சங்கங்கள் தம் உறுப்பினர்களுக்கு வேலை வாய்ப்பு அளிப்பது மட்டுமின்றி நல்ல கூலி கிடைக்கவும் வகை செய்கின்றன.

1971 ஜூன் இறுதியில் தொழிலாளர் ஒப்பந்த-கட்டடப் பணிச் சங்கங்கள் இருந்த நிலை வருமாறு:

அட்டவணை

தொழிலாளர் ஒப்பந்த-கட்டடப்பணிச் சங்கங்கள் 1971 ஜூன் இறுதியிலிருந்த நிலையும் 1970-71இல் நடப்பும்

(ரூ. இலட்சத்தில்)

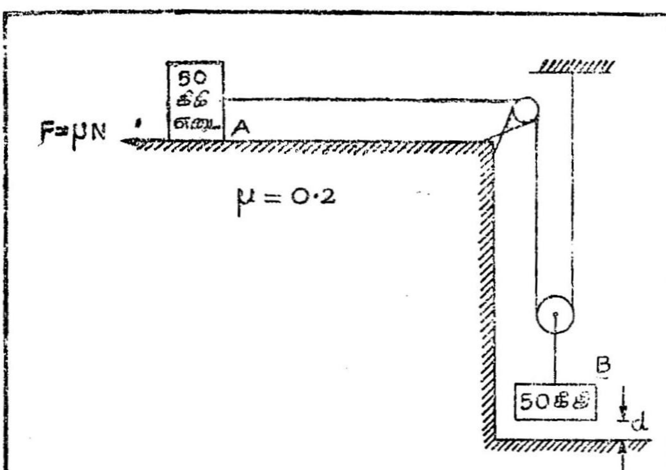
விவரம்	மொத்தச் சங்கங்கள்	செயல்பட்டு வந்தவற்றின் எண்ணிக்கை	உறுப்பினர் எண்ணிக்கை	வேலை முடித்த ஒப்பந்தங்கள் மதிப்பு	வேலை பெற்ற தொழிலாளிகள் எண்ணிக்கை	வழங்கப்பட்ட கூலி
மாநிலச் சங்கங்கள்	2	2	34	2·64	202	1·14
மாவட்டச் சங்கங்கள்	38	23	1439	8·25	318	0·90
பிரதம சங்கங்கள் : பழங்குடியினர் (Tribal)	708	370	39935	102·81	13428	40·90
பழங்குடியினரல்லாத (Non - tribal)	4452	2565	281518	1495·27	442225	678·28

பெறுவதாகில், g-ன் மதிப்பை (m_1, m_2, v, h) ஆகியவற்றின் வாயிலாகக் காண்க.

$$\left[\left\{\text{குறிப்பு :}\quad (m_2 - m_1)\ h = \frac{1}{2}\ m_1 v^2 + \frac{1}{2}\ m_2 v^2\right\}\right.$$

$$\text{விடை :}\quad g = \left(\frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}\right)\frac{v^2}{2h}\ \text{மீ/விநுடி}^2.\left.\right]$$

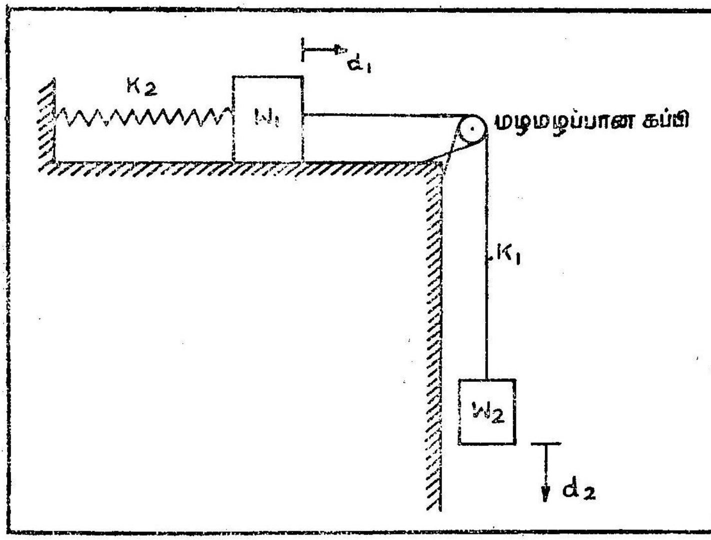
9-6·3. (படம் 9·10)-ல் காட்டியுள்ள அமைப்பைப் பெற்ற பொருட்டொகுதி ஒன்று ஓய்வு நிலையிலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. B என்னும் பொருள் d மீ. தொலைவு கீழ் நோக்கி இயங்கியவுடன் தரையை இடித்து, கயிற்றுப் பகுதியைத் தொய்வாக்குகிறது (slack). A என்னும் பொருள் மொத்தமாக 5 மீ. தொலைவு இயங்கி, ஓய்வு நிலையை அடைகிறதெனில், d-ன் மதிப்பைக் காண்க. $\left[\text{விடை :}\quad d = \frac{25}{22}\ \text{மீ.}\right]$



படம் 9·10.

9-6·4. (படம் 9·11)-ல் காட்டியுள்ள அமைப்பில் W_1, W_2 என்னும் எடைகள் வளையக் கூடியதும், மீள் சக்தியை யுடையதும், மெல்லியதும், k_1 என்னும் வில் மாறிலியை பெற்றதுமான கம்பி யொன்றில் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. W_1 என்னும் எடையானது, k_2 என்ற வில் மாறிலியைப் பெற்ற திருகுச் சுருள் வில் ஒன்றின், ஒரு முனையில் பொருத்தப்பட்டு, அதன் மற்றொரு முனை சுவர்ப் பகுதியில் இணைக்கப்பட்டுமுள்ளது. தொடக்கத்தில் கம்பியும்,

திருகுச் சுருள் வில்லும் மீட்சியின்றி இருக்குமாறு W_2 என்னும் விசையானது திடீரென விழச் செய்யக் கூடிய மேடையால் தாங்கப்படுகிறது. W_1 என்னும் எடையை உடைய பொருளுக்கு கிடைத் தளத்திற்குமிடையே யுள்ள உராய்வுக்கெழு μ எனத்



படம் 9·11.

தரப்பட்டுள்ளது. மேடையைத் திடீரென விழச் செய்ய W_2 என்னும் பொருள் d_2 தொலைவு கீழ் நோக்கியும், W_1 என்னும் பொருள் $d_1 (< d_2)$ தொலைவு கிடையாகவும் இயங்குமெனில் பொருட்டொகுதியில் ஏற்பட்ட இயக்க ஆற்றல் மாற்றத்தைக் காண்க.

[{குறிப்பு : $\triangle(PE + KE) = W_k$:

$$\triangle PE = \frac{1}{2} k_2 d_2^2 + \frac{1}{2} k_1 (d_2 - d_1)^2 + (-W_2 d_2 - 0)\}$$

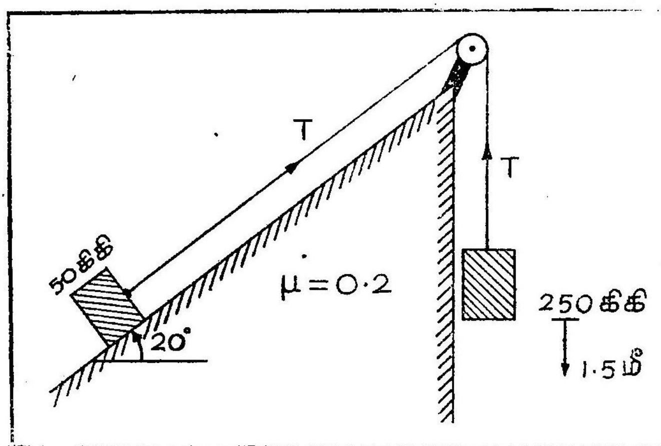
விடை : $\triangle(KE) = -W_1 \mu d_1 - \frac{1}{2} K_1 d_1^2$

$$- \frac{1}{2} K_1 (d_2 - d_1)^2 + W_2 d_2]$$

9·6·5. 50 கி.கி, 250 கி.கி. எடைகளுக்குள்ள இரு பொருள்கள் நீளவல்லாத ஓரிழையாலிணைக்கப்பட்டுள்ளன. 50 கி.கி. எடையுள்ள பொருள் கிடைத்தளத்துடன் 20° ஏற்றக் கோணத்தை பெற்றதும், வழவழப்பற்றதுமான ($\mu = 0·2$) சாய்வுதளத்தில்

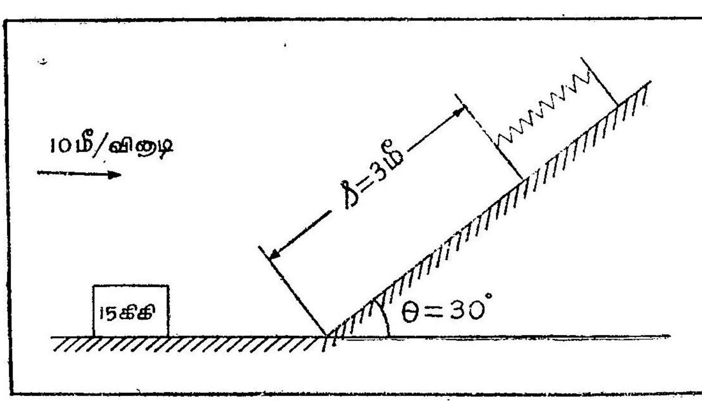
படம் (9·12)-ல் காட்டியவாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்விழை யானது அத்தளத்தின் நுனியிலுள்ள ஒரு வழவழப்பான சிறு கம்பிக்கு மேலாகச் சென்று, செங்குத்தாகத் தொங்கும், 250 கி.கி. எடையுள்ள பொருளைத் தாங்குகிறது. அப்பொருட்டொகுதி ஓய்வு நிலையிலிருந்து விடுவிக்கப்பட்டு 250 கி.கி. எடையுள்ள பொருள் 1·5 மீ. தொலைவு கீழ் நோக்கி இயங்கும்போது, அப்பொருள்கள் ஒவ்வொன்றும் பெறும் திசை வேகங் காண்க.

[விடை : 4·682 மீ/விநாடி]



படம் 9·12.

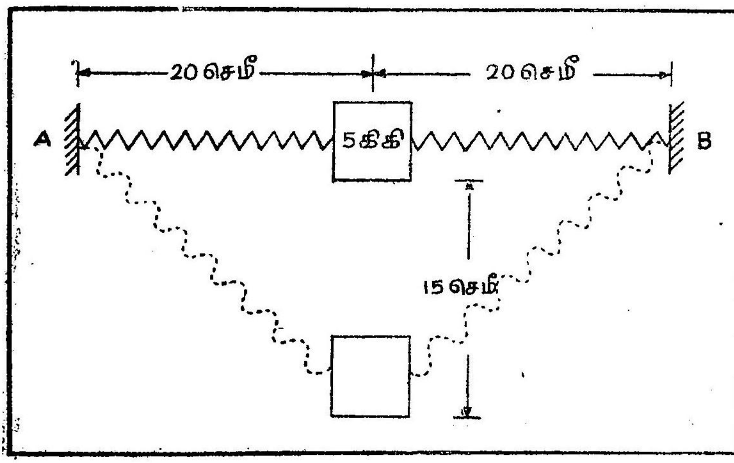
9-6·6. $W = 15$ கி.கி. எடையுள்ள பொருளொன்று, மழமழப் பான கிடைத்தளத்தில், விநாடிக்கு 10 மீ. வேகத்தில் படம் (9·13)-ல் காட்டியவாறு இயங்கும்போது, கிடைத்தளத்திற்கு



படம் 9·13.

$\theta = 30°$ ஏற்றகோணத்தைப் பெற்றுள்ள மழமழப்பான சாய் தளத்தில், மேல் நோக்கியவாறேறி, வில் மாறிலி $k = 2$ கிகி/செமீ உள்ள திருகுச் சுருள் வில் ஒன்றை மோதுகிறது. $s = 3$ மீ. எனில் அப் பொருள் சாய்தளத்தில் சென்ற நிலைக்குத்துயரம் யாது எனக் காண்க. [விடை : 1·618 மீ.]

9·6–7. இரு திருகுச் சுருள்வில்களில் பிணைக்கப்பட்ட 5 கிகி. எடையுள்ள பொருளொன்று அச் சுருள் வில்கள் கிடையாக படம் (9·14)-ல் காட்டியவாறு உள்ளபோது, ஓய்வு நிலையிலிருந்து



படம் 9·14.

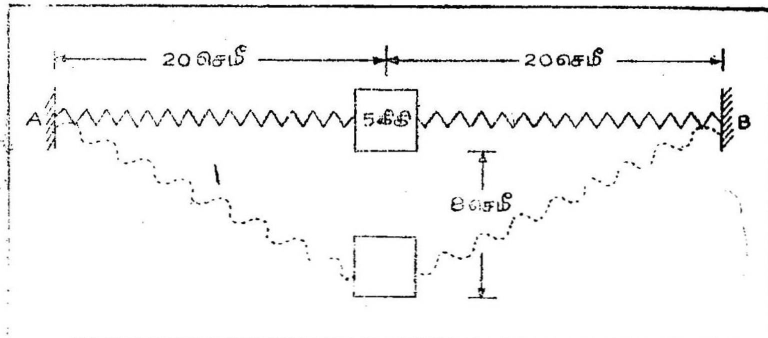
விடுவிக்கப்படுகிறது. k என்னும் சுருள்வில் மாறிலியின் மதிப்பை 0·5 கிகி./செமீ. எனக் கொள்க. தொடக்கத்தில் சுருள்வில் ஒவ்வொன்றும் 1·5 கிகி. அளவுள்ள இழு விசையைப் பெற்றுள்ளது. அப் பொருளானது, 16 செமீ. தொலைவு கீழ் நோக்கி இயங்கும்போது, அதன் திசை வேகத்தைக் காண்க.

[விடை : 1·365 மீ/வினுடி]

9·6–8. 5 கிகி. எடையுள்ள பொருளானது, இரு திருகுச் சுருள் வில்களுடன் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. அச் சுருள் வில்கள் படம் (9·15)-ல் காட்டியவாறு கிடையாகவுள்ளபோது, பொருள் ஓய்வு நிலையிலிருந்து விடப்படுகிறது. சுருள் வில் மாறிலி $k = 1·25$ கிகி./செமீ. ஆகும். தொடக்கத்தில் சுருள்வில் ஒவ்வொன்றிலும், 5 கிகி. அளவுள்ள இழுவிசை ஏற்படுகிறதெனில், அப்பொருள் 8 செமீ. கீழ் நோக்கி இறங்கியபின், அதன் திசை வேகம் காண்க.

[விடை : 0·921 மீ/வினுடி]

9·6-9. (9·6-8)-ஆவது கணக்கில், A, B என்னும் நிலையான முட்டுகள் (supports) ஒவ்வொன்றும், 8 செமீ. அளவுக்கு உட்புறமாக நகர்த்தப்பட்டு திருகுச் சுருள்வில்கள் கிடையான



படம் 9·15.

நிலையை அடையும்போது, பொருளானது ஓய்வு நிலையிலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. அப் பொருள் 8 செமீ. தொலைவு கீழ் நோக்கி இயங்கியபோது, அதன் திசை வேகங் காண்க.

[விடை : 1·494 மீ/வினா]

9·6-10. படம் (9·16)-ல் காட்டியவாறு, பனிக்கட்டியின் மீது செல்ல உதவும் நீண்ட மரச்சறுக்குக் கட்டையின்மேல் உள்ள ஒரு மனிதன், சறுக்கலில் (ramp) புவியீர்ப்பால் ஏற்படக்கூடிய விசை ஒன்றுலேயே கீழ் நோக்கி இயங்குகிறான். அம் மனிதன் B-யிலிருந்து C-க்கு இயங்கும்போது, கிடையாக 30 மீட்டர் தொலைவு கடந்து, C-யில் அமைக்கப்பட்டுள்ள மழமழப்பான சாய்தளத்தில் மிகவும் மென்மையாக (very smoothly) இறங்கக் கூடுமெனில், θ என்னும் சாய்தளத்தின் ஏற்றக் கோணத்தைக் காண்க.

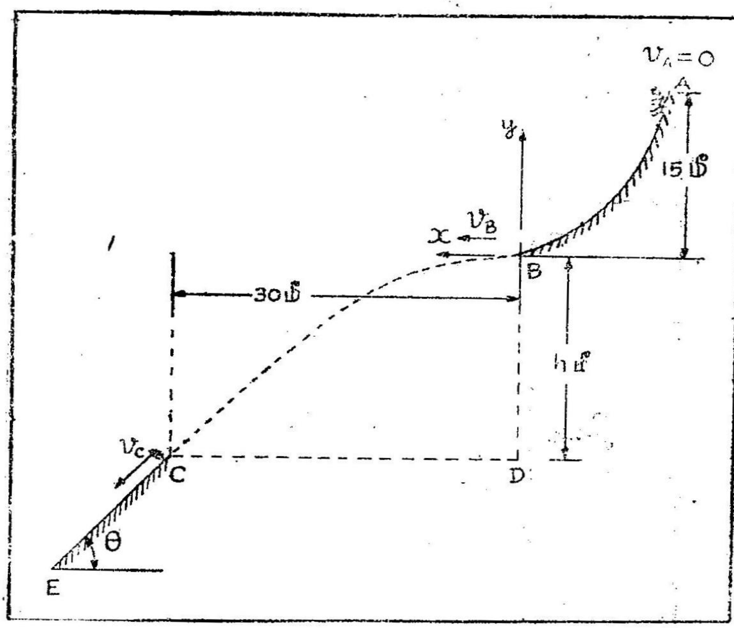
[{குறிப்பு : $v_B = \sqrt{30g}$; BC என்பது பரவளைவுப் பாதையாகும்.

$$-h = -\frac{g\,(30)^2}{2\,v_B^{\,2}};\quad h = 15 \text{ மீ.}$$

$$v_C^{\,2} = v_B^{\,2} + 30g = 60g$$

$$v_C \sin\theta = \sqrt{2g \times 15}\ \}$$

விடை : $\theta = 4$]



படம் 9·16.

9·7. துகட்டொகுதியின் இயக்க இயல் எண்ணிச் சமன்பாடுகள்

துகட்டொகுதிக்குரிய திணிவு மையத்தின் முடுக்கத்தை

$$\underline{R} = M\,\underline{a}$$

என்னும் சமன்பாடு வரையறுக்கிறது. இச்சமன்பாடே திணிவு மையத்தின் இயக்கத்தை அறிவிக்கக்கூடியதாகவும் உள்ளது. இதன் எண்ணிப்பகிர்வுகளையும் பின்வருமாறு பெறலாம்.

$$R_x\,\underline{i} + R_y\,\underline{j} + R_z\,\underline{k} = M\,(a_x\,\underline{i} + a_y\,\underline{j} + a_z\,\underline{k})$$

$$= M\left\{\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}\,\underline{i} + \frac{d^2\bar{y}}{dt^2}\,\underline{j} + \frac{d^2\bar{z}}{dt^2}\,\underline{k}\right\}$$

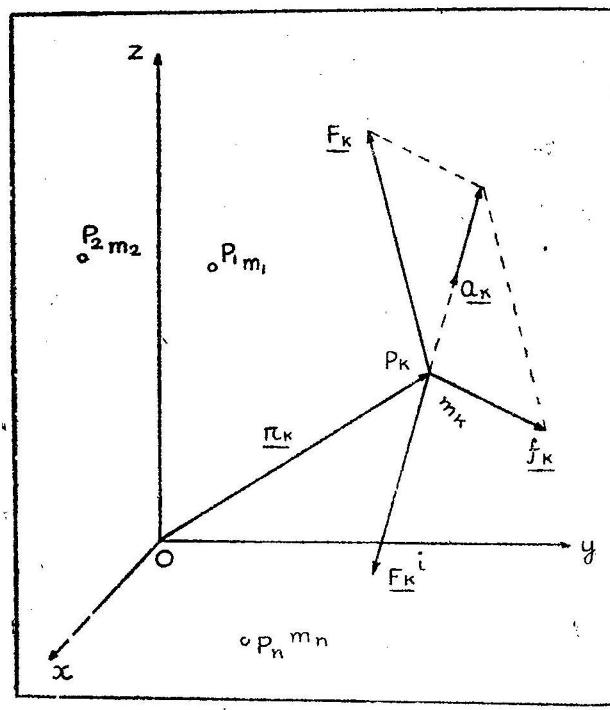
எனக்கொண்டால்,

$$R_x = M\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}, \quad R_y = M\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}, \quad R_z = M\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} \text{ ஆகும்.}$$

இவைகளே, துகட்டொகுதியின் இயக்க இயல் எண்ணிச்சமன்பாடுகளாகும்.

9·8. துகட்டொகுதிக்கான தலம்பாட்டின் தத்துவம் (D'Alembert's Principle for a system of particles.)

m_1, m_2, ... m_k, ... m_n என்னும் நிறைகளைப்பெற்ற n துகள்களின் இயக்கம் படம் (9·17)-ல் காட்டியவாறு அமையட்டும்.



படம் 9·17.

K-ஆவது துகளின்மேல் செயற்படும் புறவிசைகள், உள் விசைகள் ஆகியவற்றின் விளைவுவிசைகளை முறையே $\underline{F_k}$, $\underline{f_k}$ எனக்கொள்க.

அத்துகளின் முடுக்கம் $\underline{a_k}$ -ஆனது,

$$\underline{F_k} + \underline{f_k} = m_k\ \underline{a_k}$$

என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

$\underline{F_k}^i = -m_k\ \underline{a_k}$ எனக்கொள்க. அம்போது, k-ஆவது துகளின் இயக்கத்திற்குரிய சமன்பாடு

$$\underline{F_k} + \underline{f_k} + \underline{F_k}^i = \underline{0} \quad \text{ஆகும்.} \qquad \dots \quad (1)$$

இங்கு $\underline{F_k}^i = - m_k \underline{a_k}$ என்பது k-ஆவது துகளின்மேல் செயற்படும் சடத்துவ விசை (Inertia force) யாகும்.

(1)-ஆவது சமன்பாட்டின் வலப்புறம் பூச்சியமாவதால், $\underline{F_k}$, $\underline{f_k}$, $\underline{F_k}^i$ என்னும் விசைகள், அத்துகளை இயக்க விசையியற் சமநிலையில் வைப்பதாகக் கருதப்படும்.

மேலும், O என்னும் தொடக்கப்புள்ளிபற்றி, அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களைக்காணும்போது,

$$\underline{r_k} \wedge \underline{F_k} + r_k \wedge \underline{f_k} + \underline{r_k} \wedge \underline{F_k}^i = \underline{0} \quad \ldots \quad (2)$$

ஆகும்.

மேற்கூறிய (1), (2)-என்னும் சமன்பாடுகள், தொகுதியி லுள்ள ஒவ்வொரு துகளுக்கும் பொருந்துவதாவதால், அச்சமன் பாடுகளின் குறியியற் கூட்டுத்தொகைகளும் பூச்சியமாகும்.

அதாவது,

$$\sum_{k=1}^{n} (\underline{F_k} + \underline{f_k} + \underline{E_k}^i) = \underline{0},$$

அதாவது, $$\sum_{k=1}^{n} \underline{F_k} + \sum_{k=1}^{n} \underline{f_k} + \sum_{k=1}^{n} + \underline{F_k}^i = \underline{0} \quad \ldots \quad (3)$$

$\sum_{k=1}^{n} \underline{f_k}$ என்பது உள் விசைகளின் தொகுபயனைக் குறிப்ப தால், அதன் மதிப்பு பூச்சியமாகும். மேலும்

$\sum_{k=1}^{n} \underline{F_k} = \underline{R}$ என்பதால், (3)-வது சமன்பாடு,

$$\underline{R} + \sum_{k=1}^{n} \underline{F_k}^i = \underline{0},$$

அதாவது, $$\underline{R} - \sum_{k=1}^{n} m_k \underline{a_k} = \underline{0} \quad \ldots \quad (4)$$

ஆகும்.

மேலும்,
$$\sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge (\underline{F_k} + \underline{f_k} + \underline{F_k^i}) = \underline{0} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது,
$$\sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge \underline{F_k} + \sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge \underline{f_k} + \sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge \underline{F_k^i} = \underline{0}$$

அதாவது,
$$\sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge \underline{F_k} + \sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge \underline{F_k^i} = 0$$

அதாவது,
$$\underline{M_0} - \sum_{k=1}^{n} \underline{r_k} \wedge m_k \underline{a_k} = \underline{0} \quad \ldots \quad (5)$$

ஆகும்.

(4)-ஆவது சமன்பாட்டில், $-\sum_{k=1}^{n} m_k \underline{a_k}$ என்பது, சடத்துவ விசைகளின் விளைவாகும். ஆகவே, துகட்டொகுதியில் செயற்படும் புறவிசைகளின் விளைவு விசையும், அத்தொகுதிக்குரிய சடத்துவ விசைகளின் விளைவும் சேர்ந்து, துகட்டொகுதியை இயக்க இயல் சமநிலையில் வைத்திருக்கும் என்பது பெறப்படும். இதுவே, துகட்டொகுதிக்கான தலம்பாட்டின் தத்துவமாகும்.

(4), (5)-வது சமன்பாடுகள், புறவிசைகள், சடத்துவ விசைகள் ஆகியவை துகட்டொகுதியில் செயற்பட்டு, அத்தொகுதியை இயக்க இயல் சமநிலையில் வைத்திருக்கும் என்பதை வெளிப்படுத்துகின்றன. அவற்றின் எண்ணிப்பகிர்வுகளையும், பின்வருமாறு பெறலாம்.

$\underline{R_k} - \Sigma m_k a_k = \underline{0}$ என்பது,

$$R_x - \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = 0 ; \quad R_y - \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} = 0;$$

$$R_z - \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} = 0$$

என்னும் மூன்று எண்ணிச்சமன்பாடுகளை வரையறுக்கின்றன.

அவ்வாறே,

$$\underline{M_0} - \sum m_k \, \underline{r_k} \wedge \underline{a_k} = \underline{0} \quad \text{என்பது,}$$

$$M_{0x}\underline{i} + M_{0y}\underline{j} + M_{0z}\underline{k} - \Sigma m_k \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ \frac{d^2x_c}{dt^2} & \frac{d^2y_k}{dt^2} & \frac{d^2z_k}{dt^2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_{0x} - \sum m_k \left\{ y_k \frac{d^2z_k}{dt^2} - z_k \frac{d^2y_k}{di^2} \right\} = 0,$$

$$M_{0y} - \sum m_k \left\{ z_k \frac{d^2x_k}{dt^2} - x_k \frac{d^2z_k}{dt^2} \right\} = 0,$$

$$M_{0z} - \sum m_k \left\{ x_k \frac{d^2y_k}{dt^2} - y_k \frac{d^2x_k}{dt^2} \right\} = 0,$$

என்னும் மூன்று எண்ணிச் சமன்பாடுகளேயும் வரையறுக்கின்றன.

மேலும், $\underline{R} - \sum m_k \, \underline{a_k} = \underline{0}$ என்னும் சமன்பாடு,

$$\underline{R} - M\underline{a_c} = \underline{0} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

ஆகும்.

இதுவே, துகட்டொகுதியின் திணிவு மையத்தின் இயக்கத்தை வரையறுக்கும் சமன்பாடாகும்.

9·9. மாதிரிக் கணக்குகள்

9-9-1. $W_1 = 54$ கிலோகிராம் எடையுள்ள ஒரு மனிதன், $W_2 = 90$ கிலோகிராம் எடையுள்ள படகு ஒன்றில், ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்திலிருந்து படகில் கரையை நோக்கி $a = 1{\cdot}8$ மீட்டர் நடந்து செல்கிறுன். அப்போது அவன் கரைக்கு அப்பால் எவ்வளவு தொலேவில் இருப்பான் எனக் காண்க.

தொடக்கத்தில், மனிதனும், படகும், கரையிலிருந்து முறையே, x_1, x_2 மீட்டர் தொலேவில், படம் (9·18)-ல் காட்டியுள்ளவாறு இருப்பதாகக் கொள்க.

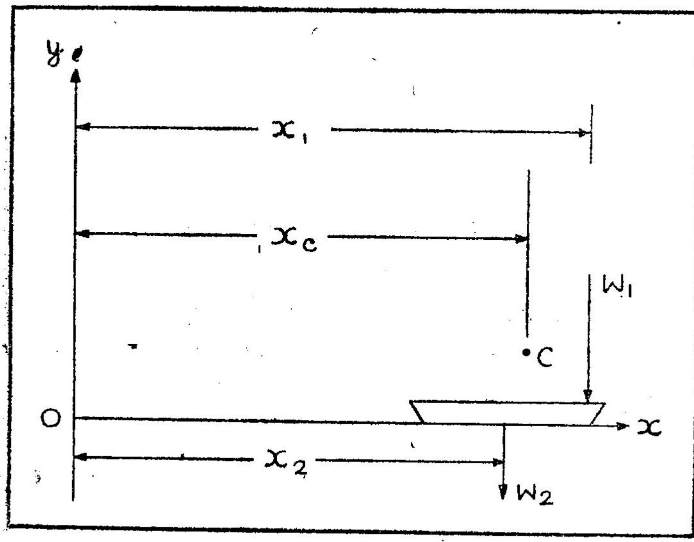
C என்னும் புள்ளி, தொகுதியின் தொடக்கத் திணிவு மையத்தைக் குறிக்கட்டும். 0-விலிருந்து அதன் தொலேவை x_c எனக் கொள்க.

எனவே,

$(m_1 + m_2) x_c = m_1 x_1 + m_2 x_2$ என்னும் சமன்பாடு,

$$\frac{1}{g}(W_1 + W_2) x_c = \frac{1}{g}(W_1 x_1 + W_2 x_2) \quad \dots \quad (1)$$

என்றாகும்.



படம் 9·18

மனிதன் படகில் நடந்து செல்லும்போது, அவனுக்கும், படகுக்கும் இடையே உள்ள விசைகள் செயற்பட்டு, அவனையும் படகையும் இயங்கச் செய்யும். படகுக்கும் தண்ணீருக்குமிடையேயுள்ள உராய்வுத் தடை புறக்கணிக்கப் படுவதாகில், தொகுதியின் மேல் செயற்படும் விசைகளனைத்தும் நிலைக்குத்து திசையிலமையும்.

எனவே,

$$R_x = \frac{1}{g}(W_1 + W_2)\frac{d^2 x_c}{dt^2}$$ என்னும் சமன்பாட்டில்,

$R_x = 0$ என்றுவதால்,

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d x_c}{dt} = c_1$$ ஒரு மாறிலியாகும்.

தொடக்கத்தில் $\frac{dx_c}{dt^2} = 0$ என்பதால், $c_1 = 0$ ஆகும்.

$\therefore \quad x_c = c_2$ என்பது ஒரு மாறிலியாகும்.

மனிதன் a மீட்டர் தொலைவு கரையை நோக்கிச் சென்ற பின்பு அவனும், படகும் கரையிலிருந்து x_1', x_2' மீட்டர் தொலைவுகளில் இருப்பதாகக் கொள்க.

x_c ஒரு மாறிலியாவதால்,

$$\frac{1}{g}(W_1 + W_2)\, x_c = \frac{1}{g}(W_1 x_1' + W_2 x_2') \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) என்னும் சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$W_1 x_1' + W_2 x_2' = W_1 x_1 + W_2 x_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

ஆகும்.

மனிதனும், படகும் பெற்ற சார்பிலா இடப்பெயர்ச்சிகள் (absolute displacements). முறையே, $(x_1' - x_1), (x_2' - x)_2$ ஆகும்.

எனவே,

$$(x_1' - x_1) - (x_2' - x_2) = -a \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

ஆகும்.

(3), (4) என்னும் சமன்பாடுகளிலிருந்து, $(x_2' - x_2)$ வை நீக்க,

$$W_1 (x_1' - x_1) + W_2 (x_1' - x_1 + a) = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

என்றாகும்.

$$\therefore \quad x_1' - x_1 = -\frac{aW_2}{W_1 + W_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

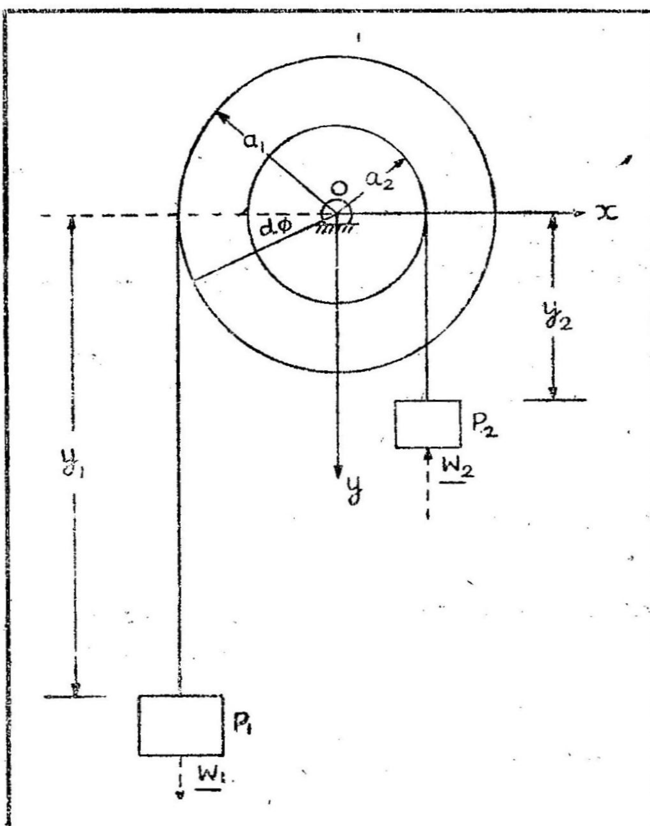
ஆகும்.

$$\text{இங்கு,} \quad x_1' - x_1 - \frac{1 \cdot 8 \times 90}{54 + 90} = -1 \cdot 25 \text{ மீ.} \quad \ldots \quad (7)$$

அதாவது, மனிதன் $1 \cdot 25$ மீட்டர் தொலைவு கரையை நோக்கி இயங்கியிருப்பான்.

9-9-2. $W_1, W_2, (W_1 > W_2)$ என்னும் எடைகளைப் பெற்ற, P_1, P_2 என்று குறிக்கப்பட்ட கட்டைகள், இலேசானதும், மழமழப்பானதும், பொது மையத்தில் பிணைக்கப்பட்டதுமான, a_1, a_2

என்னும் ஆரைகளைப் பெற்ற இரு நிலையான கப்பிகளில் சுற்றப்பட்ட மீள வல்லாத கயிறுகளிலிருந்து படம் (9·19)-ல் காட்டிய வாறு, தொங்குகின்றன. இயங்கும்போது கட்டைகளின் முடுக்கத்தைக் காண்க.



படம் 9·19.

கப்பிகளின் பொது மையத்தின் வழியே வரையும் கிடைக் கோட்டை x அச்சாகவும், கீழ்நோக்கி வரையும் கோட்டை y அச்சாகவும் கொள்க.

t என்னும் நேரத்தில் P_1, P_2 என்னும் கட்டைகள், (a_1, y_1) (a_2, y_2) என்னுமிடங்களிலமைவதாகக் கொள்க.

dt என்னும் மிகச்சிறிய நேரத்தில், $d\phi$ என்னும் ஒரு சிறிய கோண இடப்பெயர்ச்சி ஏற்படும்போது,

$dy_1 = a_1 d\phi$, $dy_2 = -a_2 d\phi$ என்னும் இடப்பெயர்ச்சிகளை கட்டைகள் முறையே கீழ்நோக்கியும், மேல்நோக்கியும் பெறுகின்றன.

$$\therefore \quad \frac{dy_1}{dt} = a_1 \frac{d\phi}{dt}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -a_2 \frac{d\phi}{dt} \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் $\dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = a_1 \dfrac{d^2\phi}{dt^2}$, $\dfrac{d^2 y_2}{dt^2} = -a_2 \dfrac{d^2\phi}{dt^2}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} \bigg/ \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{a_1}{a_2},$$

அல்லது $\dfrac{f_1}{f_2} = -\dfrac{a_1}{a_2}$.

அல்லது $f_2 = -\dfrac{a_2}{a_1} f_1$ என்றாகும்.

f_1 என்னும் முடுக்கம் கீழ்நோக்கியுள்ளதால், கட்டைகளின் மேல் செயற்படும் சடத்துவவிசைகள், (inertia forces), முறையே,

$$F_1{}^i = \frac{1}{g} w_1 f_1 ;$$

$$F_2{}^i = \frac{1}{g} w_2 f_2 = -\frac{a_2}{a_1} \frac{w_2}{g} a_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$= -a_2 \frac{w_2}{g} \text{ ஆகும்.}$$

அத்தகைய சடத்துவ விசைகள் செயற்படும் திசைகள் படம் (9·20)-ஐ (444ஆம் பக்கத்தில்) காட்டியுள்ளவாறு உள்ளன. அவற்றையும் புறவிசைகளோடு சேர்க்கும்போது, பொருட்டொகுதி இயக்க இயல் அமைதி நிலையிலிருக்கும்.

O-பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களைக்கணக்கிட,

$$(w_1 - F_1{}^i)\, a_1 = (w_2 + F_2{}^i)\, a_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

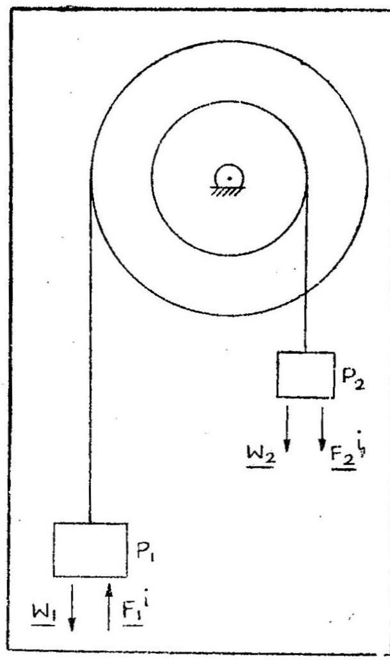
என்பது கிடைக்கும்.

(1), (2)-என்னும் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகாணும்போது,

$$f_1 = \left\{ \frac{w_1 a_1 - w_2 a_2}{w_1 a_1^2 + w_2 a_2^2} \right\} a_1 g,$$

$$f_2 = - \left\{ \frac{w_1 a_1 - w_2 a_2}{w_1 a_1^2 + w_2 a_2^2} \right\} a_2 g \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

ஆகும்.

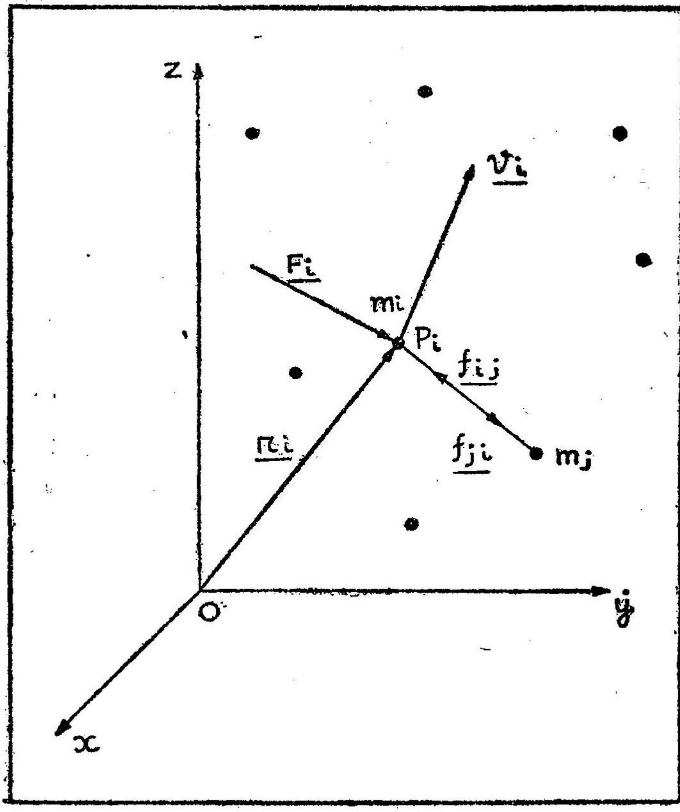


படம் 9·20.

9·10. துகள்களின் தொகுதிக்கு உரிய வேலை-ஆற்றல் சமன்பாடு (Work-Energy Equation for a system of particles)

n துகள்களின் தொகுதியானது படம் (9·21)-ல் காட்டியவாறு இருக்கட்டும். m_i, $i = 1, 2 \ldots n$ என்பது i-ஆவது துகளின் நிறையாகும். அது $\underline{r_i}$ என்னும் நிலைத்திசையியைப்பெற்ற P_i என்னும் புள்ளியில், t என்னும் நேரத்தில் இருப்பதாகக்கொள்க.

$\underline{F_i}$ என்பது m_i-என்னும் துகளில் செயற்படும் புறவிசைகளின் தொகுபயன் விசையைக் குறிக்கட்டும். $\underline{f_{ij}}$, ($j = 1, 2, \ldots n$, $j \neq i$) என்பது i-ஆவது துகள் j-ஆவது துகளிலிருந்து பெறும் உள் விசையைக் குறிக்கட்டும். இத்தகைய விசைகளால் m_i என்னும் துகள் தாக்கப்பட்டு, அது v_i என்னும் திசை வேகத்தில் இயங்குகிறதாகக்கொள்க.



படம் 9·21.

mi என்னும் துகள் ஒரு குறிப்பிட்ட உருவ அமைப்பிலிருந்து (from one configuration) மற்றொரு குறிப்பிட்ட உருவ அமைப்புக்கு (to another configuration) ஏதேனுமொரு பாதையில் செல்வதாகில், அத்துகளுக்குரிய "வேலை-ஆற்றல" சமன்பாடு,

$$\int_1^2 \underline{F_i} \cdot d\,\underline{r_i} + \int_1^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}} \cdot d\,\underline{r_i} \right) = \left(\frac{1}{2}\, mi\ \underline{v_i} \cdot \underline{v_i} \right)_2 - \left(\frac{1}{2}\, mi\ \underline{v_i} \cdot \underline{v_i} \right)_1$$

ஆகும். இங்கு $(\underline{vi})_1$, $(\underline{vi})_2$ என்பவை, முறையே, 1-வது, 2-வது உருவ அமைப்புக்களில், *i*-வது துகளின் திசைவேகங்களைக் குறிக்கின்றன.

இத்தகைய சமன்பாட்டை ஒவ்வொருதுகளுக்கும் வரையறுத்து. அவற்றின் குறியியல் கூட்டுத்தொகையைக் கணக்கிடலாம். அப்போது,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{1}^{2} \underline{Fi} \cdot d\, \underline{ri} + \sum_{i=1}^{n} \int_{1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}} \cdot d\, \underline{ri} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} mi\, \underline{vi} \cdot \underline{vi} \right)_2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} mi\, \underline{vi} \cdot \underline{vi} \right)_1$$

அதாவது, $U_{1-2} = T_2 - T_1$ ஆகும்.

இங்கு U_{1-2} என்பது, புறவிசை, உள்விசைகளனைத்தும் முதல் உருவ அமைப்பிலிருந்து, இரண்டாவது உருவ அமைப்புக்கு துகள் இயங்கும்போது செய்தவேலையைக் குறிக்கிறது. $T_2 - T_1$ என்பது துகள்களுடைய இயக்க ஆற்றல்களின் வேறுபாட்டைக் குறிக்கிறது. மேலும் துகள்களுக்கு இடேயே சாரிடப்பெயர்ச்சி (relative displacement) ஏற்படக்கூடியதால், உள் விசைகளனைத்தும் செய்யும் வேலையை வரையறுக்கும்,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{n} f_{ij} \cdot d\, \underline{r_i} \right)$$

என்னும் இயற்கணிதக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகாது.

சிற்சில வேளைகளில் புறவிசை, உள்விசைகளில் எவை காப்பு விசைகள் (Conservative forces) என உறுதியாகக் கூறமுடியும். அவ்விதக்காப்புவிசைகளுக்கு ஏற்றதான நிலை ஆற்றல்களைப் பயன் படுத்தும்போது, மேற்கூறிய ''வேலை-ஆற்றல்'' சமன்பாடு,

$$\Delta\ (T + V) = U_N \quad \text{என்றாகும்.}$$

இங்கு V என்பது காப்புவிசைகளெனக் கருதப்படும் புற, உள் விசைகளின் மொத்த நிலை ஆற்றலையும், V_N என்பது காப்புவிசைகளல்லாத புற, உள் விசைகள் செய்த நிகரவேலையையும் குறிக்கின்றன.

9·11. திணிவு மையத்தின் அடிப்படையில் இயக்க ஆற்றல் கோவையை வரையறுத்தல் (Kinetic energy expression based on Centre of mass.)

t என்னும் நேரத்தில் n துகள்களின் நிலைமைகள் படம் (9·22)-ல் காட்டியவாறு இருப்பதாகக்கொள்க.

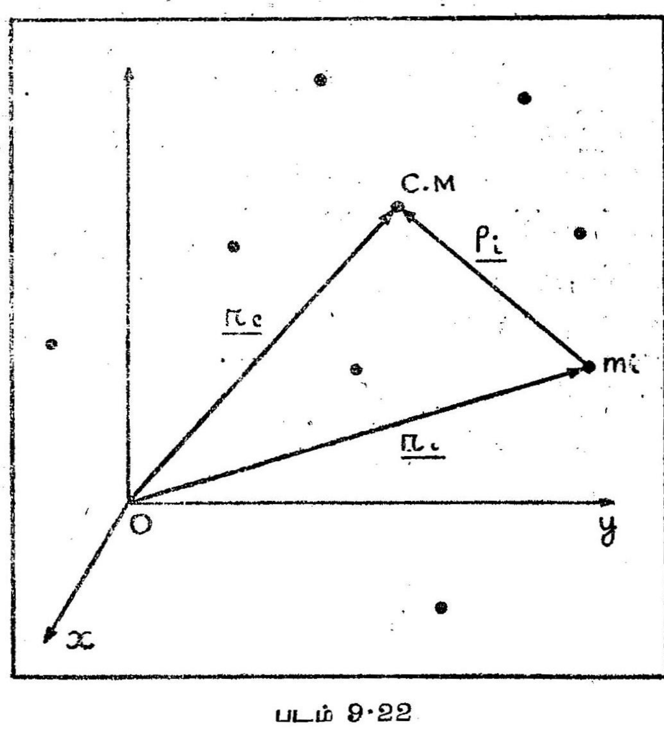
O-வைச் சுட்டமைப்பு புள்ளியாகக்கொண்டு, *mi* என்னும் துகளின் நிலைத்திசையியை $\underline{r_i}$ என்னும், துகள்களின் திணிவு மையத்தை வரையறுக்கும் *C. M.* என்னும் புள்ளியின் நிலைத் திசையியை $\underline{r_c}$ என்றும், *C. M.* புள்ளிபற்றி, *mi*-யின் நிலைத் திசையியை $\underline{P_i}$ என்றும் கொள்க.

அப்போது,

$$\underline{r_i} = \underline{r_c} + \underline{P_i} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \frac{d\,\underline{r_i}}{dt} = \frac{d\,\underline{r_c}}{dt} + \frac{d\,\underline{P_i}}{dt}$$

அதவது, $\underline{v_i} = \underline{v_c} + \underline{\dot{P}_i}$



படம் 9·22

எனவே, m_i என்னும் துகளின் திசை வேகம், திணிவு மையத்தின் திசைவேகத்தையும், திணிவு மையம் குறித்து m_i என்னும் துகளின் சார்புத் திசைவேகத்தையும் (velocity relative to the mass centre) சேர்த்து உண்டாகும் விளைவுக்குச் சமமாகும்.

t என்னும் நேரத்தில், துகள்களனைத்தும் பெறும் இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\underline{v_i} \, . \, \underline{v_i} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i} m_i \left(\underline{v_c} + \underline{\dot{P}_i} \right) . \left(\underline{v_c} + \underline{\dot{P}_i} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i} m_i \left(v_c^2 + 2 \, \underline{v_c} \, . \, \underline{\dot{P}_i} + \dot{P}_i^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum m_i v_c^2 + \sum m_i \, \underline{v_c} \, . \, \underline{\dot{P}_i} + \frac{1}{2} \sum m_i \, \dot{P}_i^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum m_i \right) v_c^2 + \underline{v_c} \, . \sum m_i \dot{P}_i + \frac{1}{2} \sum m_i \, \dot{P}_i^{\,2}$$

இங்கு $\sum m_i$ என்பது துகள்களின் மொத்த நிறையைக் குறிக்கிறது. அதை M எனக் கொள்க ; மேலும்,

$$\sum m_i \dot{P}_i = \sum m_i \frac{d}{dt} \underline{P_i} = \sum \frac{d}{dt} \left(m_i \, \underline{P_i} \right) = \frac{d}{dt} \sum m_i \, \underline{P_i}$$

ஆகும். $\sum m_i \underline{P_i}$ என்பது திணிவுமையம் குறித்து எடுக்கும் முதற்படி பெருக்குத் தொகையாகும் (First moment about the mass centre). ஆதலால், இதன் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

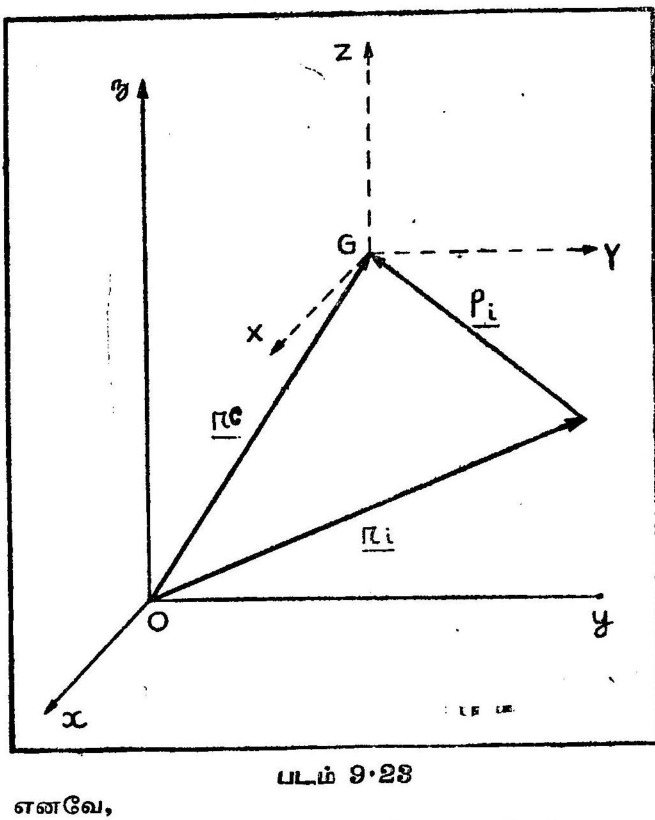
எனவே, துகட்டொகுதியின் இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i \dot{P}_i^{\,2} \quad \text{ஆகும்.}$$

ஆகவே, ஒரு நிலையான குறிப்பிட்டச்சு முறையைக் குறித்து துகள்களின் தொகுதிக்கு உரிய இயக்க ஆற்றல் கோவை இரு வகையான ஆற்றல்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

முதல் வகையில், $\frac{1}{2} M v_c^2$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட துகள்களின் மொத்த நிறையைப்பெற்ற துகளொன்று, திணிவு மையத்திலமைந்து, திணிவு மையத்தின் திசைவேகத்தில், நிலையான குறிப்பிட்டச்சு முறையைச் சார்ந்து இயங்கும் இயக்க ஆற்றலைக் குறிப்பதாகும். அல்லது துகள்களின் தொகுதியானது, அதன் திணிவு மையத்துடன் இயங்கும்போது, பெறும் இடப்பெயர்ச்சிக்குத் தகுதியான இயக்க ஆற்றல் எனக் (Kinetic energy due to translation of the system) கொள்ளப்படும்.

இரண்டாவது வகையில், $\frac{1}{2}\Sigma m_i \dot{P}_i^2$ என்பது, எடுத்த குறிப்பிட்டச்சு அமைப்பிலிருந்து நோக்கும்போது, திணிவு மையத்தைச் சார்ந்து. துகள்கள் இயங்குவதாகக்கருதி அவை ஒவ்வொன்றும் பெறும் இயக்க ஆற்றல்களின் கூடுதலைக்குறிப்பதாகும். அல்லது துகட்டொகுதிக்குரிய திணிவுமையம் பற்றி, துகள்களின் இயக்கத்தால் ஏற்படும் இயக்க ஆற்றலைக் குறிப்பதாகவும் (Kinetic energy of the motion of particles relative to the mass centre) கொள்ளப்படும்.



படம் 9·23

எனவே,

$$\left\{\begin{matrix}\text{துகட்டொகுதி} \\ \text{யின் இயக்க} \\ \text{ஆற்றல்}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{துகட்டொகுதி} \\ \text{திணிவு மையத்} \\ \text{தின் இயக்க} \\ \text{ஆற்றல்}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{திணிவுமையம் பற்} \\ \text{றித் துகள்களின்} \\ \text{இயக்க ஆற்றல்}\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{Kinetic energy} \\ \text{of the system}\end{matrix}\right\} = \begin{matrix}\text{Kinetic energy of} \\ \text{the Centre of mass}\end{matrix} + \left\{\begin{matrix}\text{Kinetic energy} \\ \text{about the Centre} \\ \text{of mass}\end{matrix}\right\}$$

$\dot{P_i}^2$ -என்பதின்மதிப்பு பின்வருமாறு கணிக்கப்படும்.

$$\dot{P_i}^2 = \left[\left(\frac{d\,P_i}{dt}\right)_{xyz}\right]^2 = \left[\left(\frac{d\,\underline{P_i}}{dt}\right)_{xyz}\right]^2$$

$$= \left[\left(\frac{d\,\underline{P_i}}{dt}\right)_{xyz} + \underline{w} \wedge \underline{P_i}\right]^2$$

இங்கு XYZ-என்பது, திணிவு மையப்புள்ளி $C.M.$-உடன் இயங்கும் சுட்டமைப்பு முறையைக் குறிக்கும். [படம் (9·23)-ஐப் 449ஆம் பக்கத்தில் பார்க்க]

$\underline{w}$ என்பது, நிலையான xyz-குறிப்பிட்டச்சு அமைப்பைச் சார்ந்து இயங்கும் XYZ-ன் கோணத்திசைவேகமாகும்.

9·12. திணிவு மையத்தின் அடிப்படையில் துகள்களின் தொகுதி ஒன்றிற்கு ஏற்றதான "வேலை - ஆற்றல்" கோவைகளைக் காணுதல் : (Work-kinetic energy expressions based on centre of mass)

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, துகள்களின் தொகுதி ஒன்றினுடைய திணிவுமையத்தின் இயக்கம்

$$\underline{F} = M\frac{d^2\,r_c}{dt^2} = M\,\ddot{r}_c \quad \text{ஆகும்.}$$

அத்தகைய திணிவு மையத்திற்குரிய "வேலை-ஆற்றல்" சமன்பாடு,

$$\int_1^2 \underline{F}\,.\,d\,\underline{r_c} = \left(\frac{1}{2}Mv_c^2\right)_2 - \left(\frac{1}{2}Mv_c^2\right)_1 \qquad \dots \quad (1)$$

இங்கு, வலதுபுறத்திலுள்ள மதிப்பு, துகள்களின் தொகுதியொன்றுபெறும், முதல் பகுதிக்கான (first part) இயக்க ஆற்றலின் வேறுபாட்டைக்குறிக்கிறது. இவ்வித இயக்க ஆற்றல் பகுதியானது, துகள்களின் மொத்த நிறைகளைப்பெற்றும், திணிவு மையத்திலமைந்துள்ள ஒரு கற்பனையான துகளின்மேல், புற விசைகளனைத்தும் செய்யும் வேலையுடன் தொடர்புப்படுத்தப் பட்டுள்ளதை, (1)-என்னும் சமன்பாடு வெளிப்படுத்துகிறது.

இயக்க ஆற்றலின் மற்றொரு பகுதிக்கும், விசைகளுக்குமுள்ள தொடர்பைக்காண, m_i என்றும் நிறையையுடைய i-ஆவது துகளின் இயக்க ஆற்றல் சமன்பாட்டை ஆராயவேண்டி வருகிறது.

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, m_i-என்னும் துகளின் இயக்கத்தை வரையறுக்கும் சமன்பாடு :

$$\underline{F_i} + \sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}} = mi \frac{d^2 \underline{r_i}}{dt^2} = m_i \frac{d \underline{v_i}}{dt} \text{ ஆகும்.} \qquad (2)$$

இங்கு $\underline{f_{ij}}$ என்பது, j-ஆவது துகள், i-ஆவது துகளின்மேல் செயற்படுத்தும் உள் விசையைக் குறிக்கிறது. மேலும், படம் (9·23)-ல் காட்டியவாறு,

$$\underline{r_i} = \underline{r_c} + \underline{P_i}$$

$$d\,\underline{r_i} = d\,\underline{r_c} + d\,\underline{P_i} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(2), (3) என்னும் சமன்பாடுகளில் அமையும் திசையிகளின் எண்ணிப் பெருக்கியை வரையறுத்து, 1-வது உருவ அமைப்பி லிருந்து, 2-வது உருவ அமைப்புக்கு, m_i என்னும் துகள் ஏதேனு மொரு பாதையிலியங்கும்போது, அதற்கு ஏற்றதான "வேலை-ஆற்றல்" சமன்பாடு, தொகை நுண்கணித முறைப்படி,

$$\int_1^2 \left(\underline{F_i} + \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \right) \cdot (d\,\underline{r_c} + d\,\underline{P_i})$$

$$= \int_1^2 m_i \frac{d\,\underline{v_i}}{dt} \cdot d\,\underline{r_i}$$

$$= \int_1^2 m_i \frac{d\,\underline{v_i}}{dt} \cdot \frac{d\,\underline{r_i}}{dt}\, dt$$

$$= \int_1^2 m_i \left(\frac{d\,\underline{v_i}}{dt} \cdot \underline{v_i} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 m_i \frac{d}{dt} (\underline{v_i} \cdot \underline{v_i})\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 m_i\, d(\underline{v_i} \cdot \underline{v_i})$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 m_i \, d\,(v_i^2)$$

$$= \frac{1}{2} m_i \left\{ (v_i^2)_2 - (v_i^2)_1 \right\}$$

= i-ஆவது துகளின் இயக்க ஆற்றல் மாற்றமாகும்.

இவ்வித "வேலை-ஆற்றல்" சமன்பாடு, ஒவ்வொரு துகளுக்கும் பொருந்துவதாதலால், மேற் கூறிய சமன்பாட்டின் கூட்டுத் தொகையால், n-துகள்களின் தொகுதிக்குரிய "வேலை-ஆற்றல்" சமன்பாட்டைப் பெறலாம். ஆதலால்,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\underline{F_i} + \sum_{J=i}^{n} \underline{f_{ij}} \right) \cdot (d\, \underline{r_c} + d\, \underline{P_i})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (v_i^2)_2 - \frac{1}{2} \Sigma\, m_i\, (v_i^2)_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \underline{F_i} \cdot d\, \underline{r_c} + \sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \underline{F_i} \cdot d\, \underline{P_i}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}} \cdot d\, \underline{r_c} + \sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}} \cdot d\, \underline{P_i}$$

= துகள்கள் அனைத்திற்குமான இயக்க ஆற்றல் மாற்றமாகும்

$$= \Delta\, [KE]_{1,\,2}$$

$$= \Delta \left\{ \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \Sigma\, mi\, \dot{P}_i^2 \right\}$$

$$= \Delta \left(\frac{1}{2} M v_c^2 \right) + \Delta \left(\frac{1}{2} \Sigma\, mi\, \dot{P}_i^2 \right) \qquad \ldots \qquad (4)$$

மேலும்,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_1^2 \underline{F_i} \cdot d\, \underline{r_c} = \Delta \left(\frac{1}{2} M v_c^2 \right),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{1}^{2} \sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}} \cdot d\,\underline{r_c} = \int_{1}^{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}} \right) \cdot d\,\underline{r_c}$$

$$= \int_{1}^{2} \underline{0} \cdot d\,\underline{r_c},$$ (∴ உள் விசைகளின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்)

$$= 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{1}^{2} \sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}} \cdot d\,\underline{P_i} = \int_{1}^{2} \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{n} (\underline{f_{ij}} \cdot d\,\underline{P_i})$$

$$\pm\ 0,$$ என்பதால்,

(4) என்னும் சமன்பாட்டின் இறுதியான நிலை

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{1}^{2} \underline{F_i} \cdot d\,\underline{P_i} + \sum_{i=1}^{n} \int_{1}^{2} \sum_{j=1}^{n} (\underline{f_{ij}} \cdot d\,\underline{P_i})$$

$$= \triangle \left(\frac{1}{2} \sum m_i \dot{P}_i^2 \right) \quad \ldots \quad (5)$$

ஆகும்.

ஆகவே, (1)-என்னும் சமன்பாடு, புறவிசைகளின் வாயிலாக, திணிவு மையத்தின் இயக்கத்தை விவரிக்கிறது. ஆனால் (5)-என்னும் சமன்பாடு, புற, உள் என்ற இருவகையான விசைகள் செய்யும் வேலைகளால், திணிவுமையத்தைச் சார்ந்து, துகள்களின் இயக்கத்தை விளக்குகிறது.

9·13. மாதிரிக் கணக்குகள்

9·13-1. 2 கிகி. 6கிகி. நிறைகளைப் பெற்ற இரு பொருள்கள், நிலையான வழவழப்பான, இலேசான ஒரு கப்பியின் மீது செல்லும் மீளவல்லாத கயிறு ஒன்றில் இணைக்கப்பட்டு ஓரேமட்டத்திலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றன. 100 செமீ. தொலைவு இயங்கிய பின், அத்தொகுதி பெறும் திசை வேகத்தைக் காண்க.

இங்கு பொருள்களின் எடைகள் மட்டுமே வேலையைச் செய்கின்றன. எனவே, எடைகள் செய்த வேலை

$= [2(-1{\cdot}0) \times 9{\cdot}81 + 6(1{\cdot}0) \times 9{\cdot}81]$ ஜூல்கள்

$= 39{\cdot}24$ ஜூல்கள்.

கயிறு மீள்சக்தியற்றதாகையால், இரு பொருள்களின் வேகங்கள் சமமாகும் (v : வேகம்). எனவே,
இயக்க ஆற்றலில் மாற்றம்

= இறுதி இயக்க ஆற்றல் — தொடக்க இயக்க ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2}(2+6)v^2 - 0 = 4v^2$$

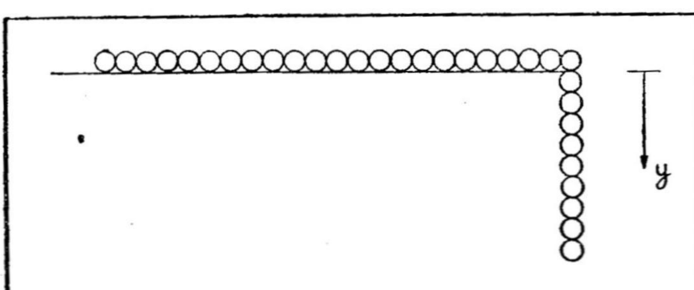
"வேலை—ஆற்றல்" தத்துவப்படி,

$$4v^2 = 39{\cdot}24$$

$$v^2 = 9{\cdot}81$$

$$v = 3{\cdot}132 \text{ மீ/விநாடி}$$

9.13.2. 6 கிகி எடையும், 1·8 மீ நீளமும் உள்ள சங்கிலியில், 1·2 மீட்டர் நீளமுள்ள பகுதி வழவழப்பற்ற மேசையின் மீது அமையுமாறும், மீதமுளள 0·6 மீ ப்குதி வழவழப்பான மேசையின் விளிம்பு வழியாகச் செலுத்தப்பட்டு தொங்கிய வண்ணம் அமைதி நிலையில், படம் (9·24)-ல் காட்டியவாறு, வைக்கப்பட்டுள்ளது



படம் 9·24.

உராய்வுக்கெழு 0·3 சங்கிலி விடுவிக்கப்பட்டு சங்கிலியின் இறுதிக் கண்ணி மேசையை விட்டு விலகும் தருணத்தில், அதன் திசை வேகத்தைக் காண்க.

தொடக்கத்தில் சங்கிலியின் திணிவு மையம்

$$\bar{y}_0 = \frac{4\times0+2\times0{\cdot}3}{4+2} = \frac{1}{10} \text{ மீ}$$ என்னும் தொலைவில் உள்ளது.

சங்கிலியின் இறுதிக்கண்ணி மேசையை விட்டு விலகும் போது $\bar{y}_1 = 0{\cdot}9$ மீட்டர் ஆகும்.

எனவே, சங்கிலியின் எடை செய்த வேலை $= 6\,(0{\cdot}9 - 0{\cdot}1) = 4{\cdot}8$ மீட்டர் கிகி ஒரு குறிப்பிட்ட தருணத்தில் y என்பது (மீட்டரில்) தொங்கிக்கொண்டிருக்கும் நீளத்தைக் குறிக்கட்டும். எனவே dy என்னும் ஓர் இடப் பெயர்ச்சியில், உராய்வு விசை செய்யும் (எதிர்) வேலை $= -\,0{\cdot}3\left(\dfrac{1{\cdot}8-y}{1{\cdot}8}\right)\times 6\,dy = -\,(1{\cdot}8 - y)\,dy$ எனவே, மொத்த இடப்பெயர்ச்சியில், உராய்வு விசை செய்யும் (எதிர்)வேலை

$$= -\int_{0\cdot6}^{1\cdot8}(1{\cdot}8 - y)\,dy = -\,0{\cdot}72 \text{ மீட்டர் கிகி ஆகும்.}$$

அப்பொழுது ''வேலை-ஆற்றல்'' சமன்பாட்டின்படி

$$4{\cdot}8 - 0{\cdot}72 = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{9{\cdot}81}\right)v^2$$

$$\text{அதாவது, } v = 3{\cdot}653 \text{ மீ/வினாடி}$$

மற்றொரு வழி : மேசையின் விளிம்பு வழவழப்பதாயிருப்பதால் சங்கிலியின் இழுவிசை அதன் நீளம் முழுவதிலும் ஒரே அளவுடையதாக இருக்கும். அவ்விழுவிசையை T எனக் கொள்க. சங்கிலியில் ஒருவித நீட்சியும் இல்லாத காரணத்தால் மேசை மீது உள்ள சங்கிலிப்பகுதி பெறும் வேகமும், முடுக்கமும் செங்குத்துத் திசையில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் சங்கிலிப் பகுதியடையும் வேகத்திற்கும், முடுக்கத்திற்கும் முறையே சமமாகும். v, a என்பவை முறையே பொது வேகத்தையும், முடுக்கத்தையும் குறிக்கட்டும்.

ஏதேனுமொரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் சங்கிலிப் பகுதியின் நீளம் x ஆகுக. அப்பகுதியை தனிப்படுத்தும் போது. அதன்மேல் அதற்குரிய எடையும். இழுவிசையும் செயல்படுகின்றன.

$$\text{எனவே, } \frac{x}{l}w - T = \frac{xw}{lg}a \quad \text{ஆகும்.}$$

அவ்வாறே மேசையின் மீதுள்ள பகுதியைத் தனிப்படுத்த உராய்வு விசையும், இழுவிசையும் அப்பகுதியின் மேல் செயல்படுகின்றன.

எனவே.

$$T - \mu\,(l-x)\,\frac{w}{l} = \frac{l-x}{l}\;\frac{w}{g}\,a \quad \text{ஆகும்.}$$

இச்சமன்பாடுகளை ஒன்று சேர்த்திட,

$$\frac{w}{l}\,[x-\mu\,(l-x)] = \frac{w}{g}a = \frac{w}{g}\,v\,\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore\quad \frac{g}{l}\int_{l/3}^{l}[(1+\mu)\,x-\mu l]\,dx = \int_{0}^{v} v\,dv$$

$$\frac{2gl}{9}(2-\mu) = \frac{v^2}{2}$$

$$\therefore\quad v = \frac{2}{3}\sqrt{gl\,(2-\mu)}$$

இங்கு $l = 1{\cdot}8$ மீ; $g = 9{\cdot}81$ மீ/வினுடி^{2}; $\mu = 0{\cdot}3$

ஆகவே $v = \frac{2}{3}\,[9{\cdot}81 \times 1{\cdot}8\,(2-0{\cdot}3)]^{1/2}$ மீ/வினுடி

$= 3{\cdot}6527$ மீ/வினுடி

9.13-3. $m=6$ கிகி, $m'=10$ கிகி நிறைகளைப் பெற்ற இரு பொருள்கள் திருகு சுருள்வில் ஒன்றை நெருக்கிய நிலையில் வைத்திருக்கின்றன. பொருள்களை விடுவிக்கும் போது, சுருள்வில் ஹூக்கின் விதியைப் பின்பற்றி மீள்கிறது. தொடக்கத்தில் சுருள் வில்லில் இழுவிசை 16 நியூட்டன்களாகவும், பிறகு 4 செ.மீ. மீட்சியை பெறும்போது, இழுவிசை 8 நியூட்டன்களாகவும் இருக்குமேயானல் அந்நேரத்தில், 6 கிகி நிறையைப் பெற்ற பொருளின் திசை வேகம் காண்க.

திருகு சுருள்வில் ஹூக்கின் விதியை பின்பற்றுவதால், $F = -KX$ ஆகும். அது மீட்சியைப் பெறும்போது. செய்தவேலை

$$= \int_{x_0}^{x} F dx = -\frac{1}{K}\int_{F^0}^{F} F dF = \frac{1}{2k}(F_0{}^2 - F^2) = \frac{1}{2k}(F_0+F)(F_0-F)$$

$$= \frac{1}{2}(F_0+F)(x-x_0) = \frac{1}{2}(16+8)(0.04-0)$$

$= 0{\cdot}48$ ஜூல்.

சுருள்வில் 4 செ.மீ மீட்சியைப் பெறும் தருணத்தில், பொருள்களின் வேகங்களை முறையே v, v' எனக் கொள்க.

சுருள்வில்லின் இழுவிசை, பொருள்களின் மேல் ஒரே நேர் கோட்டில் சமனுமெதிருமாகச் செயற்படுவதால், புறவிசைகளின் தொகுபயன் பூச்சியமாகும். எனவெ நேர்கோட்டு உந்தக்காப்பு விதிப்படி,

$$mv + m'v' = 0 \qquad \therefore \quad v' = -\frac{mv}{m'} \text{ ஆகும்.}$$

பொருட் டொகுதியில் ஏற்பட்ட இயக்க ஆற்றலில் மாற்றம்

$$= \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} m' v'^2 - 0$$

$$= \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} m' \left(-\frac{mv}{m'}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} mv^2 \left[1 + \frac{m}{m'}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \left[1 + \frac{6}{10}\right] v^2 = 4{\cdot}8\ v^2$$

பொருட் டொகுதிக்குரிய ''வேலை - ஆற்றல்'' சமன்பாட்டின்படி,

$$4{\cdot}8\ v^2 = 0{\cdot}48$$

$$\therefore \quad v = 0{\cdot}316 = \text{மீ/விநாடி}$$

9.13.4. 2.7 மீ நீளமும், 9 கிகி எடையுமுள்ள சங்கிலியொன்றின் கீழ்முனை தரையைத் தொடுமாறு நிறுத்திவைக்கப்பட்டு பின்பு கீழே விழுமாறு விடப்படுகிறது. சங்கிலியின் கடைக்கண்ணி தரையைத் தொடும்போது, தரையில் ஏற்படும் எதிர்த்தாக்க விசையின் சராசரி மதிப்பு யாது?

சங்கிலியின் நீளத்தை l எனவும், அதன் திறையை m எனவும் கொள்க. f என்பது தரையின் எதிர்தாக்க சராசரி விசையைக் குறிக்கட்டும். சங்கிலியின் எடை (W)யும், தரையின் மேல்நோக்கிய f என்னும் எதிர்த்தாக்கமும், சங்கிலியின் மேல் செயல்படும் புறவிசைகளாகும்.

t என்னும் நேரத்தில், y நீளமுள்ள சங்கிலிப் பகுதி தரையின் மேல் இருப்பதாகக் கொள்க. அடுத்து வரும் Δt என்னும் நேரத்தில் Δy என்னும் அளவுள்ள சங்கிலி v என்னும் வேகத்துடன் தரையை அடையும்போது ஏற்படும் உந்த மாற்றம் $= \frac{m}{l} \Delta y\, v$

வானவெளியிலுள்ள சங்கிலிப் பகுதியின் உந்தம் அவ்வப் பொழுது புவியீர்ப்பு முடுக்கம் காரணமாக அதிகரித்துக் கொண்டேயிருக்கிறது. அத்தகைய உந்தமாற்றம் தோராயமாக, $= m\left(1-\frac{y}{l}\right) g \,\Delta t$ ஆகும். அதற்கு இசைந்து ஏற்படும் தாக்களவை $= (w-f)\,\Delta t$

தாக்களவை — உந்தத்தத்துவச் சமன்பாட்டின் படி,

$$m\left(1-\frac{y}{l}\right)g\,\Delta t - \frac{m}{t}\,v\,\Delta y = (w-f)\,\Delta t$$

அதாவது $$m\left(1-\frac{y}{l}\right)g - \frac{m}{l}\,v\,\frac{\Delta y}{\Delta t} = w - f$$

Δt என்பது பூச்சியத்தை அடையும்போது, மேற்கூறிய சமன்பாடு, $m\left(1-\frac{y}{l}\right)g - \frac{m}{l}v^2 = w - f = mg - f$ ஆகும்.

எனவே $$f = \frac{mv^2}{l} + \frac{y}{l}\,mg$$

ஒவ்வொரு கண்ணியும் g என்னும் முடுக்கத்துடன் கீழ்நோக்கி விழுவதால், t என்னும் நேரத்தில் திசைவேகம்,

$$v = \sqrt{2gy}$$ என்றாகும்.

$\therefore \quad f = 3\,\frac{y}{l}\,w.$ இங்கு $y = l$ என்றுள்ளபோது

$f = 3w = 3 \times 9 = 27$ கிகி. ஆகும்.

(மற்றொரு வழி): t என்னும் நேரத்தில், y நீளமுள்ள சங்கிலிப் பகுதி தரையில் இருப்பதாகக் கொள்க. அப்பொழுது திணிவு மையத்தின், y-அச்சுத்தொலைவு, $\bar{y}$ ஆனது,

$$l\bar{y} = y \times (0) + (l-y) \times \left[\frac{l-y}{2}\right]$$ ஆகும்.

t-ஐக் குறித்து, மேற்கூறிய சமன்பாட்டின் வகைக்கெழுவைக் காணும்போது, $l\dot{\bar{y}} = -(l-y)\dot{y}$

$$\therefore \quad \dot{\bar{y}} = -\left(1-\frac{y}{l}\right)\dot{y}$$ ஆகும்.

எனவே, உந்தம் $m\dot{y} = +m\left(1 - \frac{y}{l}\right)(-\dot{y})$ ஆகும்

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{Ii} = (\Sigma\, mi)\,(\underline{v_c})_2 - (\Sigma\, mi\,(\underline{v_c})_1$$

என்னும் சமன்பாட்டில் $(v_c)_1$ என்பதை மாறிலியாகக்கொண்டு, வகைக்கெழுவைக்காணும்பொழுது,

$$\Sigma\, \underline{Fi} = \frac{d}{dt}\left\{\underline{v_c}\, \Sigma\, m_i)\right\}_2 \quad \text{ஆகும்.}$$

இங்கு $f = w + \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \frac{d}{dt}\left\{m\left(1 - \frac{y}{l}\right)(-\dot{y})\right\}$

$$= m\frac{\dot{y}^2}{l} + m\left(1 - \frac{y}{l}\right)(-\ddot{y})$$

முன்போலவே, $\dot{y}^2 = 2gy$, $\ddot{y} = g$ என்றுவதால்,

$$f - w = \frac{2mgy}{l} - mg + \frac{mgy}{l}$$

$\therefore\ f = \frac{3wy}{l}$ ஆகும்.

இங்கு $f = 3w = 27$ கி.கி. ஆகும்.

9·14. துகள்களின் தொகுதிக்கு ஏற்றதான நேர்கோட்டு உந்தத்தைக் காணுதல். (To find the linear momentum of a system of particles.)

mi, $i = 1, 2, \ldots n$ என்னும் நிறைகளைப்பெற்ற n துகள்கள் அடங்கிய தொகுதி ஒன்றை நோக்குக. அத்தொகுதியின் உள் விசைகள், இரட்டைகளாக (in pairs) ஒரே நேர்கோட்டில் சமனு மெதிருமாய் செயற்படுவதால், அவற்றின் குறியியற் கூடுதல் பூச்சியமாகும். அத்தொகுதியில் செயற்படும் புறவிசைகளின் தொகுபயன் விசையை $\underline{F}$ எனக்கொள்க.

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, அத்தொகுதியின் இயக்கத்தை,

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\underline{v_i}}{dt}$$

என்னும் சமன்பாடு வரையறுக்கிறது. இத்தகைய விசை, துகள் களின் தொகுதியின்மேல், $(t_2 - t_1)$ கால அளவிற்குச் செயற் படுமாயின்,

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{F}\, dt = \underline{I} \text{ புற} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\, \underline{v_i}}{dt} \right) dt$$

$$= \int_1^2 \sum_{i=1}^{n} d\,(m_i\, \underline{v_i})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_1^2 d\,(m_i\, \underline{v_i})$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i \right)_2 - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\, \underline{v_i} \right)_1 \quad (1)$$

எனவே, துகள்தொகுதியின்மேல், ஒரு குறிப்பிட்ட கால அளவிற்குச் செயற்படும் புறவிளைவு விசையின் தாக்களவை (Impulse), அக்கால இடைவெளியில் துகள்களின் நேர்கோட்டு உந்தத்தில் ஏற்படும் மாறுபாடுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும்.

பெரும்பாலும், தொகுதியிலடங்கிய துகள்கள் ஒவ்வொன்றின் இயக்கத்தையும் அறியவேண்டிய நிலைமைகள் இரா. மொத் தத்தில் தொகுதியின் இயக்கத்தைப்பற்றிய விவரங்களே தேவைப் படும். அவ்வித நிலைமைகளில், தொகுதியின் திணிவு மையத்தின் இயக்கமே சிறப்பைப்பெறும்.

திணிவு மையத்தின் நிலையை வரையறுக்கும் சமன்பாடு,

$$M\, \underline{r_c} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \underline{r_i} \quad \text{ஆகும்.}$$

மேற்கூறிய சமன்பாட்டை, t-ஐக்குறித்து, ஒருமுறை வகையீடு செய்யும்போது (differentiating once with respect to t)

$$M\, \underline{v_c} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \underline{v_i} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

என்பது கிடைக்கிறது.

இச்சமன்பாடு, துகள்களின் தொகுதிக்குரிய மொத்த உந்தம், துகள்களின் மொத்த நிறையைப்பெற்றும், திணிவு மையத்திலமைந்தும், அத்திணிவு மையத்தின் திசைவேகத்தைப்பெற்றும், கற்பனையால் உருவாக்கப்பட்டதுமான துகள் ஒன்றின் உந்தத்திற்குச் சமமாகும் என்பதை அறிவிக்கிறது.

(1)-வது சமன்பாட்டின் வலப்புறமதிப்பை, (2)-வது சமன்பாட்டால் ஈடுசெய்யும்போது,

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{F}\ dt = \underline{I}\ \text{புற} = M(\underline{v_c})_2 - M(\underline{v_c})_1$$ என்பது

கிடைக்கிறது.

எனவே, புறத்தாக்கனவையால் செயற்பட்டு இயங்கும், துகள்களின் தொகுதி ஒன்றில் ஏற்படும் உந்தமாற்றம், துகளின் மொத்த நிறையைப்பெற்றும், தொகுதிக்குரிய திணிவு மையத்தின் இயக்கத்தைப் பெற்றும், கற்பனையால் உருவாக்கப்பட்டதுமான துகள் ஒன்றில் ஏற்படும் உந்த மாற்றத்திற்குச் சமமாகும்.

இக்கூற்றை இயக்க விசையியல் பயனளிக்கும்வகையில் பின்வருமாறும் தெரிவிப்பது வழக்கம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் துகட்டொகுதி ஒன்றின் திணிவு மையத்தில் ஏற்படும் உந்தமாற்றம், அத்தொகுதியின்மேல் செயற்படும் புறத்தாக்கனவைகளின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும்.

குறியீடு முறையில், இக்கூற்று

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{I_i} = (\Sigma m_i)(\underline{v_c})_2 - (\Sigma m_i)(\underline{v_c})_1$$ என்னும்

சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

9.15. உந்தக்காப்பு அல்லது திணிவு வேகக்காப்பு (Conservation of Momentum)

தந்ததொரு நேரத்தில், துகள்களின் தொகுதியானது எவ்விதப் புறவிசைகளுக்கும் கட்டுப்படாமலிருக்குமெனில், அந்நேரத்தில், தொகுதியில் ஏற்படும் உந்தமாற்றம் பூச்சிய மாகும்.

அதாவது,

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{F}dt = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{v_i} \right)_2 - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{v_i} \right)_1$$ என்னும்

சமன்பாட்டில், $\underline{F} = 0$ ஆவதால்,

$$\int_{t_1}^{t_2} Fdt = 0$$ ஆகும்.

எனவே, $$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{v_i} \right)_2 - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{v_i} \right)_1 = 0$$

அதாவது, உந்தமாற்றம் பூச்சிய மாகிறது,

ஆகவே, $\underline{F} = 0$ என்றுள்ளபோது,

$$(\Sigma m_i \underline{v_i})_2 = (\Sigma m_i \underline{v_i})_1 = \text{ஒரு மாறிலியாகும்.}$$

இதுவே "நேர்கோட்டு உந்தக்காப்பு விதி" (Law of conseration of Linear Momentum) எனப்படும். இவ்விதியைப் பின் வருமாறும் வரையறுக்கலாம்.

புறவிசைக் கணத்தாக்களவைகளின் நிகரமதிப்பு பூச்சியமெனில், துகட்டொகுதியின் உந்தம் எந்நேரத்திலும் ஒரு மாறிலியாகும்.

மற்றும், (2)-வது சமன்பாட்டில், $\underline{F} = 0$ என்றாகும் போது,

$$M(\underline{v_c})_2 - M(\underline{v_c})_1 = 0$$ ஆகும்.

அதாவது, $M(\underline{v_c})_2 = M(\underline{v_c})_1 =$ ஒரு மாறிலி.

ஆதலால், பின்வரும் கூற்றும் உடனடியாகப் பெறப்படும்.

எவ்விதப் புறவிசைகளுக்கும் கட்டுப்படாத துகட்டொகுதி ஒன்றின் திணிவுமையம், ஒரு நேர்கோட்டிலேயே சீரான திசை வேகத்துடனியங்கும்.

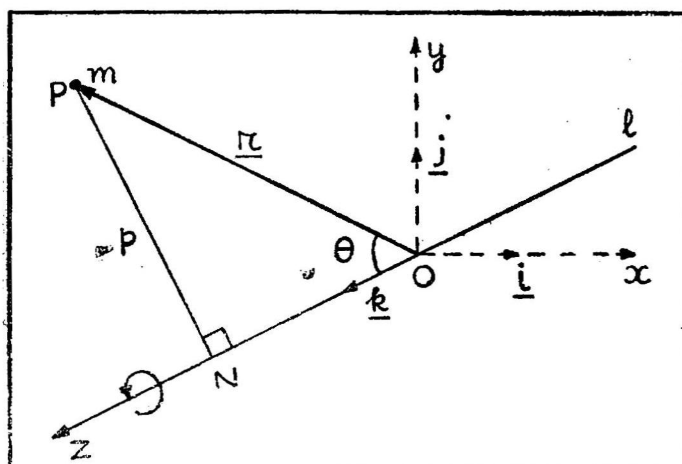
10. நிலைமத்திருப்புதிறன்

(Moment of Inertia)

கட்டிறுக்கப் பொருள்களின் இயக்கத்தை அறிவதில் முக்கிய பங்கு பெறுவது நிலைமத் திருப்புதிறனாகும்.

10-1. நிலைமத்திருப்புதிறன்.

ஒரு குறிப்பிட்ட நேர்கோட்டிலிருந்து, p தொலைவிலுள்ளதும், m நிறையையுடையதுமான துகள் ஒன்று, அக்கோட்டினை



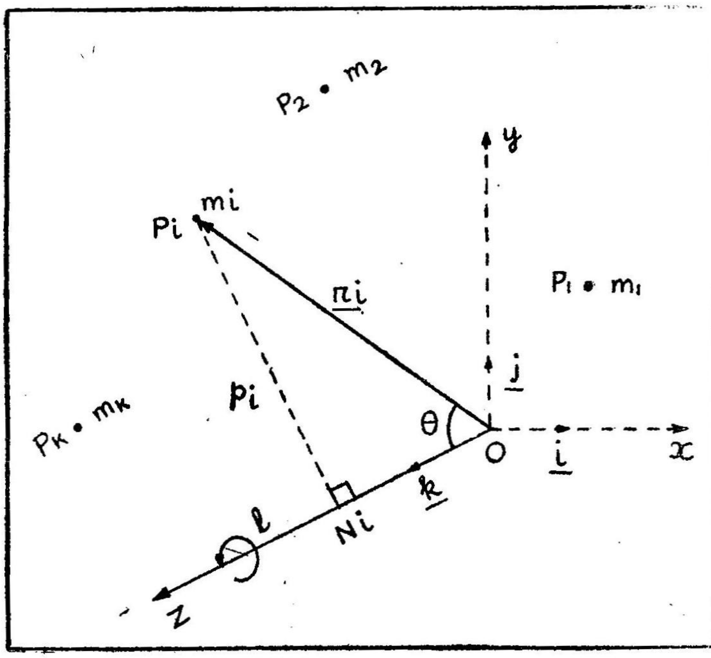
படம் 10·1.

அச்சாகக்கொண்டு சுழலுமாயின், mp^2 என்னும் பெருக்கற்பலன் அக்கோட்டைப்பற்றிய, அத்துகளின் நிலைமத்திருப்புதிறன் எனப்படும்.

எனவே,

நிலைமத்திருப்புதிறன் = நிறை × (தொலைவு ^{2} ஆகும்.

அவ்வாறே, $m_1, m_2,$ $mi,$ ... ... mn என்னும் நிறைகளை யுடைய துகள்கள், படம் (10·2)-ல் காட்டியவாறு, l-என்னும் ஒரு



படம் 10·2

குறிப்பிட்ட நேர்கோட்டிலிருந்து, முறையே $p_1, p_2,$ ... $pi,$ ... pn என்னும் தொலைவுகளில் இருப்பின், அத்தொகுதியின், அக் கோட்டைப்பற்றிய நிலைமத்திருப்புதிறன்

$$I = m_1p_1^2 + m_2p_2^2 + \dots m_ip_i^2 + \dots m_np_n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, p_i^2 \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பிட்ட நேர்கோட்டை Z அச்சாகக்கொண்ட, xoy-என்னும் சுட்டமைப்பில், $\underline{r}$ என்பது துகளின் நிலைத்திசையியை, படம் (10·1)-ல் காட்டியவாறு, வரையறுப்பதாகில்,

$$\underline{k} \wedge \underline{r} = 1 \cdot r \sin\theta \ \underline{n^+}$$ ஆகும்.

[இங்கு n^+ என்பது $(\underline{k}, \underline{r})$ தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையிலமையும் ஓரலகுத் திசையியாகும்.]

மேலும் θ என்பது z அச்சுக்கும், $\underline{r}$ -க்கும் இடையிலமையும் கோணமாகும்.

$$\therefore \ (\underline{k} \wedge \underline{r}) \cdot (\underline{k} \wedge \underline{r}) = (r \sin\theta \ \underline{n^+}) \cdot (r \sin\theta \ \underline{n^+})$$

அதாவது $|\underline{k} \wedge r|^2 = r^2 \sin^2\theta = p^2$ ஆகும்.

எனவே துகளின், l-ஐப்பற்றிய, நிலைமத் திருப்புதிறனை

$$I = mp^2 = |\underline{k} \wedge \underline{r}|^2 m$$ எனவும் எழுதலாம்.

அவ்வாறே, துகட்டொகுதியின், z அச்சைப்பற்றிய, நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i p_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i |k \wedge \underline{r_i}|^2$$ என்றாகும்.

$\underline{\varphi}$ என்னும் ஏதேனுமொரு ஓரலகுத் திசையிக்கு இணையாக O வழியே எடுக்கும் அச்சைப்பற்றிய, துகளொன்றின் நிலைமத் திருப்புதிறன்,

$$I = |\varphi \wedge \underline{r}|^2 m$$ ஆகும்.

10·1.1. ஒரு குறிப்பிட்ட அச்சுபற்றிய, கட்டிறுக்கப் பொருளின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

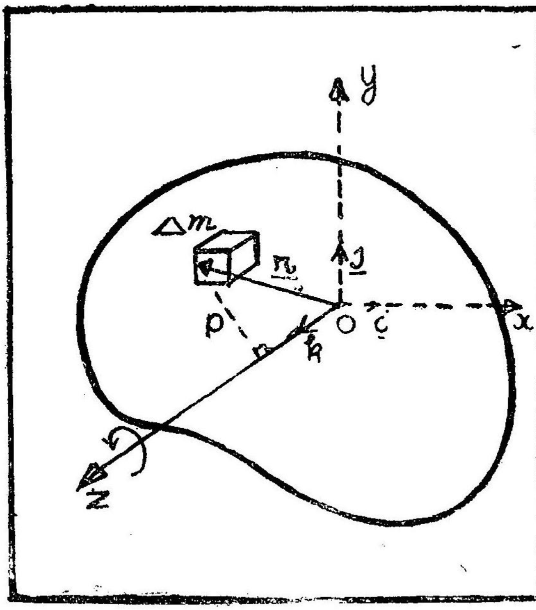
கட்டிறுக்கப் பொருள் என்பது, $\triangle m$ நிறையுடைய எண்ணற்ற துகள்களைத் தொடர்ச்சியாகக் கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வதால், z-அச்சைப்பற்றிய, அதன் நிலைமத் திருப்புதிறன்,

$$I = \underset{\triangle m \to 0}{\text{எல்லை}} \sum p^2 \triangle m$$

$$= \underset{\triangle m \to 0}{\text{எல்லை}} \sum |k \wedge \underline{r}|^2 \triangle m$$

$$= \int_m |\underline{k} \wedge \underline{r}|^2 dm$$ ஆகும்.

இங்கு கட்டிறுக்கப்பொருளின் நிறை முழுவதும் அடைபடும் வகையில் தொகையீட்டு எல்லைகள் வரையறுக்கப்படும்.



படம் 10·3

10·1.2. சுழற்சி ஆரம் (Radius of gyration)

பொருள் நிறை M முழுவதும் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தில் செறிந்துள்ளதாகக் கொண்டு, அப் புள்ளி குறிப்பிட்ட அச்சிலிருந்து K தொலைவிலிருக்குமெனில்,

$$MK^2 = \int p^2\,dm \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{அதாவது} \quad K^2 = \frac{\int_m p^2\,dm}{\int_m dm} \text{ என்றாகும்.}$$

K என்பது, பொருளின், அக் குறிப்பிட்ட அச்சைப்பற்றிய சுழற்சி ஆரம் எனப்படும்.

10·1.3. நிலைமத் திருப்புதிறனின் அலகுகள்

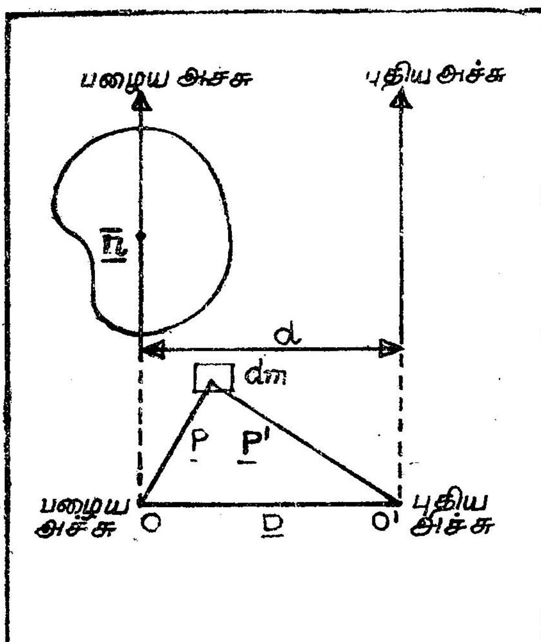
மெட்ரிக் 'CGS' முறையில், நிலைமத் திருப்புதிறனின் அலகுகள், கிராம் – (செ.மீ.)^2 ஆகும்.

மெட்ரிக் 'MKS' முறையில், அதன் அலகுகள், கிலோகிராம் – (மீ.)^2 ஆகும்.

பிரிட்டன் 'FPS' முறையில், அதன் அலகுகள், பவுண்டு – (அடி)^2 ஆகும்.

10·2. இணை அச்சுத் தேற்றம் (The parallel-axis theorem)

கட்டிறுக்கப் பொருளின் திணிவு மையத்தின்வழியே செல்லாத ஏதேனுமோர் அச்சைப்பற்றிய சுழற்சிக்கு, அவ்வச்சைப் பற்றிய $\overline{p}^1$ என்னும் சுழற்சி ஆரமானது, அவ்வச்சிற்கு இணையாகத்திணிவு மையத்தின் வழியே வரையப்படும் அச்சைப்பற்றிய $\overline{p}$ என்னும் சுழற்சி ஆரம், அவ் விணை அச்சுகளின் இடைத்தொலைவு d ஆகிய வற்றைக் கொண்டு $p^{1^2} = \overline{p}^2 + d^2$ என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.



படம் 10 4

dm என்பது கட்டிறுக்கப் பொருளின் ஒரு சிறிய மூலக உறுப்பின் நிறையைக் குறிக்கட்டும். அச் சிறிய நிறையின் வழியே, இரு இணை அச்சுகளுக்குச் செங்குத்தாக அமையும் தளத்தை எடுக்க. படம் (10·4)-ல், O, O' என்பவை, அவ் விணை அச்சுகள் தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளைக் குறிக்கட்டும். O, O' என்னும் புள்ளிகளிலிருந்து dm என்னும் மூலக உறுப்பின் நிலையை $\underline{P}$, $\underline{P}'$ என்னும் திசையிகள் வரையறுக்கட்டும். $\underline{D}$ என்பது O, O' என்னும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் திசையியாகுக.

எனவே,

$$\underline{P'} = \underline{P} - \underline{D} \quad \text{ஆகும்.}$$

இதன் அமைப்பு படம் (10·4)-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

கட்டிறுக்கப் பொருளின் புதிய அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன்,

$$I' = \int_m p'^2 \, dm$$

$$= \int_m (\underline{P'} \cdot \underline{P'}) \, dm$$

$$= \int_m (\underline{P} - \underline{D}) \cdot (\underline{P} - \underline{D}) \, dm$$

$$= \int_m (\underline{P} \cdot \underline{P}) \, dm - 2\int_m (\underline{P} \cdot \underline{D}) \, dm + \int_m (\underline{D} \cdot \underline{D}) dm$$

$$= \int_m p^2 \, dm - 2 \, \underline{D} \cdot \int_m \underline{P} \, dm + d^2 \int_m dm$$

$= I - 2 \, \underline{D} \cdot (M \times$ பழைய அச்சிலிருந்து திணிவு மையத்திற்குள்ள செங்குத்துத் தொலைவு) $+ Md^2$

$$= I - 2 \, \underline{D} \cdot M \times O + Md^2$$

$$= I + Md^2,$$

அல்லது, $\dfrac{I'}{M} = \dfrac{I}{M} + d^2,$

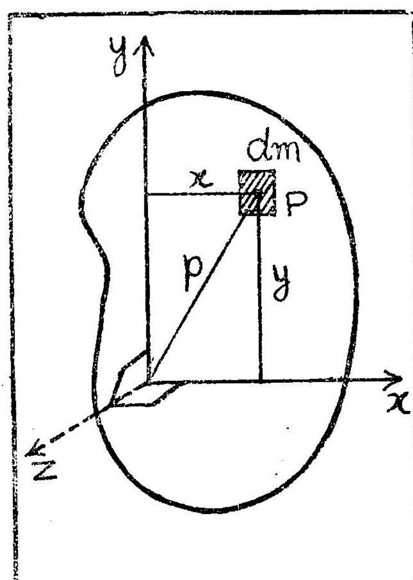
அதாவது, $\bar{p}'^2 = \bar{p}^2 + d^2$ ஆகும்.

எனவே, M நிறையுடைய ஒரு பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செல்லும் ஏதேனுமோர் அச்சைப்பற்றி அதன் நிலைமத் திறன் I என்றால், அந்த அச்சிற்கு இணையாக அதிலிருந்து d தொலைவிலுள்ள மற்றோர் அச்சைப்பற்றிய பொருளின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I^1 = I + Md^2 \quad \text{ஆகும்.}$$

10·3. செங்குத்தச்சுத் தேற்றம் (The Perpendicular-axis Theorem)

ஒரு தளத்தட்டிலமையும் (plane lamina) ox, oy என்னும் இரு செங்குத்தச்சுகளைப் பற்றிய, அத் தகட்டின் நிலைமத் திருப்பு திறன்கள் முறையே, I_x, I_y என்றால், O-வழியே அத் தட்டிற்குச் செங்குத்தாக வரையும் oz என்னும் அச்சு பற்றிய அதன் நிலைமத் திருப்புதிறன் $I_z = I_x + I_y$ ஆகும்.



படம் 10·5

படம் (10·5)-ல், dm என்பது, $P(x, y)$ என்னுமிடத்தில் அமையும் துகளின் நிறையைக் குறிக்கட்டும். $OP = p$ ஆகுக.

oz-பற்றி அத் துகளின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= dm \cdot p^2$$

$$= dm\,(x^2 + y^2) \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, oz பற்றி, தட்டின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I_z = \int_m (x^2 + y^2)\, dm$$

$$= \int_m x^2 dm + \int_m y^2 dm$$

$$= I_y + I_x$$

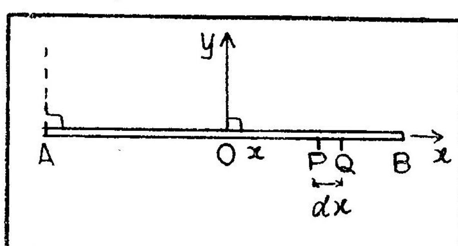
$$= I_x + I_y$$

[குறிப்பு : இத் தேற்றம், தளத்திலமையும் தட்டு போன்ற பொருள்களுக்கு மட்டுமே ஏற்றதாகும். கட்டிறுக்கப் பொருள்களுக்கு இது பொருந்தாது.]

10·4. சில கட்டிறுக்கப் பொருள்களின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

10·4.1. ஒரு சீரான கோல் (Uniform rod)

படம் (10·6)-ல், AB என்பது சீரான கோலைக் குறிக்கட்டும். $AB = 2a$ ஆகுக. அதன் நிறை M ஆகுக. o என்பது அதன் மையத்தைக் குறிக்கட்டும். oy என்பது, கோலுக்குச் செங்குத்தாக அமையும் அச்சைக் குறிக்கிறது. கோலின் அடர்த்தி ρ ஆகுக.



படம் 10·6

$\therefore$ oy பற்றிய, அக் கோலின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \int_m p^2 dm$$

$$= \int_{-a}^{+a} x^2 (\rho dx)$$

$$= 2\rho \frac{a^3}{3} = (2a\rho)\frac{a^2}{3} = M\frac{a^2}{3} \text{ ஆகும்.}$$

A என்னும் முனைவழியே *oy*-யிற்கு இணையாகச் செல்லும் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன், இணையச்சுத் தேற்றத்தின் படி,

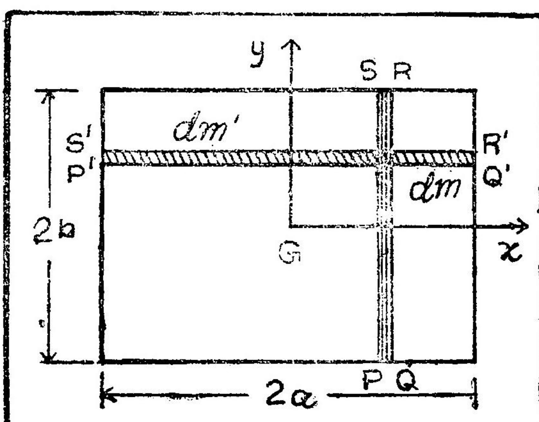
$$= M\frac{a^2}{3} + Ma^2 = \frac{4Ma^2}{3} \text{ ஆகும்.}$$

10·4.2. சீரான செவ்வகத் தட்டு

ABCD என்பது $2a$, $2b$ என்ற பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு செவ்வகமாகுக. அதன் திணிவு மையம் *G* ஆகுக.

M என்பது அதன் நிறையைக் குறிக்கட்டும்.

Gx, *Gy* என்பவை படம் (10·7)-ல் காட்டியவாறு *AB*, *DA*-வுக்கு இணையான அச்சுகளைக் குறிக்கட்டும். (10·7) ஆவது படத்தில், *PQRS* என்பது *Gx*-க்குச் செங்குத்தாக எடுத்த துண்டாகும்.



படம் 10·7

dm என்பது அதன் நிறையைக் குறிக்குமெனில், *Gx* பற்றி அதன் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= dm \times \frac{b^2}{3} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, *Gx* பற்றிச் செவ்வகத் தட்டின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \int_m \frac{b^2}{3}\, dm = \frac{b^2}{3}\int_m dm = M\frac{b^2}{3}$$

அவ்வாறே Gy பற்றி, செவ்வகத் தட்டின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \int_m \frac{a^2}{3} dm' = \frac{a^2}{3} \int_m dm' = M \frac{a^2}{3}$$

G வழியே தட்டின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக எடுக்கும் அச்சு பற்றி நிலைமத் திருப்புதிறன், செங்குத்தச்சுத் தேற்றத்தின்படி

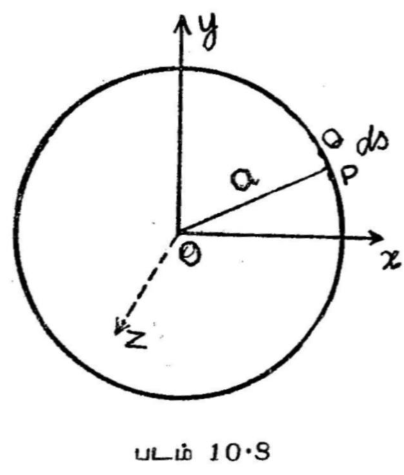
$$= \frac{M}{3}(a^2 + b^2) \quad \text{ஆகும்.}$$

10·4.3. a என்னும் ஆரமுடைய சீரான வட்ட வளையம்

(i) மையத்தின் வழியாக வட்ட வளையத்தின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் oz என்னும் அச்சு பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I_z = \int_m p^2 dm$$

$$= \int_m \rho\, ds\, a^2 = a^2\rho \int_0^{2a\pi} ds = (2a\pi\rho)\, a^2 = Ma^2$$



படம் 10·8

(ii) ஏதேனுமொரு விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன், $I = I_x = I_y$ ஆகும்.

ஆனால், $I_z = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y = Ma^2$

$$\therefore \quad I = I_x = I_y = \frac{Ma^2}{2}$$

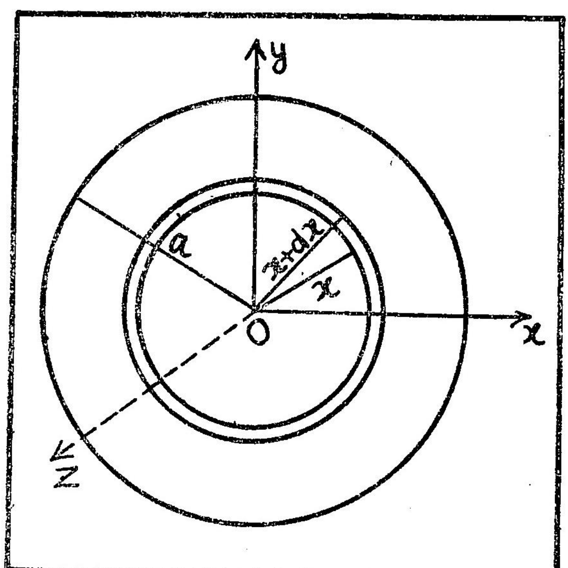
(iii) வளையத்தின் தளத்தில் ஏதேனுமொரு தொடுவரைபற்றி நிலைமத் திருப்புதிறன் $= \frac{Ma^2}{2} + Ma^2 = \frac{3Ma^2}{2}$

(iv) வளையத்தின் பரிதியில் ஏதேனுமொரு புள்ளிவழியே வளையத்திற்குச் செங்குத்தாக வரையும் கோடு பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

10·4.4. சீரான வட்டத் தகடு

ox, *oy* என்பவை தகட்டின் தளத்திலமையும் கிடை, நிலை அச்சுகள்; *oz* என்பது தகட்டிற்குச் செங்குத்தான அச்சாகும்.



படம் 10·9

(i) $I_z = \int_0^a x^2 dm = \int_0^a x^2 (2\pi x dx)\rho = 2\pi\rho \cdot \frac{a^4}{4}$

$$= (\pi\rho a^2)\frac{a^2}{2} = M\frac{a^2}{2}.$$

(ii) I = வட்டத்தகட்டின் ஏதேனுமொரு விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = M\frac{a^2}{4}$$

(iii) வட்டத் தகட்டின் ஏதேனுமொரு தொடுகோட்டைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் $= \frac{Ma^2}{4} + Ma^2 = \frac{5Ma^2}{4}$

(iv) வட்டத் தகட்டின் பரிதியில் ஏதேனுமொரு புள்ளி வழியே வட்டத் தகட்டிற்குச் செங்குத்தாக வரையும் கோடுபற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

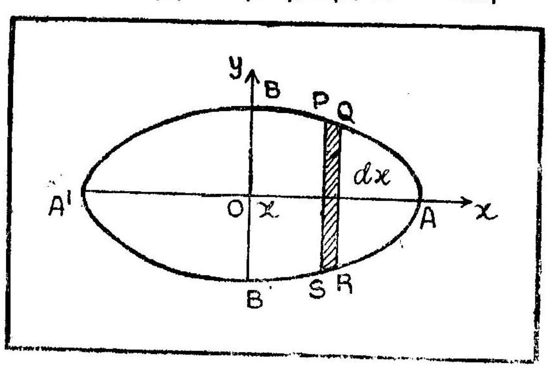
$$= \frac{Ma^2}{2} + Ma^2 = \frac{3Ma^2}{2}$$

10·4.5. சீரான நீள்வட்டத் தகடு

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

சீரான நீள் வட்டத்தகட்டின் நிறை, $M = \pi ab\rho$



படம் 10·10

(i) I_z = நெட்டச்சு பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்,

$$= \int_{-a}^{+a} (2ydx\rho)\,\frac{y^2}{3} = \frac{4\rho}{3}\int_0^a y^3\,dy$$

$$= \frac{4\rho}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{4\rho b^3}{3a^3} \int_0^{\pi/2} a^3 \cos^3\theta \; a\cos\theta \; d\theta.$$

($x = a \sin\theta$ எனில்)

$$= \frac{4a\rho b^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \, d\theta$$

$$= \frac{4a\rho b^3}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = (\pi ab\rho)\frac{b^2}{4} = M\frac{b^2}{4}$$

(ii) அவ்வாறே சிற்றச்சு பற்றிய நீள்வட்டத் தகட்டின் நிலைமத் திருப்பு திறன், $I_y = M\frac{a^2}{4}$

(iii) I_z = நீள் வட்டத் தகட்டின் திணிவு மையப்புள்ளி வழியே அதற்கு வரையும் செங்குத்து அச்சுபற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= I_y + I_x = M\frac{a^2}{4} + M\frac{b^2}{4} = \frac{M}{4}(a^2 + b^2)$$

10·4.6. சீரான உள்ளீடற்ற உருளை (Hollow circular cylinder)

a, h, M என்பவை முறையே உள்ளீடற்ற சீரான நேர்வட்ட உருளையின் ஆரை, உயரம், நிறை ஆகியவற்றைக் குறிக்கட்டும்.

(i) அதன் அச்சுபற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \int_m dm\,a^2 = a^2 \int dm = Ma^2$$

(ii) அதனை உருவாக்கும் கோடுபற்றி (generating line) நி. தி.

= உருளையின் அச்சுபற்றி நிலைமத் திருப்பு திறன் $+Ma^2$

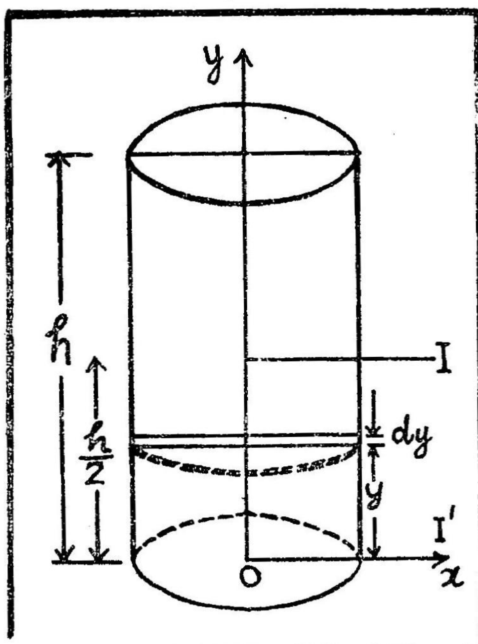
$= 2\,Ma^2$

(iii) அதன் ஒரு வட்ட முனையின் விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் $= \int_m \left(dm \cdot \frac{a^2}{2} + dm y^2 \right)$

$$= \int_0^h \left(\frac{a^2}{2} + y^2 \right) 2\pi a \rho dy$$

$$= 2\pi a \rho \left[\frac{a^2}{2} h + \frac{h^3}{3} \right]$$

$$I' = M\left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right), \quad (M = 2\pi a h \rho)$$



படம் 10·11

(iv) அதன் மையத்தின் வழியே, அதன் நீளத்திற்கு நேர் குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன் $= I$ ஆகுக.

இணை அச்சுத் தேற்றத்தின் படி,

$$I + M\left(\frac{h}{2}\right)^2 = I'$$

$$= M\left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)$$

$$\therefore \quad I = M\left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right) - M\frac{h^2}{4}$$

$$= \frac{M}{12}(6a^2 + 4h^2 - 3h^2)$$

$$= \frac{M}{12}(h^2 + 6a^2)$$

10·4.7. சீரான திண்ம நேர்வட்ட உருளை (Uniform solid cylinder)

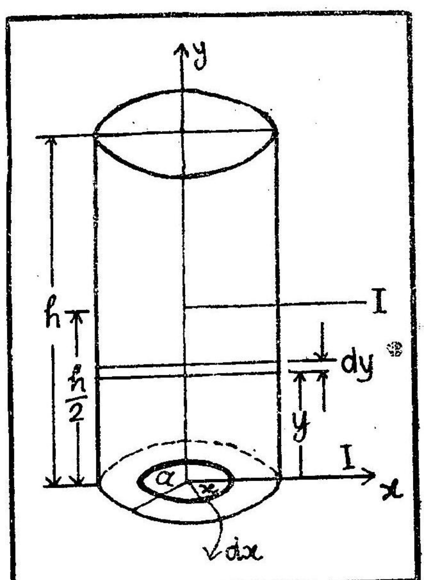
a, h, M என்பவை முறையே, சீரான திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் ஆரை, உயரம், நிறை ஆகியவற்றைக் குறிக்கட்டும்.

$$M = \pi a^2 h\rho; \quad dm = \pi a^2 \rho dy$$

(i) அதன் அச்சுபற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \int_m dm \frac{a^2}{2} = M\frac{a^2}{2} \text{ அல்லது,}$$

$$\left[= \int_0^a (2\pi x dx h\rho)\, x^2 = 2\pi\rho h \times \frac{a^4}{4} = \frac{Ma^2}{2} \right]$$



படம் 10·12

(ii) அதன் பிறப்பிக்கும் கோடுபற்றி நிலைமத் திறன்

= உருளையின் அச்சுபற்றி நிலைமத்

$$\text{திறன்} + Ma^2 = \frac{Ma^2}{2} + Ma^2 = \frac{3Ma^2}{2}$$

(iii) அதன் ஒரு வட்ட முனையின் விட்டத்தைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன்,

$$I' = \int_m \left(dm \frac{a^2}{4} + dm\, y^2 \right)$$

$$= \int_0^h \left(\frac{a^2}{4} + y^2 \right) \pi a^2 \rho\, dy$$

$$= \pi a^2 \rho \left[\frac{a^2}{4} h + \frac{h^3}{3} \right]$$

$$= M \left[\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right]$$

(iv) அதன் மையத்தின் வழியே, அதன் நீளத்திற்கு நேர் குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன் $= I$ எனக் கொள்க.

இணை அச்சுத் தேற்றத்தின்படி,

$$I + M\left(\frac{h}{2}\right)^2 = I' = M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right)$$

$$\therefore \quad I = M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right) - M\frac{h^2}{4}$$

$$= \frac{M}{12}(3a^2 + h^2)$$

10·4.8. சீரான உள்ளீடில் கோளம் (Uniform hollow sphere)

a, M என்பவை முறையே, சீரான உள்ளீடில் கோளம் ஒன்றின் ஆரை, நிறை ஆகியவற்றைக் குறிக்கட்டும்.

$$M = 4\pi a^2 \rho, \quad dm = 2\pi y \rho\, ds$$

(i) கோளக் கூட்டின் விட்டம்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \int (2\pi y \rho\, ds)\, y^2$$

$$= 2\pi\rho \int_{-a}^{a} y^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi\rho \int_{-a}^{+a} y^3 \cdot \frac{a}{y}\, dx$$

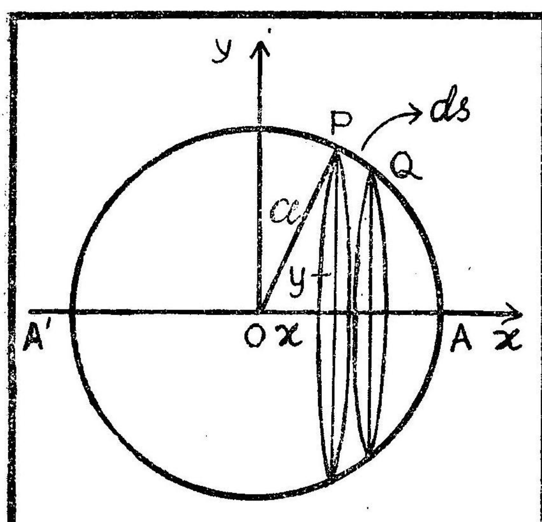
$$= 4a\pi\rho \int_{0}^{a} y^2\, dx$$

$$= 4a\pi\rho \int_{0}^{a} (a^2 - x^2)\, dx$$

$$= 4a\pi\rho \left[a^3 - \frac{a^3}{3} \right]$$

$$= (4\pi a^2 \rho) \cdot \frac{2a^2}{3}$$

$$= M \cdot \frac{2a^2}{3}$$



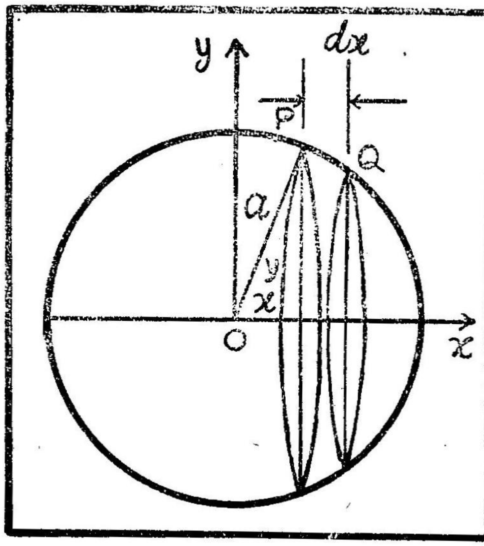
படம் 10·13

(ii) கோளக் கூட்டின் ஏதேனுமொரு தொடுகோடுபற்றிய நிலைமைத் திருப்புதிறன்

$$= M\frac{2a^2}{3} + Ma^2 = \frac{5Ma^2}{3}$$

10·4.9. சீரான திண்மக் கோளம் (Uniform solid sphere)

$$M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho, \quad dm = \pi y^2 dx \rho$$



படம் 10·14

(i) திண்மக் கோளத்தின் ஏதேனுமொரு விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \int_{-a}^{+a} (\pi y^2 dx \rho) \frac{y^2}{2}$$

$$= \frac{\pi\rho}{2} \int_{-a}^{+a} y^4 dx$$

$$= 2 \times \frac{\pi\rho}{2} \int_{0}^{a} (a^2 - x^2)^2 \, dx$$

$$= \pi\rho \int_{0}^{\pi/2} a^4 \cos^4\theta \; a \cos\theta \; d\theta, \quad (x = a \sin\theta)$$

$$= \pi Pa^5 \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3} \times \frac{2a^2}{5}$$

$$= M \cdot \frac{2a^2}{5}$$

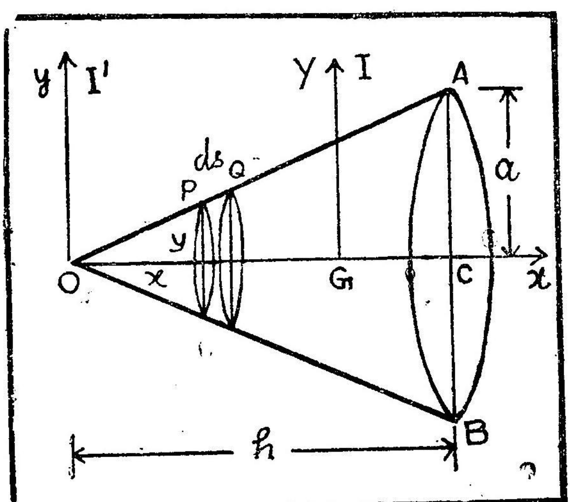
(ii) ஏதேனுமொரு தொடுகோட்டைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன்

$$= \frac{2Ma^2}{5} + Ma^2 = \frac{7Ma^2}{5}$$

10 4-10. சீரான உள்ளீடில் கூம்பு (Hollow cylinder).

a, h, l, M என்பவை முறையே, உள்ளீடில் கூம்பின் அடிமட்ட ஆரம், உயரம், சாய்வு உயரம், நிறை ஆகியவற்றைக் குறிக்கட்டும்

$$M = \pi alP; \quad dm = 2\pi yds\,P, \frac{y}{a} = \frac{x}{h}$$



படம் 10·15.

(i) அதன் அச்சுபற்றி நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \int 2\pi ydsP \cdot y^2$$

$$= 2\pi P \int_{x=0}^{x=h} y^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= 2\pi P \int_0^h y^3 \cdot \frac{l}{h}\, dx$$

$$= \frac{2\pi Pl}{h} \frac{a^3}{h^3} \int_0^h x^3 dx$$

$$= \frac{2\pi Pla^3}{h^4} \cdot \frac{h^4}{4}$$

$$= (\pi alP) \cdot \frac{a^2}{2}$$

$$= M \cdot \frac{a^2}{2}$$

(ii) அதன் உச்சிவழியாக, அதன் அச்சுக்குச் செங்குத்தாக உள்ள கோடு பற்றி உள்ளீடில் கூம்பின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$I' = \int_0^h \left(dm \frac{y^2}{2} + dm \cdot x^2 \right)$$

$$= \int_0^h \left(1 + \frac{a^2}{2h^2} \right) x^2 \cdot 2\pi Py \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dy} \right)}$$

$$= 2\pi P \cdot \frac{(a^2 + 2h^2)}{2h^2} \cdot \frac{a}{h} \int_0^h x^3 dx$$

$$= (\pi alP) \times \frac{(a^2 + 2h^2)}{h^4} \times \frac{h^4}{4}$$

$$= \frac{M}{4} (a^2 + 2h^2)$$

(iii) அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G வழியாக அச்சுக்குச் செங்குத்தாயுள்ள கோடு பற்றி உள்ளீடில கூம்பின் நிலைமத் திருப்புதிறன் $= I$.

$$I + M \left(\frac{2h}{3} \right)^2 = I' = \frac{M}{4} (a^2 + 2h^2)$$

$$\therefore \quad I = \frac{M}{4} (a^2 + 2h^2) - \frac{4Mh^2}{9}$$

$$= \frac{M}{36}(9a^2 + 18h^2 - 16h^2)$$

$$= \frac{M}{36}(9a^2 + 2h^2)$$

(iv) அதன் அடிமட்ட விட்டம் பற்றி நிலைமத் திருப்புதிறன்

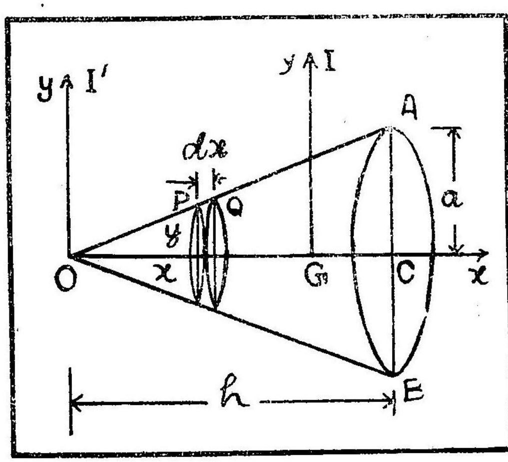
$$= I + M\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{M}{36}(9a^2 + 2h^2) + \frac{Mh^2}{9}$$

$$= \frac{M}{36}(9a^2 + 2h^2 + 4h^2)$$

$$= \frac{M}{12}(3a^2 + 2h^2)$$

10·4-11. சீரான திண்ம வட்டக்கூம்பு (Solid right circular cone)

$$M = \frac{1}{3}\pi a^2 hP; \quad dm = \pi y^2 dxP; \quad \frac{y}{a} = \frac{x}{h}$$



படம் 10·16.

(i) அதன் அச்சைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \int_m dm \cdot \frac{y^2}{2} = \int_0^h \pi y^2 dxP \cdot \frac{y^2}{2}$$

$$= \frac{\pi P}{2}\int_0^h y^4\, dx = \frac{\pi P}{2} \cdot \frac{a^4}{h^4}\int_0^h x^4\, dx$$

$$= \frac{\pi P}{2} \cdot \frac{a^4}{h^4} \cdot \frac{h^5}{5}$$

$$= \frac{1}{3} \pi a^2 h P \cdot \frac{3a^2}{10}$$

$$= M \cdot \frac{3a^2}{10}$$

(ii) கூம்பின் உச்சி வழியாக அதன் அச்சுக்குச் செங்குத்தாயுள்ள கோடு பற்றி கூம்பின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \int_m \left(dm \frac{y^2}{4} + dm\, x^2 \right)$$

$$= \int_0^h \left(\frac{y^2}{4} + x^2 \right) \pi y^2\, dx\, P$$

$$= \pi P \frac{a^2}{h^2} \cdot \left(\frac{a^2}{4h^2} + 1 \right) \int_0^h x^4\, dx$$

$$= \frac{\pi P a^2 (a^2 + 4h^2)}{4h^4} \times \frac{h^5}{5}$$

$$= \left(\frac{1}{3} \pi a^2 h P \right) \cdot \frac{3}{20} (a^2 + 4h^2)$$

$$= M \cdot \frac{3}{20} (a^2 + 4h^2)$$

$$I' = \frac{3M}{20} (a^2 + 4h^2)$$

(iii) கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் G வழியாக அச்சுக்குச் செங்குத்தாயுள்ள கோடுபற்றி கூம்பின் நிலைமத் திருப்புதிறன் $= I$

$$I + M \left(\frac{3h}{4} \right)^2 = I' = \frac{3M}{20} (a^2 + 4h^2)$$

$$\therefore \quad I = \frac{3M}{20} (a^2 + 4h^2) - \frac{9Mh^2}{16}$$

$$= \frac{3M}{80} (4a^2 + 16h^2 - 15h^2) = \frac{3M}{80} (4a^2 + h^2)$$

(iv) அதன் அடிமட்ட விட்டம்பற்றி நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= I + M\left(\frac{h}{4}\right)^2$$

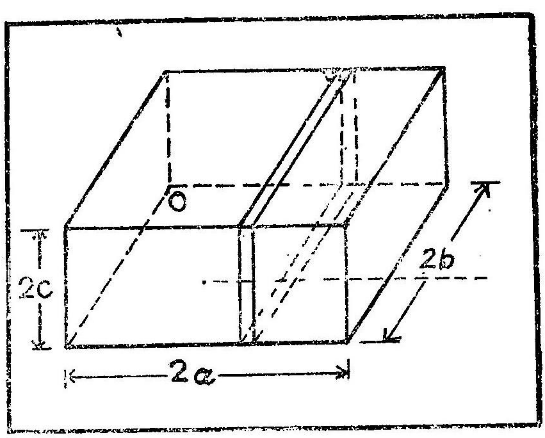
$$= \frac{3M}{80}(4a^2 + h^2) + \frac{Mh^2}{16}$$

$$= \frac{M}{80}(12a^2 + 3h^2 + 5h^2)$$

$$= \frac{M}{20}(3a^2 + 2h^2)$$

10·4-12. கனச்செவ்வகம் (Rectangular parallelopiped.)

M நிறையுள்ள கனச்செவ்வகத்தின் பக்கங்கள், முறையே $2a$, $2b$, $2c$ ஆதக. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் a ஆகுக. a ஐத் தொடக்கப்புள்ளியாகவும், அதன் வழியே $2a$, $2b$, $2c$ என்னும் விளிம்புகளுக்கு இணையாக ax, ay, az என்னும் மூன்று செங்குத்து அச்சுகளை எடுக்க.



படம் 10·17.

ax-குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு, கனச்செவ்வகத்தைச் சிறிய கூறுகளாகப்பிரிக்க. ஒவ்வொரு துண்டும் $2b$, $2c$ என்பவைகளைப் பக்கங்களாகக்கொண்ட செவ்வகத்தகடாகும்.

∴ ax-ஐப்பற்றி அதன் நிலைமத்திருப்புத்திறன்

$$= \text{அதன் நிறை} \times \frac{b^2 + c^2}{3} = dm \times \frac{b^2 + c^2}{3}$$

$\therefore$ ax-ஐப்பற்றி கனச்செவ்வகத்தின் நிலைமத்திருப்புதிறன்

$$= \frac{b^2 + e^2}{3} \int_m dm = M\left(\frac{b^2 + c^2}{3}\right)$$

அவ்வாறே, ay, az பற்றி கனச்செவ்வகத்தின் நிலைமத் திருப்பு திறன் முறையே,

$$M\left(\frac{c^2 + a^2}{3}\right); \quad M\left(\frac{a^2 + b^2}{3}\right) \text{ ஆகும்.}$$

[குறிப்பு: (i) $2a$ பக்கத்தைப்பெற்ற ஒரு கன சதுரத்தின் திணிவு மையத்தின் வழியே செல்லும் சமச்சீரச்சு பற்றிய அதன் நிலைமத் திருப்புதிறன் $= \frac{2Ma^2}{3}$

(ii) அக்கனசதுரத்தின், ஏதேனுமொரு பக்கத்தைப்பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \frac{2Ma^2}{3} + M \cdot (a^2 + ah^2) = \frac{8Ma^2}{3}.$$

10-5. சமதிருப்புதிறன் தொகுதிகள் (Equimomental systems).

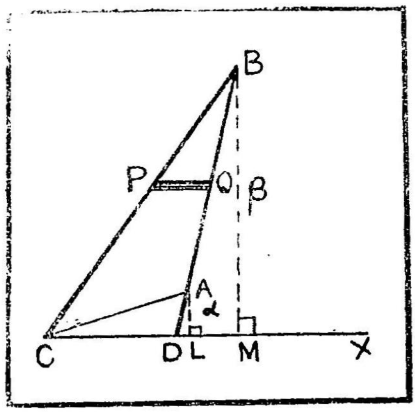
இரு வேறு தொகுதிகளின் மொத்தநிறை சமமாகவும், அவற்றின் புவியீர்ப்பு மையம் ஒன்றாகவும், எந்த அச்சு பற்றியும் அவற்றின் நிலைமத்திருப்புதிறன் சமமாகவும் இருப்பின், அவை சம திருப்புதிறன் தொகுதிகள் எனப்படும்.

இத்தகைய தொகுதிகள் இயக்க விசை இயலில் இணைமாற்றுகளாகக் கருதப்படும்.

10·5-1. M நிறையுள்ள சீரான ஒரு முக்கோணத்தகடும், அம்முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளில் வைக்கப்பட்ட $\frac{M}{3}$ நிறையுள்ள சம துகள்களும் சம திருப்புதிறன் தொகுதிகளாகுமெனக்காட்டுதல்.

ABC என்னும் முக்கோணத்தின், C என்னும் கோணப்புள்ளி வழியே CX என்னும் கோட்டை படம் (10·18)-ல் காட்டியவாறு வரைக.

CX என்னும் கோடு பற்றிய, அம்முக்கோணத்தின் நிலைமத் திருப்புதிறனைப் பின்வருமாறு காணலாம்.



படம் 10·18.

A, B-களிலிருந்து CX க்கு AL, BM என்னும் செங்குத்துக் கோடுகளை வரைக. $AL = \alpha$; $BM = \beta$ ஆகுக.

$M = \triangle ABC$ யின் நிறை

$= P \times$ முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

$$= P[\triangle BCD - \triangle ACD]$$

$$= P\left[\frac{1}{2} CD \cdot \beta - \frac{1}{2} CD \cdot \alpha\right]$$

$$= \frac{P}{2} \cdot CD(\beta - \alpha)$$

CD-க்கு இணையாக PQ என்னும் ஒரு நுண் பகுதியை எடுக்க. அதன் பரப்பு, $dA = PQ \times dy$

$$= \frac{CD}{\beta}(\beta - y)\,dy$$

$\therefore \quad dm =$ நுண் பகுதியின் நிறை $= PdA = P \cdot \frac{CD}{p}(p - y)\,dy$

CX பற்றிய இதன் நிலைமத் திருப்புதிறன் $= PdA \cdot y^2$

∴ CX பற்றிய, BCD என்னும் முக்கோணத்தின் நிலைமத்

$$\text{திருப்புதிறன்} = \int_0^{\beta} P \cdot \frac{CD}{\beta} (\beta - y)\, y^2\, dy$$

$$= P \cdot \frac{CD}{\beta}\left[\beta \cdot \frac{\beta^3}{3} - \frac{\beta^4}{4}\right]$$

$$= \frac{P \cdot CD}{12} \cdot \beta^3$$

அவ்வாறே, CX பற்றிய $w_1 - ACD$ என்னும் முக்கோணத்தின் நிலைமத் திருப்புதிறன் $= \dfrac{P \cdot CD}{12} \cdot \alpha^3$ ஆகும்.

எனவே, CX பற்றி, $\triangle ABC$-ன் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \frac{P \cdot CD}{12} (\beta^3 - \alpha^3)$$

$$= \frac{P \cdot CD}{2} (\beta - \alpha) \frac{1}{6} (\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2)$$

$$= \frac{M}{6} (\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2)$$

A', B', C' என்னும் புள்ளிகள் முறையே BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளாகுக.

அப் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றில் அமையும் $\dfrac{M}{3}$ என்னும் நிறையைப் பெற்ற மூன்று துகள்களின் திணிவு மையமும், $\triangle ABC$-ன் திணிவு மையமும் ஒன்றுகும்.

எனவே, CX அச்சு பற்றி, அம் மூன்று துகள்களின் நிலைமத் திருப்பு திறன்

$$= \frac{M}{3}\left[\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{M}{12} \times \frac{1}{4} [\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2]$$

$$= \frac{M}{12} [2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta]$$

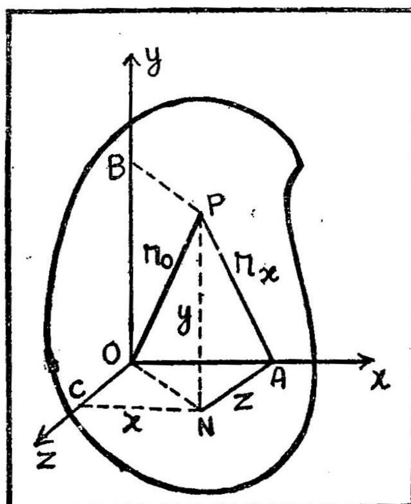
$$= \frac{M}{6} (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

CX பற்றிய முக்கோணத்தின் நிலைமத் திருப்பு திறனும் A' B' C' என்னும் புள்ளிகளில் அமையும் $\dfrac{M}{3}$ என்னும் நிறைகளையுடைய மூன்று சமமான துகள்களின் நிலைமத் திருப்புதிறனும்

இங்கே சமமாவதால், அவ்விரு தொகுதிகளும் சம திருப்புதிறன் தொகுதிகளாகின்றன.

10-6. சடத்துவப் பெருக்கம் (Product of inertia)

O என்னும் புள்ளியில் OX, OY, OZ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும் அச்சுகளைக் குறிக்கட்டும். $P(x, y, z)$ என்பது கட்டிறுக்கப் பொருள் ஒன்றில் ஏதேனுமொரு புள்ளியாகுக. அப் புள்ளியில் அப்பொருளின் ஒரு சிறிய dm நிறையுள்ள பகுதியை



படம் 10·19

படம் (10·19)-ல் காட்டியவாறு எடுக்கவும். பொருளின் சடத்துவப் பெருக்கங்கள் பின்வரும் வரையறுத்த தொகையீடுகளால் வரையறுக்கப்படும்.

$$I_{xy} = \int_m xy\, dm = I_{yx}$$

$$I_{yz} = \int_m yz\, dm = I_{zy}$$

$$I_{zx} = \int_m zx\, dm = I_{xz}$$

(ii) ஜூன் 1973இல் முடிவுற்ற மூன்று ஆண்டுகளுக்குள் ரிசர்வு வங்கியிடம் வாங்கியிருந்த உச்ச அளவு கடன் அடிமட்ட (base level)க் கடன் எனக் கொள்ளப்பட்டு அந்த அளவுவரை வாங்கும் கடன்கள்மீது $1\frac{1}{2}$% வட்டி தள்ளுபடி செய்து தரப்படும்.

(iii) அடிமட்ட ஆண்டில் இருந்ததற்கு மேலாக மத்தியக் கூட்டுறவு வங்கிகள் தம் நிதியைக்கொண்டு கூடுதலாகக் கொடுத்த குறுகிய கால விவசாயக் கடன்களைப் போன்று இருமடங்கு கூடுதல் கடன்மீதும் அல்லது சிறு விவசாயிகளுக்குக் கொடுக்கும் கூடுதல் கடன் முழு அளவுக்கும் வட்டிமீது $1\frac{1}{2}$% தள்ளுபடி தரப்படும்.

(iv) வைப்புகள் திரட்டியதன் காரணமாக ரிசர்வு வங்கியிடம் வாங்கும் கடனளவு குறைந்தால் மத்திய வங்கி சொந்த முயற்சியால் ஈடுபடுத்திய தொகையைப் போன்று நான்கு மடங்கு தொகைக்குச் சிறப்புச் சலுகை தள்ளுபடியாக $1\frac{1}{2}$%அளிக்கப்படும்.

(v) ஒரு கோடி ரூபா நடவடிக்கைக்கும் குறைவாகவுள்ள நலிந்த வளமற்ற மத்திய வங்கிகள் மேற்கண்ட திட்டத்திலிருந்து விலக்கு அளிக்கப்பெறும்.

மேற்கண்ட முறையில் மத்தியக் கூட்டுறவு வங்கிகள் வைப்புகளைத் திரட்டுமாறும், ரிசர்வு வங்கியிடமிருந்து சலுகை விகித வட்டியில் கடன்பெற பல நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்யுமாறும் வேண்டப்படுவதன்வழி ரிசர்வு வங்கி கூட்டுறவு கடனளிப்பில் புதியதொரு திருப்பத்தை உண்டாக்கியிருக்கிறது.

சிறு விவசாயிகள் மேம்பாட்டு முகமை (Small Farmers Development Agency) கடைநிலை விவசாயிகள்—விவசாயத் தொழிலாளிகள் முகமை (Marginal Farmers and Agricultural Labourers Agency)

அனைத்திந்தியக் கிராமக் கடன் மறு ஆய்வுக் குழு செய்த பரிந்துரைகளின் பேரில் சிறு விவசாயிகள் மேம்பாட்டுத் திட்டமும், கடைநிலை விவசாயிகள்—விவசாயக் கூலிகள் மேம்பாட்டுத் திட்டமும் மத்தியத்துறைத் திட்டங்களாக 1970–71இல் மேற்கொள்ளப்பட்டன. நான்காம் திட்ட காலத்தில் இத் திட்டங்களுக்கு ரூ. 115 கோடி ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்டது. சமுதாயத்தில் வலிவற்ற வகுப்பினராக விளங்குவோருக்கு உதவும்

அப்போது,

$$I_{(x, y)} = \int_m z^2 dm$$

$$I_{(z, x)} = \int_m y^2 dm$$

$$I_{xx} = \int_m r_x^2 dm = \int_m (y^2 + z^2)\, dm$$

$$= \int y^2 dm + \int z^2 dm$$

$$= I_{(z, x)} + I_{(x, y)}$$

என்றாகும்.

$$\therefore \quad I_{xx} = I_{(z, x)} + I_{(x, y)}$$

அவ்வாறே $I_{yy} = I_{(x, z)} + I_{(y, z)}$

$I_{zz} = I_{(y, z)} + I_{(z, x)}$ என்பவைகளும் கிடைக்கும்.

(ii) ஏதேனுமொரு புள்ளியைப் பற்றிய, பொருளொன்றின் நிலைமத் திருப்புதிறன் வழியே ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்குமாறு வரையப்படும் மூன்று தளங்கள் பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன்களின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும்.

(படம் 10·20)-ல், O என்னும் புள்ளியானது, ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் xOy, yOz, zOx என்னும் மூன்று தளங்களால் வரைறுக்கப்படுஙர். O புள்ளி பற்றிய பொருளொன்றின் நிலைமத் திருப்பு திறனை I_0 எனக் கொள்க.

dm என்பது பொருளின் மிக நுண்ணிய பகுதியின் நிறையைக் குறிக்கட்டும். அச் சிறிய நிறை (x, y, z) என்னுமிடத்தில், P இருப்பதாகக் கொள்க. O-வுக்கும் P-க்கும் இடையிலுள்ள தொலைவு r_0 ஆகுக. எனவே

$$r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ ஆகும்.}$$

I_0 = பொருளின், O பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \int_m r_0^2\, dm$$

$$= \int_m (x^2 + y^2 + z^2)\, dm$$

$$= \int_m x^2\, dm + \int_m y^2\, dm + \int_m z^2\, dm$$

$$= I_{(y,z)} + I_{(z,x)} + I_{(x,y)}$$

$$\therefore \quad I_0 = I_{(x,y)} + I_{(y,z)} + I_{(z,x)} \text{ ஆகும்.}$$

(iii) ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் மூன்று அச்சுகள் பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன்களின் கூடுதல், அவ் வச்சுகள் அமையும் திசைகளைச் சாராமல், அவைகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியை மட்டுமே சார்ந்ததாகும்.

$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}$ என்பவை, முறையே, பொருளொன்றின் OX, OY, OZ அச்சுகள் பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்களைக் குறிக்கு மெனில்,

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \int_m (y^2 + z^2)\, dm + \int_m (z^2 + x^2)\, dm + \int_m (x^2 + y^2)\, dm$$

$$= 2 \int_m (x^2 + y^2 + z^2)\, dm$$

$$= 2\, I_0 \text{ ஆகும்.}$$

O-விலிருந்து dm என்னும் நுண்ணிய நிறையின் நிலையை $\underline{r_0}$ என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கிறது. அந் நிலைத்திசையி O வில் அமையும் அச்சுகளின் திசைகளைச் சார்ந்திராமல், O-வை மட்டுமே சார்ந்துள்ளது. எனவே I_0 என்பது ஒரு மாற்றமிலி யாகும்.

ஆகவே $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} =$ ஒரு மாறிலி.

10-7. (தட்டொன்றின்) தலையாய அச்சுகளும், தலையாய நிலைமத்திருப்புதிறன்களும்

தட்டொன்றின் தளத்தில் படம் (10·21)-ல் காட்டியவாறு, OX, OY என்பவை கிடை, நிலை அச்சுகளைக் குறிக்கட்டும். OZ என்பது O-வில் அத்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமையும் அச்சாகுக.

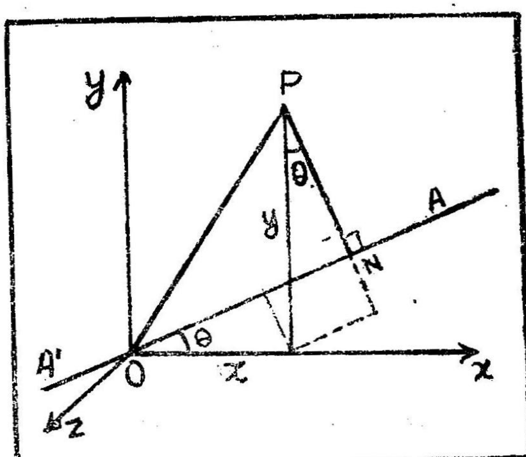
$A'A$ என்பது XOY தளத்தில் O-வழியே செல்லும் ஏதேனு மொரு கோட்டைக் குறிக்கட்டும். அது x அச்சுடன் θ

கோணத்தை அமைப்பதாகக் கொள்க. $P(x, y)$ என்னுமிடத்தில். dm என்னும் தகட்டின் மிகச்சிறிய நிறை இருப்பதாகக்கொள்க. ஆகவே, வரையறைபடி,

$$I_{xx} = \int_m y^2 dm$$

$$I_{yy} = \int_m x^2 dm$$

$$I_{xy} = \int_m xy dm \quad \text{ஆகும்.}$$



படம் 10·21.

P-யிலிருந்து $A'A$ என்னும் கோட்டிற்கு, PN என்னும் செங்குத்துக்கோட்டை வரைக. அப்போது,

$$PN = y \cos\theta - x \sin\theta \quad \text{ஆகும்,}$$

I என்பது, தகட்டின், $A'A$-பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறனைக் குறிப்பதாகில்,

$$I = \int_m PN^2 \cdot dm$$

$$= \int_m (y \cos\theta - x \sin\theta)^2 dm$$

கடனும் அளிக்கப்படுவதுண்டு. இயந்திரங்கள், பிற சாதனங்கள், முதல் சொத்துகள் வாங்க மத்திய காலக் கடன்களும் அளிக்கப் படுவதுண்டு. ஓடுகள், சர்க்கரை, இரும்புக் கருவிகள், தச்சுச் சாமான்கள், விசைத்தறி துணி, உலோக வேலைப்பாட்டுப் பொருள், அளவு பார்க்கும் நாடா போன்றவை தயாரிக்கும் தொழிற் கூட்டுறவுகளுக்கு ஸ்டேட் வங்கி நிதிவசதியளித்துள்ளது.

நுகர்வோர் கூட்டுறவுகள்

மத்தியத் துறையில் உருவாக்கப்பட்ட நுகர்வோர் கூட்டுறவுத் திட்டத்தை விரைவாகச் செயல்படுத்த அரசு முடிவு செய்ததன் விளைவாக ஸ்டேட் வங்கி நுகர்வோர் கூட்டுறவு மொத்த விற்பனைப் பண்டசாலைகள், மாநில, தேசீய நுகர்வோர் பண்ட சாலைகளின், கூட்டிணைப்பு ஆகியவற்றிற்கு நடைமுறை முதல் வழங்க திட்டமொன்றை வகுத்துள்ளது. பொருள்கள் அடகு, ஈட்டின் பேரிலும், கடன் விற்பனையின் பேரிலும் கடன் வசதி அளிக்கப்படுகிறது. மாநில அரசு, உச்சி அல்லது மத்திய வங்கியின் பொறுப்புறுதியின் பேரில் பிணையில்லாக் கடன் அளிக்கப் படுவதுண்டு.

பணமனுப்புகை வசதிகள்

ரிசர்வு வங்கியின் திட்டப்படியும், தன்னுடைய திட்டப்படியும் ஸ்டேட் வங்கி, கூட்டுறவு வங்கிகளுக்குச் சில இலவச பணமனுப் புகை வசதிகளைச் செய்து தந்துள்ளது. கூட்டுறவு நிலவள வங்கி களுக்கும் இவ் வசதிகள் அளிக்கப்படுகின்றன.

வாரத்திற்கு ஒருமுறை மாநிலக் கூட்டுறவு வங்கியிலிருந்து அதன் கிளை ஒவ்வொன்றிற்கும் அல்லது இணைந்துள்ள மத்தியக் கூட்டுறவு வங்கிகளுக்கும், மத்தியக் கூட்டுறவு வங்கிகளிலிருந்து அவற்றின் கிளை ஒவ்வொன்றிற்கும் இலவசமாகப் பணமனுப்புகை வசதியை ஸ்டேட் வங்கி அளிக்கிறது. மாநிலக் கூட்டுறவு வங்கி நேரடியாக மத்தியக் கூட்டுறவு வங்கியொன்றின் கிளைக்குக்கூட இவ்வகையாகப் பணமனுப்பலாம். ஸ்டேட் வங்கியின் துணை வங்கிகளும் இவ்வசதிகளைக் கூட்டுறவு வங்கிகளுக்கு அளிக் கின்றன. கூட்டுறவு நிலவள வங்கிகள் தம் கிளைகள் அல்லது இணைந்துள்ள பிரதம வங்கிகளுக்கும், பிரதம வங்கிகள் அல்லது கிளைகள் மத்திய நிலவள வங்கியின் தலைமை அலுவலகமுள்ள இடத்தில் உள்ள ஸ்டேட் வங்கியில் அந்த மத்திய நிலவள வங்கிக்கும் வாரம் ஒரு முறை இலவசமாகப் பணமனுப்பலாம்.

1969ஆம் ஆண்டு ரூ. 800 கோடி மதிப்புள்ள பணம் இவ்வகை பணமனுப்புகை வசதிகள்வழி அனுப்பப்பட்டது.

அனைத்திந்தியக் கிராமக் கடன் மறுஆய்வுக்குழு, ஸ்டேட் வங்கி துவங்கப்பட்டபோது என்னவெல்லாம் அதனிடம் எதிர்பார்க்கப் பட்டதோ அதில் மிகப் பெருமளவு நிறைவேறியுள்ளது என்று தனது அறிக்கையில் குறிப்பிட்டுள்ளது. கூட்டுறவுகளுக்குக் கடன் வசதி தடையும் தயக்கமுமின்றி கிடைக்க ஸ்டேட் வங்கி தனி வழி வகைகளை வகுத்துப் பழைய நடைமுறைகளை மாற்றியமைத்தது குறிப்பிடத்தக்க செயலாகும்.

1955 இல் ஸ்டேட் வங்கி நிறுவப் பெற்றபோது கூட்டுறவு களுக்கு அளிக்கப்பட்டிருந்த கடன்வசதி மிகமிகக் குறைவாக இருந்த நிலை மாறி 1969இல் ரூ. 168·29 கோடி கடன் அனு மதிக்கப்பட்டிருந்தது; ரூ. 115 38 கோடி நிலுவை நின்றது. ஸ்டேட் வங்கியின் துணை வங்கிகளும் 1969இல் ரூ. 38·94 கோடி கடனுக அனுமதித்திருந்தன; ரூ. 14·91 கோடி நிலுவை நின்றது.

இன்றைய நிலையிலும் நாட்டில் மிகப்பெரிய வங்கியாக விளங்குவது ஸ்டேட் வங்கியே. 1973 ஜூன் இறுதியில் இவ்வங்கி 2,867 அலுவலகங்களைக் கொண்டிருந்தன. இதன் துணை வங்கிகள் 1,563 அலுவலகங்களைக் கொண்டிருந்தன. ஆக, நாட்டிலுள்ள வாணிக வங்கிகளின் மொத்த அலுவலகங்கள் 15,362இல் ஸ்டேட் வங்கியும் அதன் துணை வங்கிகளும், மட்டும் 4,430 அலுவலகங் களைக் கொண்டிருந்தனவெனின் இவற்றின் சிறப்பை மேலும் கூறவேண்டுவதில்லை. இத்துணை விரிந்த பரப்பும் மிகுந்த செல்வாக்குமுள்ள வங்கி கூட்டுறவு இயக்கத்தின் வளர்ச்சிக்குப் பலவகைகளில் உதவுவது கூட்டுறவு இயக்கம் மேலும் உறுதியாக வளர்ச்சிபெற உதவுகின்றது.

அச்சுகள், அவை பற்றிய, தகட்டின் சடத்துவப் பெருக்கத்தின் மதிப்பு பூச்சியமாக வேண்டும் என்ற நிபந்தனையால் வரையறுக்கப் படும். எனவே ON என்ற கோடும், N வழியே ON-க்குச் செங்குத் தாக வரையும் கோடும் O-ல் தலையாய அச்சுகளாக இருப்பதற்கு அக் கோடுகள் பற்றிய சடத்துவப் பெருக்கம் பூச்சியமாக வேண்டும்.

அதாவது,

$$\int_m NP \cdot ON \, dm = 0$$

அதாவது,

$$\int_m (y \cos \theta - x \sin \theta)(x \cos \theta + y \sin \theta) \, dm = 0$$

அதாவது,

$$\int_m (y^2 - x^2) \frac{\sin 2\theta}{2} \, dm + \int_m xy \cos 2\theta \, dm = 0$$

அதாவது, $\frac{\sin 2\theta}{2}(I_{xx} - I_{yy}) + \cos 2\theta \, I_{xy} = 0$

$$\therefore \quad \tan 2\theta = \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left\{ \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} \right\}$$

எனவே, ON என்ற கோடும், O-வழியே ON-க்குச் செங்குத் தாக வரையும் கோடும் தலையாய அச்சுகளாக இருப்பதற்கு, அவைகள், OX என்ற அச்சுடன், முறையே

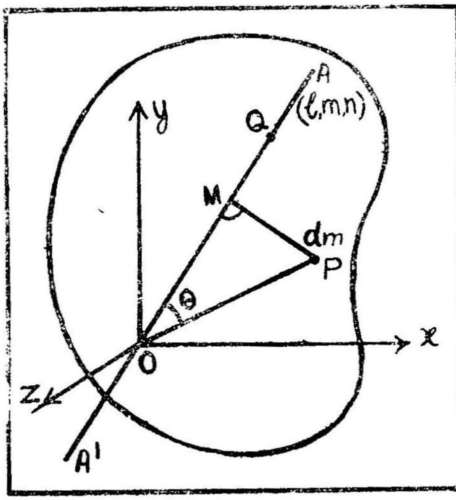
$$\frac{1}{2} \tan^{-1} \left\{ \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} \right\}, \quad \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left\{ \frac{2 I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} \right\}$$

என்னும் கோணங்களை அமைக்கவேண்டிவரும்.

10·7-2. திருப்புதிறனின் கன நீள் வளையம் (Momental ellipsoid.)

பரந்தவெளியில், ஏதேனுமொரு O என்னும் புள்ளி வழியே ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும் OX, OY, OZ என்னும் அச்சுகளை வரைக. O-வின் வழியாக, l, m, n என்னும் திசைக் கிடக்கைகளைப் பெற்ற $A'A$ என்னும் கோட்டை வரைக.

dm என்பது பொருளின் நுண்ணியதோர் பகுதி நிறையைக் குறிக்கட்டும். அது அமையும் நிலையை, $\underline{r} = OP$ என்னும் நிலைத்திசையி வரையறுக்கட்டும். OP, OA களுக்கு இடையி லுள்ள கோணம் θ ஆகுக.



படம் 10·22

P-யிலிருந்து *OA*-வுக்கு *PM* என்ற செங்குத்துக்கோட்டை, படம் 10·22-ல் காட்டியவாறு வரைக.

$\underline{\lambda}$ என்பது *OA*-யில் ஓர் ஓரலகுத்திசையியைக் குறிக்கு மெனில்,

$$\underline{\lambda} = l\,\underline{i} + m\,\underline{j} + n\,\underline{k} \quad \text{ஆகும்.}$$

$$OM = \underline{r} \cdot \underline{\lambda} = (x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}) \cdot (l\,\underline{i} + m\,\underline{j} + n\,\underline{k})$$
$$= lx + my + nz$$

$$PM^2 = OP^2 - OM^2$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2) - (lx + my + nz)^2$$
$$= (l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (lx + my + nz)^2$$
$$= l^2(y^2 + z^2) + m^2(z^2 + x^2) + n^2(x^2 + y^2) - 2\,lm\,xy - 2\,mn\,yz - 2\,nl\,zx$$

$$\therefore \quad I_{A'A} = \int_m PM^2\, dm$$

$$= \int_m \Big[l^2(y^2 + z^2) + m^2(z^2 + n^2) + n^2(x^2 + y^2) - 2\,lm\,xy - 2\,mn\,yz - 2\,nl\,zx \Big]$$

$$= l^2 I_{xx} + m^3 I_{yy} + n^2 I_{zz} - 2lm\, I_{xy} - 2mn\, I_{yz} - 2nl\, I_{zx}$$

இங்கு $I_{A'A}$-ன் மதிப்பு (l, m, n) என்னும் திசைக் கிடக்கைகளைச் சார்ந்துள்ளது. எனவே $A'A$ என்னும் கோட்டின் அமைப்புக்கு ஏற்றவாறு, $A'A$ பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன் மாறுபடக் கூடும். இத்தகைய மாறுபாட்டை விளக்க, $A'A$ என்னும் கோட்டில் $Q (X, Y, Z)$ என்னும் புள்ளியை,

$$I_{A'A} \propto \frac{1}{(OQ)^2} \text{ அல்லது } I_{A'A} = \frac{Mk^4}{(OQ)^2}$$

என்றிருக்குமாறு எடுக்கவும். அப்போது,

$$I_{A'A} = l^2 I_{xx} + m^2 I_{yy} + n^2 I_{zz} - 2lm I_{xy} - 2mn I_{yz} - 2nl I_{zx} = \frac{Mk^4}{(OQ)^2}$$

அல்லது,

$$I_{xx} (lOQ)^2 + I_{yy} (m \cdot OQ)^2 + I_{zz} (n \cdot OQ)^2 - 2I_{xy} (l \cdot OQ) \cdot (m \cdot OQ) - 2I_{yz} (m \cdot OQ) (n \cdot OQ) - 2I_{zx} (n \cdot OQ) (l \cdot OQ) = Mk^4$$

அல்லது,

$$I_{xx} X^2 + I_{yy} Y^2 + I_{zz} Z^2 - 2 I_{xy} XY - 2 I_{yz} YZ - 2 I_{zx} ZX = mk^4 \text{ என்றாகும்.}$$

இதுவே Q-ன் இயங்கு வரைச் சமன்பாடாகும். OQ-வின் மதிப்பு முடிவுள்ள ஒரு மெய்யெண்ணானதால், இச் சமன்பாடு ஒரு கன நீள் வட்டத்தை வரையறுக்கும். அதை திருப்பு திறனின் கன நீள் வளையம் எனவும் கூறுவது வழக்கம். அத்தகைய கன நீள் வட்டத்திற்கு O வழியே ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயுள்ள மூன்று தலையாய அச்சுகள் உள்ளன. அவை, OX, OY, OZ என்னும் ஆய தொலை அச்சுக்களுடன் ஒன்று படும்போது, கன நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$I_{xx} X^2 + I_{yy} Y^2 + I_{zz} Z^2 = Mk^4 \text{ என்றாகும்.}$$

இங்கு I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} என்பவை, OX, OY, OZ பற்றிய தலையாய நிலைமத் திருப்பு திறன்களைக் குறிக்கும்.

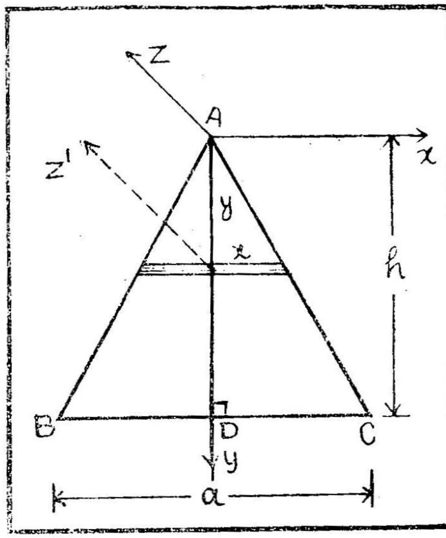
மேலும் $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ என்றாகும்போது, இயங்குவரை ஒரு கோளமாகும்.

10·8. மாதிரிக் கணக்குகள்

10·8-1. ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளி A வழியே

(i) BC என்னும் எதிர்பக்கத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு பற்றிய

(ii) முக்கோண தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு பற்றிய நிலைமத்திருப்புதிறன்களைக் காண்க.



படம் 10·23

ABC என்பது ஓர் இருசமபக்க முக்கோணமாகுக. முக்கோண தளத்தில், AX, AY என்பவை, படம் (10·22)-ல் காட்டியவாறு, A வழியே செல்லும் கிடை, நிலைகோடுகளைக் குறிக்கின்றன. $AD \perp BC$ எனவரை ; $AD = h$ ஆகுக.

இங்கு $dA = 2xdy$

$dm = (2xdy)\, P$

Ay பற்றி, dm-ன் நிலைமத் திருப்பு திறன் $= dm\,\dfrac{x^2}{3}$

வடிவொத்த முக்கோண விதிப்படி,

$$\frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{y}{h}$$

$\therefore \quad x = \dfrac{a}{2h}\, y$ ஆகும்.

எனவே,

Ay பற்றி முக்கோணத்தின் நிலைமத் திருப்புதிறன் $= \displaystyle\int_0^h \frac{x^2}{3}(2xdy)\,P$

$$= \frac{2P}{3}\left|\frac{a^3}{8h^3}\int_0^h y^3\,dy = \left(\frac{1}{2}ahP\right)\cdot\frac{a^2}{24} = M\,\frac{a^2}{24}\right.$$

Az என்பது A வழியே, முக்கோண தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டைக் குறிக்கட்டும்.

Az பற்றி, dm-ன் நிலைமத் திருப்புதிறன் $= dm\dfrac{x^2}{3} + dmy^2$

∴ Az பற்றி, முக்கோணத்தின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

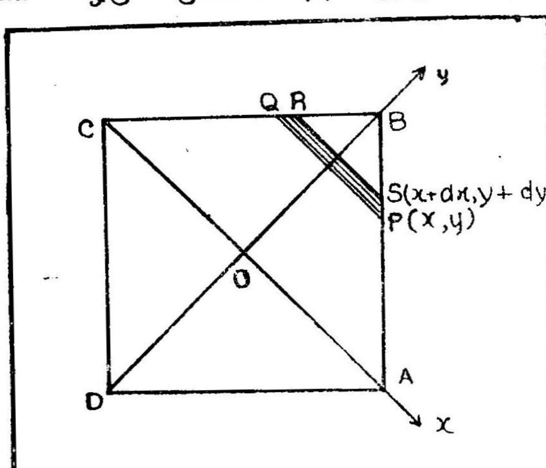
$$= \int_0^h \left(\frac{x^2}{3} + y^2\right)(2x\,dy\,P)$$

$$= \left(\frac{a^2}{12h^2} + 1\right)\frac{aP}{h}\int_0^h y^3 dy$$

$$= \left(\frac{a^2}{12h^2} + 1\right)\frac{a\,P\,h^3}{4}$$

$$= \frac{M}{8}a^2\left(\frac{1}{3} + \cot^2\frac{A}{2}\right) ; \left[\cot\frac{A}{2} = \frac{2h}{a}\right]$$

10·8-2. சதுர வடிவத்தகடு ஒன்றின் அடர்த்தி, புள்ளி தோறும் மாறுபட்டு, எந்தவொரு புள்ளியிலும், அதன் அடர்த்தி, அத்தகட்டின் ஒரு மூலைவிட்டத்திலிருந்து அப்புள்ளியின்



படம் 10·24.

தொலைவின் இருபடிக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கிறது. அத் தகட்டின் இம் மூலை விட்டத்தைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறனைக் கணக்கிடுக.

படம் (10·24)-ல், $ABCD$ என்பது சதுரத் தகட்டையும், AC என்பது குறிப்பிட்ட மூலை விட்டத்தையும் குறிக்கட்டும், மூலை விட்டங்கள் O-வில் சந்திக்கட்டும். OA, OB என்பவை x, y அச்சுகளாகுக.

$PQRS$ என்னும் சிறு நுண் பகுதியின் நிறை

$$= 2x\,dx \cdot P = 2x\,dx \times k\,y^2$$

$$\therefore \text{ தட்டின் நிறை, } M = 2\int_0^{a/\sqrt{2}} 2kx\,y^2\,dx$$

$$= 2\int_0^{a/\sqrt{2}} 2k\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - y\right)y^2\,dy$$

$$= \frac{k\,a^4}{12}$$

AC ஐப் பற்றிய, நுண் பகுதி $PQRS$-ன் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= 2x\,dx \cdot ky^2 \cdot y^2 \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore$ AC-ஐப் பற்றிய, முழுத் தட்டின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= 2\int_0^{a/\sqrt{2}} 2kx\,y^4\,dy$$

$$= 4k\int_0^{a/\sqrt{2}} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - y\right)y^4\,dy$$

$$= \frac{k\,a^6}{60} = \frac{M\,a^6}{5}$$

10·8-3. M நிறையுள்ள ஒரு முக்கோணத்தகட்டின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு கோட்டிலிருந்து அதன் உச்சிகளின் தொலைவுகள் α, β, γ எனின், இக்கோடுபற்றி அம் முக்கோணத்தின் நிலைமத் திருப்புதிறன் $\frac{M}{6}$ $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$ என நிறுவுக.

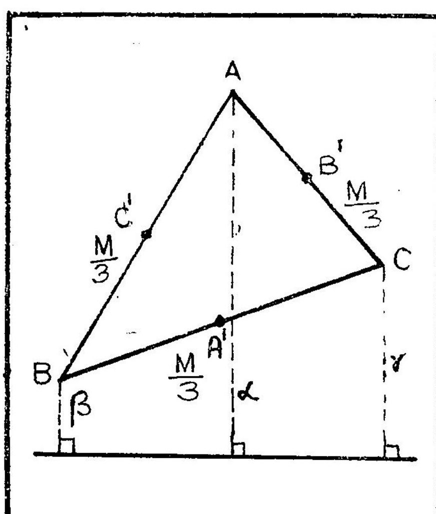
l என்பது ABC என்னும் முக்கோணத்தில் ஒரு கோடாகுக. l பற்றி, கொடுக்கப்பட்ட $\triangle ABC$ என்னும் முக்கோணத்தின் நிலைமத்திருப்புதிறன்

$= l$ பற்றி, முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளில் வைக்கப்பட்ட $\frac{M}{3}$ நிறையுடைய துகள்களின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \frac{M}{3}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2 + \frac{M}{3}\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)^2 + \frac{M}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$$

$$= \frac{M}{3} \cdot \frac{1}{4}\,[\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma+\gamma^2+\alpha^2+2\gamma\alpha+\alpha^2 + \beta^2+2\alpha\beta]$$

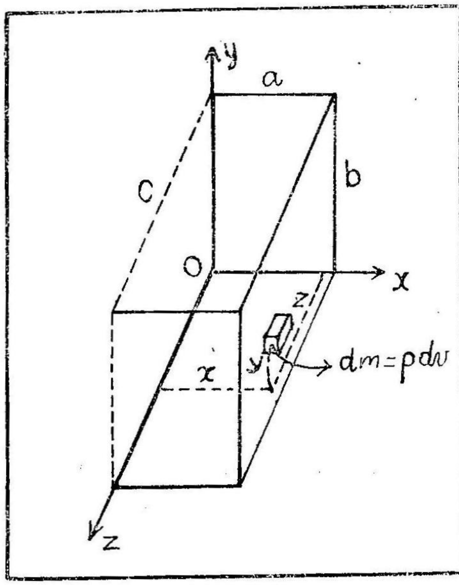
$$= \frac{M}{6}\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$



படம் 10·25.

10·8-4. M நிறையுள்ள ஒரு கனச் செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் முறையே a, b, c ஆகுக. OX, OY, OZ என்னும் செங்குத்தச்சுகளை அதன் O என்னும் மூலை வழியே a, b, c பக்கங்களின் போகாக அமைக்க. அக் கனச் செவ்வகத்தின், Oz பற்றிய நிலைமத் திருப்பு

திறனையும், (Ox, Oy) பற்றிய சடத்துவப் பெருக்கத்தையும் காண்க.



படம் 10·26.

$$I_{zz} = \int\int\int (x^2 + y^2)\, dm$$

$$= \int_0^c \int_0^b \int_0^a (x^2 + y^2) P dv = P \int_0^c \int_0^b \int_0^a (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$= P \int_0^c dz \int_0^b \left(\frac{a^3}{3} + ay^2 \right) dy$$

$$= P \cdot C \cdot \left(\frac{a^3 b}{3} + \frac{ab^3}{3} \right)$$

$$= (abcP) \left(\frac{a^2 + b^2}{3} \right) = M \left(\frac{a^2 + b^2}{3} \right)$$

$$I_{xy} = P \int_0^c \int_0^b \int_0^a xy\, dx\, dy\, dz$$

$$= P \int_0^c dz \times \int_0^b y\, dy \times \int_0^a x\, dx$$

$$= P \times C \times \frac{b^2}{2} \times \frac{a^2}{2}$$

$$= (abcP) \frac{ab}{4}$$

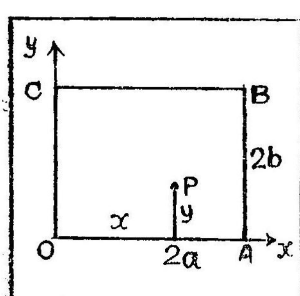
$$= M \frac{ab}{4}.$$

10·8-5. $2a$ நீளம், $2b$ அகலம் உடைய ஒருசீரான செவ்வகத் தகட்டின் ஒரு முனைப்புள்ளியில் அமையும் தலையாய அச்சுகள் அம்முனைவழியே செல்லும் $2a$ என்னும் பக்கத்துடன்,

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left\{ \frac{3ab}{2(a^2 - b^2)} \right\},$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left\{ \frac{3ab}{2(a^2 - b^2)} \right\}$$

என்னும் கோணச்சரிவைப் பெற்றுள்ளன எனக்காட்டுக.



படம் 10·27.

P என்பது தகட்டின் அடர்த்தியைக் குறிப்பதாகில், அத்தகட்டின் நிறை,

$M = 4\,abP$ ஆகும்.

$I_{xx} = OA$-பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன் $= M \cdot \frac{4b^2}{3}$

I_{yy} OB-பற்றிய நிலைமத் திருப்பு திறன் $= M \cdot \frac{4a^2}{3}$

$I_{xy} = OA, OB$ பற்றிய சடத்துவப்பெருக்கம்

$$= \int_0^{2a} \int_0^{2b} P\, yy\, dx\, dy$$

$$= P\int_0^{2a} x\,dx \times \int_0^{2b} y\,dy$$

$$= 4\,a^2\,b^2\,P$$

$$= (4\,a\,b\,P)\cdot a\,b$$

$$= M\cdot a\,b$$

O-வில் அமையும் தலையாய அச்சுகள் OA-வுடன் $\theta,\ \theta+\frac{\pi}{2}$ என்னும் கோணத்தை அமைக்கட்டும். அப்போது,

$$\tan 2\theta = \frac{2\,I_{xy}}{I_{yy}-I_{xx}} = \frac{2\,Mab}{\frac{4\,M}{3}\,(a^2-b^2)} = \frac{3ab}{2\,(a^2-b^2)}$$

ஆகும்.

$$\therefore\quad \theta_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{3\,ab}{2\,(a^2-b^2)}\right\},$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{3ab}{2\,(a^2-b^2)}\right\}.$$

10-8·6. ஒரு சீரான செங்கோண முக்கோணத்தின், செங்கோண முனைப் புள்ளியிலமையும் தலையாய அச்சுகள் அம் முனை வழியே செல்லும் பக்கத்துடன் தாங்கும் கோணங்களைக் காண்க.

இங்கு,

$$I_{xx} = \frac{M\,b^2}{6}\ ;\quad I_{yy} = \frac{M\,a^2}{6}$$

$$I_{xy} = \int_0^a\int_0^b Pxy\,dx\,dy$$

$$= P\int_0^a x\left\{\int_0^{b/a\,(a-x)} y\,dy\right\}dx$$

$$= \frac{P\,b^2}{2\,a^2}\int_0^a x\,(a-x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,P\,ab\cdot\frac{ab}{12}$$

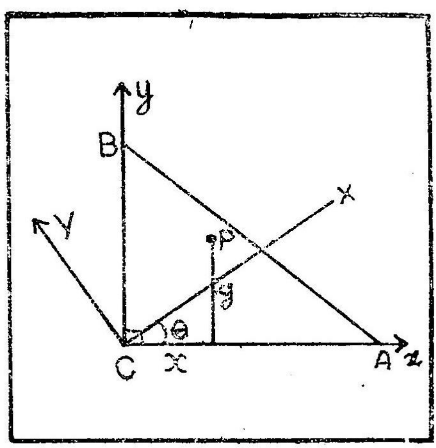
$$= M\,\frac{ab}{12}.$$

C-யில் அமையும் தலையாய அச்சுகள் CA-வுடன், θ, $\theta + \frac{\pi}{2}$ என்னும் கோணத்தை தாங்குவதாகில்,

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} = \frac{2 \cdot \frac{M\,ab}{12}}{\frac{M\,a^2}{6} - \frac{M\,b^2}{6}} = \frac{ab}{a^2 - b^2}$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left\{\frac{ab}{a^2 - b^2}\right\};$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1}\left\{\frac{ab}{a^2 - b^2}\right\}$$



படம் 10·28

10·8-7. ஒரு சீரான அரைவட்டத்தகட்டின், விட்டமுனைப் புள்ளியிலமையும் தலையாய அச்சுகள் விட்டத்துடன் θ கோணச் சரிவைப் பெற்றிருக்குமெனில், $8 \cot \theta = 3\pi$ எனக்காட்டுக.

அரை வட்டத்தகட்டின் நிறை M ஆகுக.

a என்பது வட்டத்தின் ஆரையைக் குறிக்குமெனில், இங்கு

$$CG = \frac{4a}{3\pi} \quad \text{ஆகும்.}$$

$I_{xx} = OD$ பற்றிய, அரைவட்டத்தகட்டின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= M\frac{a^2}{4}$$

I_{yy} = Oy பற்றிய, தகட்டின் நிலைமத்திருப்புதிறன்

= GM பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன் + $M \cdot a^2$.

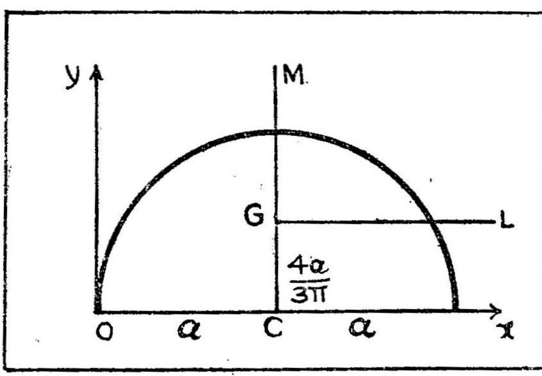
$$= \frac{Ma^2}{4} + Ma^2 = \frac{5\,Ma^2}{4}$$

I_{xy} = Ox, Oy பற்றிய தகட்டின் சடத்துவப்பெருக்கம்

= {GL, GM பற்றிய, தகட்டின் சடத்துவப்பெருக்கம்} + {Ox, Oy பற்றிய, M நிறையைப்பெற்று G-யில் அமையும் துகளின் சடத்துவப்பெருக்கம்}

= 0 + $M \cdot OC \cdot CG$

$$= M \cdot a \cdot \frac{4a}{3\pi} = \frac{4Ma^2}{3\pi}.$$



படம் 10·29

O-வில் அமையும், தலையாய அச்சுகளில் ஏதேனும் ஒன்று, விட்டத்துடன் θ கோணச்சரிவைப் பெற்றுள்ளதாகில்,

$$\tan 2\theta = \frac{2\,I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}} = \frac{2 \cdot \frac{4\,Ma^2}{3\pi}}{\frac{5\,Ma^2}{4} - \frac{Ma^2}{4}} = \frac{8}{3\pi}$$

$\therefore \quad 8 \cot 2\theta = 3\pi.$

10·8-8. $2a$ நீளம், $2b$ அகலம் உடைய ஒரு சீரான செவ்வகத் தகட்டின் நடுமையத்திலிருந்து அதன் நிறையில் பாதி அளவைப் பெற்றுள்ளதும், சதுரவடிவமுள்ளதுமான பகுதி ஒன்று

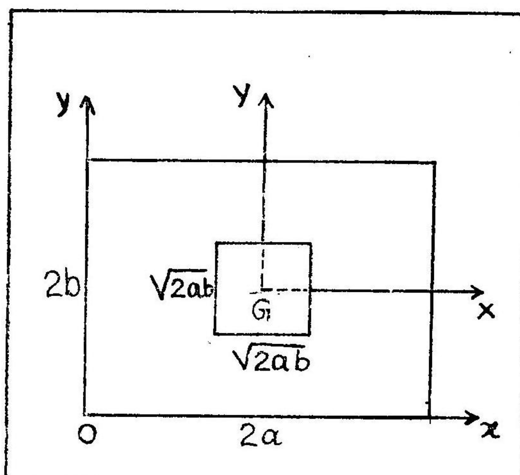
வெட்டப்பட்டு நீக்கப்படுகிறது. மீதமுள்ள செவ்வகப்பகுதியின் ஒரு முனையிலமையும் தலையாய அச்சுகள் அம்முனைவழியே செல்லும் $2a$ என்னும் பக்கத்துடன்,

$$\frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{6ab}{5(a^2-b^2)}\right\},$$

$$\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{6ab}{5(a^2-b^2)}\right\}$$

என்னும் கோணங்களைத் தாங்குமெனக்காட்டுக.

மீதமுள்ள செவ்வகத்தகட்டின் அமைப்பு, (படம் 10·30)-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 10·30

வெட்டி எடுக்கப்பட்ட சதுரப் பகுதியின் பக்கத்தின் நீளம்,

$$=\sqrt{\frac{4ab}{2}}=\sqrt{2ab}$$

$\therefore\quad I_{XX}=GX$ பற்றிய, மீதமுள்ள தகட்டின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$=4ab\rho\,.\,\frac{b^2}{3}-2ab\rho\,.\,\frac{(\sqrt{2ab})^2}{4\times 3}$$

$$=\frac{4ab\rho}{3}\left(b^2-\frac{ab}{4}\right)$$

$$=\frac{ab\rho}{3}\,(4b^2-ab)$$

$$I_{xx} = I_{XX} + (2ab\rho) \times b^2$$
$$= \frac{ab\rho}{3}(4b^2 - ab) + 2ab^3\rho$$
$$= \frac{ab\rho}{3}(10b^2 - ab)$$

அவ்வாறே,

$$I_{yy} = \frac{ab\rho}{3}(10a^2 - ab) \text{ ஆகும்.}$$
$$I_{xy} = I_{XY} + (2ab\rho).b.a.$$
$$= 0 + 2a^2b^2\rho$$

O-வில் அமையும் தலையாய அச்சுகள், OA-வுடன் $\theta, \frac{\pi}{2} + \theta$ என்னும் கோணச் சரிவைப் பெற்றுள்ளதாகில்,

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}$$
$$= \frac{2 \times 2a^2b^2\rho}{\frac{ab\rho}{3}(10a^2 - ab) - \frac{ab\rho}{3}(10b^2 - ab)}$$
$$= \frac{6ab}{5(a^2 - b^2)} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே,

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{6ab}{5(a^2 - b^2)}\right\};$$
$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left\{\frac{6ab}{5(a^2 - b^2)}\right\} \text{ ஆகும்.}$$

10·9. பயிற்சி

10·9-1. ஓர் இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம்பற்றி அதன் நிலைமத்திருப்புதிறனைக் காண்க.

[விடை : a என்பது கர்ணத்தின் தொலைவு எனில், நிலைமத் திருப்புதிறன் $\frac{Ma^2}{24}$]

10·9-2. ஒரு சதுரத்தின் மூலைவிட்டம் பற்றி, அதன் நிலைமத் திருப்புதிறனைக்காண்க.

[விடை : பக்கம் a ஆனல், நிலைமத்திறன் $= \frac{Ma^2}{12}$

மூலைவிட்டம் l ஆனல், நிலைமத்திறன் $= \frac{Ml^2}{24}$]

10·9-3. M நிறையுள்ள முக்கோண வடிவமுள்ள தகடு ஒன்றில் அதன் ஒரு பக்கத்திற்கு வரையும் குத்துயரம் (altitude) h எனில், அப்பக்கத்தைப்பற்றி அம்முக்கோணத்தின் நிலைமத் திருப்புதிறன் $\frac{Mh^2}{6}$ எனக்காட்டுக.

10·9-4. ஒரு வட்ட வளையத்தின் வெளி, உள் ஆரங்கள் முறையே, a, b ஆகும். அதன் நிறை M எனில்,

(i) அதன் மையத்தின் வழியே, அதன் தளத்திற்கு செங்குத்தாகச்செல்லும் அச்சைப்பற்றிய நிலமத்திருப்புதிறனையும்,

(ii) விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத்திருப்புதிறனையும் காண்க

[விடை : (i) $\frac{M(a^2+b^2)}{2}$, (ii) $\frac{M(a^2+b^2)}{4}$]

10·9-5. M நிறையுடைய ABC என்னும் சீரான முக்கோணத்தில், A-யிலிருந்து BC-க்கு வரையும் செங்குத்துத்தொலைவு h எனில், அதன் நிலைமத் திருப்புதிறனை (i) BC கோடு பற்றியும் (ii) அதன் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாக BC-க்கு இணையாக வரையப்பட்ட கோடுபற்றியும், (iii) A வழியாக BC-க்கு இணையாக வரையப்பட்ட கோடுபற்றியும், (iv) A வழியாக முக்கோண தளத்திற்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு பற்றியும் காண்க.

[விடை : (i) $\frac{Mh^2}{6}$; (ii) $\frac{Mh^2}{18}$; (iii) $\frac{Mh^2}{2}$

(iv) $\frac{M}{12}(3b^2+3c^2-a^2)$]

10·9-6. M நிறையுள்ளதும் ஒரே சீரானதும், a என்னும் நீளத்தைப் பக்கமாகவும் கொண்ட n பக்க பலகோணத்தின்

22. கூட்டுறவின் பிரச்சினைகள்—சாதனைகள்—எதிர்காலம்

கடந்த எழுபதாண்டுகளில் கூட்டுறவு இயக்கம் நம் நாட்டில் ஓரளவுக்கு வளர்ந்து வந்துள்ள போதிலும், அது மேலுஞ் சிறப்பாக உறுதிபெற்று வளர வேண்டிய நிலையிலுள்ளது. இயக்கத்தின் சில பிரிவுகளில் குறிப்பிடத்தக்க முன்னேற்றம் காணப்படினும் பல பிரிவுகளில் வளர்ச்சி குன்றி நிற்கின்றது. ஐந்தாண்டுத் திட்டங்கள் செயல்படுத்தப்படத் துவங்கியதிலிருந்து விவசாயக் கடன் வழங்குதுறையிலும், பக்குவப்படுத்தல் அதிலும் குறிப்பாகக் கூட்டுறவுச் சர்க்கரை ஆலைகள் துறையிலும், ஊழியர் கூட்டுறவுக் கடன் சங்கங்கள் துறையிலும் குறிப்பிடத்தக்க வளர்ச்சி காணப்பட்டது. இருப்பினும் முன்னேற்றம் நாடு முழுவதிலும் ஒரு சீராக அமையவில்லை. எடுத்துக்காட்டாக நாட்டின் கிழக்குப் பிராந்தியத்தில் கூட்டுறவு இயக்கம் சரிவர வளரவில்லை. சில மாநிலங்களில் மட்டும் இயக்கம் சீரிய முறையில் நடைபெற்று வருகின்றது. பொதுவாக, இயக்கம் பல இன்னல்களுக்கும் இடர்ப்பாடுகளுக்குமிடையே, சிக்கல்களுக்கும் பிரச்சினைகளுக்குமிடையே வளர வேண்டிய சூழ்நிலையிலுள்ளது. இவற்றுள் சிலவற்றை இந்த அத்தியாயத்தில் ஆராய்வோம்.

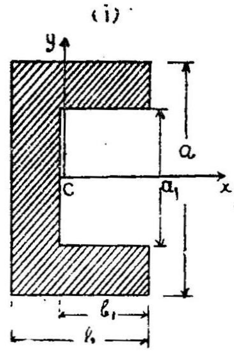
கூட்டுறவுகளின் நிருவாக அமைப்பு

கூட்டுறவு நிலையங்கள் சேவை மனப்பான்மையை முதன்மையாகக் கொண்டு செயல்பட வேண்டுமென்பதை எவரும் ஏற்றுக் கொள்வர். அதே நேரத்தில் கூட்டுறவுகள் நல்ல தொழிலமைப்புகளாகவும் இருத்தல் வேண்டுமென்பதை எவரும் மறுக்க முடியாது. நல்ல தொழிலமைப்பு ஒன்றின் முக்கியமான குறிக்கோள்களில் வாடிக்கையாளருக்கு நல்ல சேவை செய்வதும் ஒன்றாகும். ஆகவே,

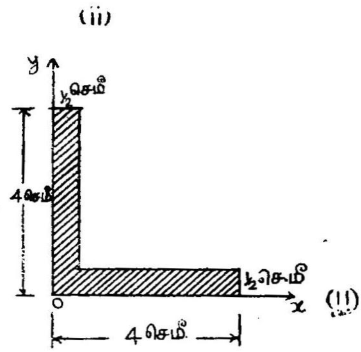
அரைகோளங்களுடன் கூடிய அமைப்பைப் பெற்றுள்ளது. அத் திடப்பொருளின் மொத்த நிறை M எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் மையச்சு பற்றிய நிலைமத்திருப்புதிறனைக்காண்க.

விடை : $\frac{19}{40} Mr^2$

10·9-11. பின்வரும் உருவப்படங்களுக்கு, OX அச்சு பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறன்களைக் காண்க.

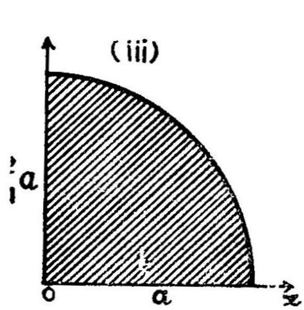


படம் 10·32

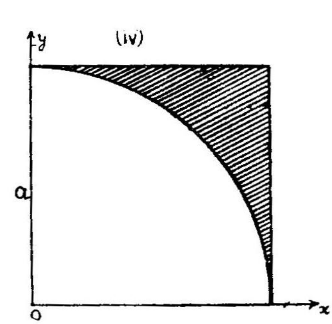


படம் 10·33

விடை : $I_x = \frac{P}{12}(ba^3 - b_1 a_1{}^3)$, விடை : $I_x = 5{\cdot}56\ P$ செமீ^{4}



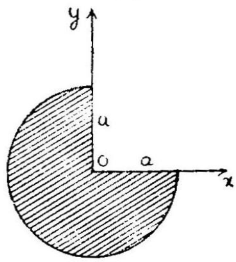
படம் 10·34

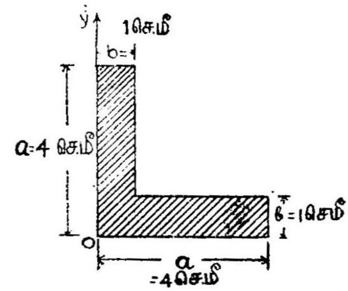


படம் 10·35

விடை : $I_x = \frac{\pi Pa^4}{16}$ விடை : $I_x = \frac{a^4 P}{48}(16 - 3\pi)$

(i)



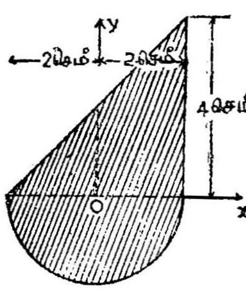


படம் 10.36 படம் 10·36

விடை : $I_x = 5 \cdot 4{\cdot}5\ P$ செமீ.[4] விடை : $I_x = 26{\cdot}83\ P$ செமீ.[4]

10·9-12. பின்வரும் உருவப்படங்களுக்கு, OX, OY அச்சுகள் பற்றிய சடத்துவப்பெருக்கத்தைக்காண்க.

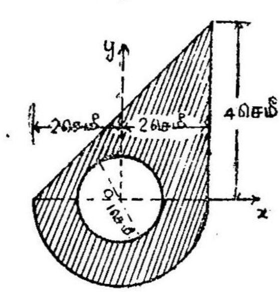
(V)



படம் 10·38

விடை : $I_{xy} = -\dfrac{a^4\ P}{8}$

(VI)

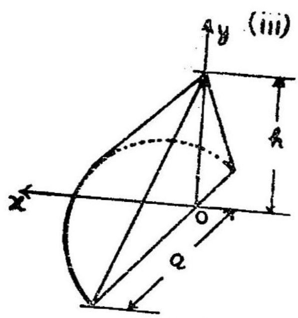


படம் 10·39

விடை : $I_{xy} = 7{\cdot}75\ P$ செமீ[4]

(iii)

(ii) அரைதின் மக்கூம்பு



படம் 10·40

விடை : $I_{xy} = \dfrac{2\ Mah}{\pi}$

11. பொறிமுறை அதிர்வுகள்
(Mechanical Vibrations)

11·1. முன்னுரை.

ஒரு குறிப்பிட்ட நேர இடைவெளியில், தொகுதி ஒன்றில் ஏறக்குறைய ஒரேமாதிரியாக அடிக்கடி ஏற்படும் இயக்கம், அதிர்வு இயக்கம் (Vibratory motion) அல்லது சீரிசை இயக்கம் (Harmonic motion) எனப்படும்.

மீள்சக்தியுள்ள இழை ஒன்றில் அல்லது சுருள்வில் ஒன்றில், ஒரு நிறையைக் கட்டித்தொங்கவிட்டு, அதன் சமநிலையிலிருந்து ஒரு சிறிய தொலைவுக்கு அசைத்துவிட்டால், அந்நிறை நிலைக் குத்துக்கோட்டிலேயே மேலும் கீழுமாக இயங்குவதைக்காணலாம். அவ்வாறே, மீட்டிய வீணையின் தந்திக்கம்பிகள் தத்தம் சமநிலையைப்பற்றி முன்னும் பின்னும் இயங்குகின்றன. இத்தகைய இயக்கங்களே, பொறிமுறையான அதிர்வுகள் எனக்கூறப்படும். இயந்திரப்பொறிகளில் இவ்வித அதிர்வுகள் நிகழ்வதையும் பார்க்கலாம். அதிர்வுகளால் இயந்திரங்களின் சில பகுதிகள் தேயக்கூடியதாகவும், அதிகதகைவு (High stresses) பெறக்கூடியதாகவும், தேவையற்ற இரைச்சல்களை உண்டுபண்ணக்கூடியதாகவும் இருப்பதால், அவ்வித அதிர்வுகளைத் தவிர்ப்பதற்கான வழிமுறைகள் பொறி அமைப்பில் ஏற்படுத்தப்பட்டிருப்பதையும் காணலாம். அளவுக்கு மீறிய அதிர்வுகளால் பாதிக்கப்பட்டு, கட்டட அமைப்புகளும் (structures) சில நேரங்களில் இடிந்துவிழவும்கூடும்.

11·2. பொறிமுறை அதிர்வுகள்.

பொதுவாக, பொறிமுறை அதிர்வுகள் இருவகையாகப் பிரிக்கப்படும். அவைகளாவன :

(1) தனிச்சீரிசையியக்கம் (Free Vibrations).

(2) வலிந்து நிகழும் இயக்கம் (Forced Vibration).

தனிச்சீரிசை யியக்கம்

பொருளொன்றை அதன் சமநிலைக்கு முன்னும், பின்னும் இயங்கச்செய்து, அதன் தொடக்க நிலைக்கே திரும்பத்திரும்ப வரச் செய்யும் விசைகள் அதன்மேல் செயற்பட்டு, அப்பொருள் இயங்குமெனில், அத்தகைய இயக்கம் தனிச்சீரிசையியக்கம் எனப்படும்.

மீளவல்ல திருகுசுருள்வில் ஒன்றில் தொங்கிக்கொண்டிருக்கும் நிறையின்மேல் இழுவிசை செயற்பட்டு நிகழ்த்தும் இயக்கம், புவியீர்ப்புவிசை தனி ஊசலொன்றில் ஏற்படுத்தும் அலைவியக்கம் ஆகியவை தனிச்சீரிசையியக்கத்திற்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

வலிந்து நிகழும் இயக்கம்.

காலவட்ட ஒழுங்குடைய புறவிசைகள் தொடர்ந்து செயற்படுவதால் நிகழும் இயக்கம், வலிந்து நிகழ்கின்ற இயக்கம் எனப்படும்

உராய்வுக்குரிய விசை புறக்கணிக்கப்படும்போது, அதிர்வானது தடையற்றிருப்பதாகக்கொள்ளப்படும். எனினும், நடைமுறையில், எல்லா அதிர்வுகளும் ஒருவகையில் தடைபட்ட இயக்கமாகத்தான் இருக்கும். தனித்தவதிர்வு இயக்கத்தின்போது, தொகுதிக்கான அதிர்வுகளின் வீச்சம் (Amplitude) குறைந்துகொண்டே சென்று, ஒரு குறிப்பிட்டநேரம் கழிந்தபின், தொகுதி இறுதியாக ஓய்வு நிலையை அடையும். தடைபட்டு வலிந்து நிகழ்கின்ற அதிர்வு இயக்கம் (Forced Vioration), அவ்வதிர்வுகளை உண்டுபண்ணும் புறவிசைகள் செயற்படுகின்ற காலம் வரையில் நிகழக்கூடியதாகும்.

ஒரு தொகுதியானது அதன் சமநிலையைப்பற்றி ஒரு முறை முன்னும், பின்னும் நிகழ்த்தும் இயக்கம் ஓர் அதிர்வு (vioration) எனப்படும். அது ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையிலிருந்து, மறு முறை அதே நிலைக்கு மீண்டும் திரும்பும்போது, அது ஓர் அலைவை (Oscillation) முடித்ததாகக் கூறப்படும். அத் தொகுதி, ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையிலிருந்து, மறு முறை அதே நிலைக்கு மீண்டும் திரும்பும் வரை கழியும் நேரம், அவ்வியக்கத்தின் "அலைவு நேரம்" அல்லது ஆவர்த்தன நேரம் (Periodic time) எனப்படும். ஒரு விநாடியில் தொகுதி மேற்கொள்ளும் அலைவுகளின் எண்ணிக்கை மீள்வெண் அல்லது அடுக்கம் (Frequency) எனக் கூறப்படும். தொகுதியானது, அதன் சமநிலையைப்பற்றி முன்னும், பின்னும் இயங்கும்போது பெறும் இடப் பெயர்ச்சியின் பெரு மதிப்பே சீரிசை இயக்கத்தின் வீச்சமாகும் (Amplitude).

பிரதம நிலையில் செயல்படும் ஓரேவகைத் தொழிலில் ஈடுபட்டுள்ளனவாகக் காணப்படுகின்றன. இணையும் சங்கங்கள் சிறப்பாகச் செயல்பட அவற்றின் உறுப்பினர்கள் இணைப்பின் நன்மையை முழுதும் உணர்ந்தவர்களாக இருக்கவேண்டும். பேரளவுத் தொழிலின் நன்மைகளைப் பெறவேண்டி உலகெங்கும் இவ்வகை இணைப்பு மேற்கொள்ளப்பட்டு வருவது குறிப்பிடத்தக்கது.

வெவ்வேறு பணிகளில் ஈடுபட்டுள்ள பிரதம சங்கங்கள் தமது தனித்தன்மையை இழக்காது ஒன்றோடொன்று ஒருவகை இணைப்பை மேற்கொண்டு செயல்படுவது படுகிடை இணைப்பு முறையின் ஒருவகை என்று கூறப்படலாம். எடுத்துக்காட்டாகக் கடன சங்கங்களும் சந்தையிடுகைச் சங்கங்களும் இணைந்து செயல்படுவதுண்டு. சந்தையிடுகைச் சங்கங்கள், உறுப்பினர் அளிக்கும் விளைபொருளை விற்று அதன்வழி கிடைக்கும் தொகையைக் கொண்டு அவ்வுறுப்பினர் கடன் சங்கத்திற்குத் திருப்பியளிக்க வேண்டிய கடனை அடைக்க ஏற்பாடு செய்வதுண்டு. இவ்வகை இணைப்புக் கூட்டுறவு இயக்கத்திற்கு வலுவளிப்பதாயுள்ளதெனினும் நடைமுறையில் இதைச் செயல்படுத்துவதில் பல இடர்ப்பாடுகள் காணப்படுகின்றன.

ஒரு நோக்குச் சங்கமா? பலநோக்குச் சங்கமா?

குறிப்பிட்ட ஒரு பணி அல்லது நடவடிக்கையை மட்டும் மேற்கொள்ளும் கூட்டுறவுச் சங்கம் ஒரு நோக்குச் சங்கம் (Single purpose society) என்று கூறப்படுகிறது. கூட்டுறவு இயக்கம் துவங்கிய காலத்தில் சங்கங்களனைத்தும் ஒரு நோக்கு சங்கங்களாகவே இருந்தன. நாளடைவில், குறிப்பாக 1930-க்குப் பின்னர் ஏற்பட்ட உலகமந்தத்தின் காரணமாகப் பலநோக்குச் சங்கங்கள் உருவாகலாயின. முக்கியமாகக் கிராமப்புறங்களில் விவசாயிகளின் வேளாண்மைத் தேவைகளை நிறைவு செய்ய பல நோக்குச் சங்கங்கள் உகந்தனவெனக் கருதப்பட்டன.

பல நாடுகளிலுள்ள விவசாயக் கூட்டுறவுகள் பெரும்பாலும் பல நோக்குச் சங்கங்களாகவே காணப்படுகின்றன. பல நோக்குக் கூட்டுறவுகளின் நன்மைகளாவன: (i) பல நடவடிக்கைகளை மேற்கொள்ள உறுப்பினர்கள் சிறிதளவே பங்கு முதல் வழங்குகின்றனர். (ii) உறுப்பினர்களிடையேயான தொடர்பு நெருக்கமடைந்து வலுப்பெறுகிறது. (iii) கிராம மக்களனைவரும் ஒரு சங்கத்தில் உறுப்பினராகும்நிலை ஏற்படுகிறது. (iv) நிருவாகச் செலவு

O-வின் வலப்பக்கமாகவுள்ள P-யின் நிலையில், x அச்சுத் தொலைவு மிகை மதிப்புடையதாகும். எனவே, முடுக்கம் எதிர் குறியைப்பெறும். அதாவது, முடுக்கம் O-வை நோக்கி இருக்கும். O-விற்கு இடப்பக்கத்தில் துகள் இயங்கும்போது, x-ஆனது குறைக் குறியுடையதாகும். ஆகவே முடுக்கம் மிகைக்குறியைப்பெறும். அதாவது, முடுக்கம் O-வை நோக்கி இருக்கும். எனவே, 1-வது சமன்பாடு, துகளின் எல்லா நிலைகளுக்கும் இசைந்ததாக அமைவதாகும். இந்த நுண்வகைச்சமன்பாடு, சீரிசை இயக்கத்தின் அடிப்படைச் சமன்பாடாகும். இச்சமன்பாட்டை

$$v \frac{dv}{dx} = -\mu x \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனவும் எழுதலாம்.

அப்போது,

$$vdv = -\mu\, xdx$$ ஆகும்.

இதனைத்தொகையிட,

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{\mu\, x^2}{2} + C$$

$$v^2 = -\mu\, x^2 + 2C$$

அல்லது, $v^2 = -\mu\, x^2 + C_1$ ஆகும்.

இங்கு C_1 என்பது தொகையீட்டு மாறிலியாகும்.

x அதிகரிக்க, துகளின் வேகம் குறைகிறது. ஆகவே, துகள், அதன் பாதையில் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் ஓய்வு பெறும். அப்புள்ளியை A எனக் கொள்க. $OA = a$ எனவும், நேரமானது, துகள் A-யிலுள்ள கணத்திலிருந்து அளக்கப்படுவதாகவும் கொள்க.

எனவே,

$t = 0$ என்றுள்ளபோது, $v = 0$, $x = a$ ஆகும்.

$$\therefore\ 0 = -\mu a^2 + c_1$$

$$\therefore\ v^2 = \mu\,(a^2 - x^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

ஆகும்.

அதாவது,

$$v = \pm\sqrt{\mu\,(a^2 - x^2)}\,,$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\mu\,(a^2 - x^2)}$$ ஆகும்.

t-யின் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது, x-ன் மதிப்பு குறைவதால், $\frac{dx}{dt}$ குறைக் குறியைப் பெறத்தக்கது.

ஆகவே,

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\mu(a^2 - x^2)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

ஆகும்.

$x = \pm a$ என்றாகும்போது, $v = 0$ ஆகும்.

அதாவது, துகள் ஓய்விலுள்ளது. $OA' = -a$ எனில், A, A' என்னுமிடங்களை அடையும்போது, அது ஓய்வடைகிறது. ஆகவே, A, A' என்னும் இரு புள்ளிகளுக்கிடையே துகள் அலை வியக்கத்தைப் பெறுகிறது. மேலும், x-ன் பெரும மதிப்ப a ஆகும்.

திசை வேகத்தின் பெரும, சிறும மதிப்புக்கள், முறையே, $+\sqrt{\mu}\,a$, $-\sqrt{\mu}\,a$ ஆகும். துகள் O-வை அடையும்போது, அது இந்த மதிப்புகளைப் பெறும்.

முடுக்கத்தின் பெரும, சிறும மதிப்புகள், முறையே, μa, $-\mu a$ ஆகும். துகள், A', A என்னுமிடங்களில் உள்ளபோது, முடுக்கம் இந்த மதிப்புக்களைப் பெறும்.

(4)-வது சமன்பாட்டை,

$$-\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{\mu}\; dt \quad \text{எனவும் எழுதலாம்.}$$

இதன் இரு புறங்களையும் தொகையிட,

$$\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \sqrt{\mu}\; t + C_2 \quad \text{என்பது கிடைக்கும்.}$$

$t = 0$ ஆகும்போது, $x = a$ எனக்கொள்வதால்,

$O = O + C_2$ ஆகும். எனவே,

$$x = a\sqrt{\mu}\,t \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

என்னும் தீர்வு கிடைக்கிறது.

(5)-வது சமன்பாட்டிலிருந்து, துகளின் நிலையை எந்நேரத்திலும் பெறலாம். மேலும்

$$x = a\cos\sqrt{\mu}\,t$$
$$= a\cos(\sqrt{\mu}\,t + 2\pi)$$
$$= a\cos\sqrt{\mu}\left(t + \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\right)$$

என்பதால், t-யின் மதிப்பை, $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ அளவு அதிகரித்தாலும், x-ன்மதிப்பு ஒரே அளவுள்ளதாகும்.

எனவே,

$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ -வுக்குச் சமமான அடுத்தடுத்த கால இடைவெளிகளின் இறுதியில், துகள் ஒரே நிலையிலுள்ளது. மேலும், இந்த இடைவெளிக்குப்பின், துகளின் திசைவேகமும், முடுக்கமும் மாறுவதில்லை. ஆகவே, $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ கால இடைவெளிக்குப்பின், துகள் தன் முந்திய நிலையில் அதே திசைவேகத்துடன், அதே திசையில் இயங்கும். எனவே,

$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ என்பது அலைவு நேரத்தைக் குறிக்கிறது.

$f =$ மீள்வெண் அல்லது அடுக்கம் $= \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi}$ ஆகும்.

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$ என்னும் சீரிசை இயக்கச் சமன்பாட்டை $\left(\frac{d^2}{dt^2} + \mu\right) x = 0$ எனவும் எழுதலாம். இது ஒரு வரிசை இரண்டுடைய வகைக்கெழு சமன்பாடாகும். இதன் துணை சமன்பாடு (Auxiliary equation)

$$m^2 + \mu = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad m = \pm i\sqrt{\mu}$$

எனவே துணைத்தீர்வுச் சார்பலன் (Complimentary function)

$$x = A\cos\sqrt{\mu}\,t + B\sin\sqrt{\mu}\,t$$

$$= C\cos\left(\sqrt{\mu}\,t + \epsilon\right) \text{ என்றாகும்.}$$

இங்கு C, ϵ என்பவை மாறிலிகள். அவைகள் முறையே, இயக்கத்தின் வீச்சு (Amplitude of motion) எனவும், கால அளவு தொடக்கத்தைச் சார்ந்த தொடக்கக் கட்டம் (Epoch) எனவும் கூறப்படும்.

11·3·2. ஒரே நேர்கோட்டில் ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கி ஒரே அலைவு நேரத்தைக்கொண்ட இரு சீரிசை இயக்கங்களின் தொகுப்பு

எடுத்த இரு சீரிசை இயக்கங்களின், வீச்சு, தொடக்க நிலைகள், ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் ஏற்படும் இடப் பெயர்ச்சிகள் ஆகியவற்றை, முறையே, a_1, a_2 ; ϵ_1, ϵ_2 ; x_1, x_2 எனக் கொள்க.

அப்போது,

$$x_1 = a_1 \cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon_1), \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$x_2 = a_2 \cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon_2) \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

ஆகும்.

இவ்விரு இடப்பெயர்ச்சிகளும் ஒரே நேர்கோட்டிலிருப்பதால், அவற்றின் விளைவும் அதே நேர்கோட்டில்தான் இருக்கும். எனவே, x என்பது அவற்றின் விளைவு எனில்,

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon_1) + a_2 \cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon_2)$$
$$= \cos\sqrt{\mu}\, t\,(a_1 \cos\epsilon_1 + a_2 \cos\epsilon_2)$$
$$- \sin\sqrt{\mu}\, t\,(a_1 \sin\epsilon_1 + a_2 \sin\epsilon_2)$$
$$= \cos\sqrt{\mu}\, t \cdot a\cos\epsilon - \sin\sqrt{\mu}\, t \cdot a\sin\epsilon$$
$$= a\cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon). \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

இங்கு, $a\cos\epsilon = a_1\cos\epsilon_1 + a_1\cos\epsilon_1$

$a\sin\epsilon = a_1\sin\epsilon_1 + a_2\sin\epsilon_2$

எனக்கொள்வதால்,

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\epsilon_1 - \epsilon_2)}$$

$$\tan\epsilon = \frac{a_1 \sin\epsilon_1 + a_2 \sin\epsilon_2}{a_1 \cos\epsilon_1 + a_2 \sin\epsilon_2}$$ ஆகும்.

(3)-வது சமன்பாட்டிலிருந்து, விளைவு இயக்கமும், ஒரு சீரிசை இயக்கமென்றும், அதன் அலைவு நேரமும், எடுத்த சீரிசை இயக்கம் ஒவ்வொன்றின் அலைவு நேரத்திற்குச் சமமென்றும் அறியலாம்.

x, y என்னும் அச்சுக்களில், தொகுப்புக்காக எடுத்த இரு சீரிசை இயக்கங்கள் ஏற்படுவதாகக் கொள்க. அவ்வியக்கங்களால் ஏற்படும் இடப்பெயர்ச்சிகளை

$$x = a\cos\sqrt{\mu}\, t$$

$$y = b\cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon)$$ எனக்கொள்க.

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்து, t-ஐ நீக்கிட,

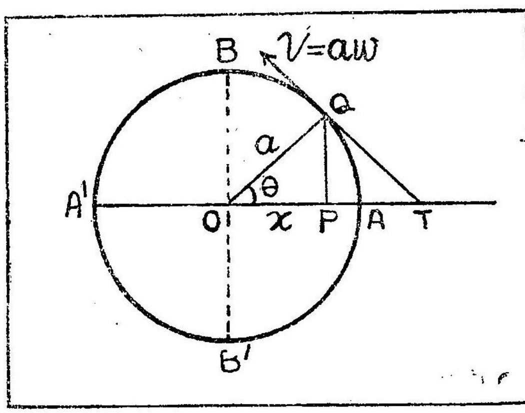
$$\frac{x_2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\epsilon + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 a\,\epsilon$$

என்னும் சமன்பாடு கிடைக்கும். இதுவே துகள் இயங்கும் பாதையை வரையறுக்கிறது. இப்பாதை ஒரு நீள் வட்டமாகும்.

11·3·4 மாருக்கோண வேகத்தோடு வட்டத்தை வரையும் புள்ளியின் தள நேரிணைப் புள்ளி (Projection) வட்டத்தின் நிலையான விட்டமொன்றில் சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொள்ளும் எனக் காணல்.

a என்பது அவ்விட்டத்தின் ஆரையாகுக.

$Q\hat{O}A = \theta = \omega t$ ஆகுக. Q என்ற புள்ளியில் QT என்னும் தொடுகோட்டை வரைக. அது OA-வை, படம் (11·2)-ல் காட்டியவாறு, T யில் சந்திக்கட்டும்.



படம் 11·2

ω என்பது வட்டத்தை வரையும் மாருக் கோண வேகமாகும்.

$QP \perp OA$ என வரையவும். ஏதேனும் t என்னும் நேரத்தில், $OP = x$ எனக்கொள்க.

$\therefore$ OPQ என்னும் முக்கோணத்தில்,

$$x = a\cos\theta = a\cos\omega t.$$

$$\therefore \quad v = \frac{dx}{dt} = -a\omega\sin\omega t = -a\omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

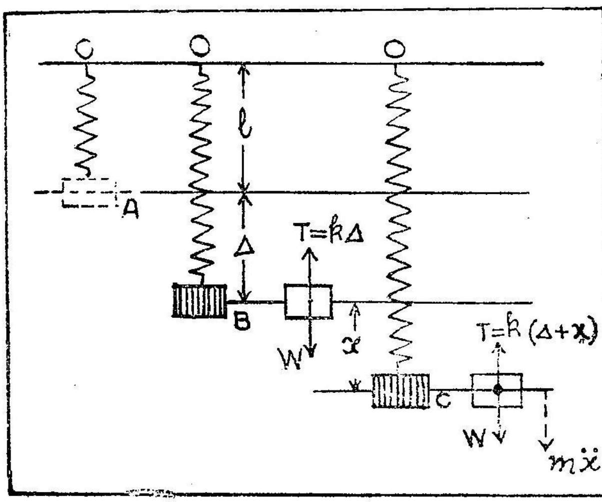
எனவே, $$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x$$

$\therefore$ $\ddot{x} = -\omega^2 x = -\mu x$ என்பது ஒரு சீரிசை இயக்கத்தைக் குறிக்குமாதலால், $A'OA$ என்னும் கோட்டில், P-ஆனது ஒரு சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொள்கிறது.

மேலும், P-யினது அலைவு நேரம் $= \dfrac{2\pi}{\omega}$ ஆகும்.

11·3-5. திருகு சுருள்வில்லிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்ட துகளின் இயக்கம் ஒரு சீரிசை இயக்கம் எனக் காணுதல்

படம் (11·3)-ல் காட்டியுள்ளவாறு, மேல் முனை ஒரு நிலையான O என்னும் புள்ளியில் பொருத்தப்பட்டு, l என்ற இயல்பான நீளத்தையும், k என்ற சுருள்வில் மாறிலியையும் கொண்ட ஒரு திருகு சுருள்வில்லின் கீழ் முனையில் $W = mg$ எடையுடைய துகளொன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்க.



படம் 11·3

படத்தில் $OA = l$ என்பது, வில்லின் இயல்பான நீளமாகும். W எடையுள்ள துகள் வில்லின் கீழ் முனையில் தொங்கவிடப்பட்டதும், அது சுருள் வில்லை நீட்சியுறச் செய்து, B என்னும் சமநிலைப்புள்ளியை எய்தும். AB-யின் நீளத்தை $\triangle$ எனக் கொள்க.

துகள் B-யில் அமைதி நிலையிலுள்ளபோது, அதன்மேல், அதன் W என்னும் எடை கீழ்நோக்கியும், சுருள் வில்லின் $T = k\triangle$ என்னும் இழுவிசை மேல் நோக்கியும் செயற்படுகின்றன.

எனவே, $W = k\triangle$ ஆகும்.

இப்பொழுது, துகளைச் சற்று செங்குத்தாக இழுத்துவிடுவோமாயின், அது B-ஐப் பற்றி மேலும் கீழுமாக இயங்கும்.

ஏதேனும் t என்னும் நேரத்தில், துகளின் நிலையை C என்னும் புள்ளி குறிக்கட்டும். $BC = x$ ஆகுக. அந்த நிலையில், துகளின் மீதுள்ள விசைகளாவன :

(1) அதன் எடை $W = mg$ என்பது நிலைக்குத்தாக கீழ் நோக்கியவாறும், (2) சுருள் வில்லின் இழுவிசை $= k(\triangle + x)$, B-ஐ நோக்கியவாறும் உள்ளன.

எனவே,

$F = m\underline{a}$ என்னும் இயக்கச் சமன்பாடு, துகளானது, அக் கணத்தில் கீழ் நோக்கி இயங்குவதாகக் கொண்டால்,

$$W - k(\triangle + x) = m\ddot{x} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது,
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= W - k\triangle - kx \\ &= W - W - kx \\ &= -kx, \end{aligned}$$

அதாவது,
$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, துகளின் இயக்கம், B-ஐக் குறித்து ஒரு சீரிசை இயக்கமாகும்.

எனவே,

அலைவு நேரம்; $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

[குறிப்பு : (i) அதிர்வின் வீச்சு, B-யின் தொடக்க இடப் பெயர்ச்சியைச் சார்ந்ததாகும். B-க்குக் கீழாக b தொலைவு துகளானது கீழே இழுக்கப்பட்டு விடப்பட்டால், அது அதே அளவு தொலைவு மேலே செல்லும்.

(ii) மீட்சியுறு திருகு சுருள் வில்லுக்குப் பதிலாக, மீட்சியுறு இழை (Extensible String) இருந்தால், அமைதிநிலைக்குரிய B-என்னும் புள்ளிக்குக் கீழாக உள்ள இடப்பெயர்ச்சியானது, $AB = \triangle$-வைவிட அதிகமாகும்போது துகள் A-வுக்கு மேலே எழும்பும்; $\triangle$-வைவிடக் குறைவாக இருந்தால், துகள் A-க்கு மேல் எழும்பாது.

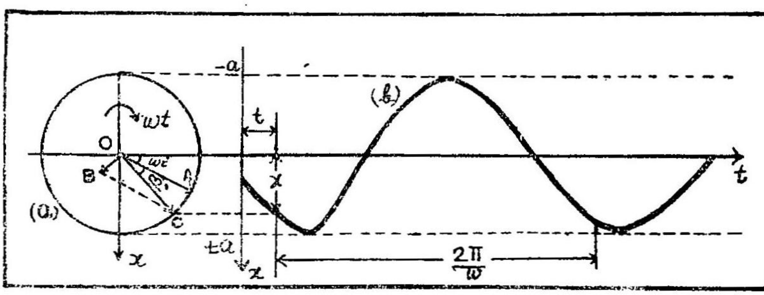
இடப் பெயர்ச்சி, $\triangle$-வைவிட அதிகமாக உள்ளபோது, துகள் A-யை அடையும் வரை இயக்கம் சீரிசையாகவும், அதன்பின், இழை தளர்ச்சி அடைவதால், பிறகு நிகழும் இயக்கம் புவியீர்ப்

பின் கீழ் கட்டிலா நிலைக்குத்து இயக்கமாகும். (Free vertical motion under gavity).

(iii) துகளின் அலைவு நேரமானது, வீச்சு (amplitude), தொடக்க நிபந்தனைகள் (initial conditions) ஆகியவற்றைச் சார்ந்திருப்பதில்லை.

(iv) துகளின் அலைவு நேரம், துகளின் எடையைச் சார்ந்திராமல், அதன் நிறையைச் சார்ந்துள்ளதால், அலைவு நேரம் புவிவீர்ப்பு முடுக்கத்திற்குச் சார்பற்றதாகும்.

(v) துகளின் இயக்கத்தை, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையும் இரு சுழலும் திசையிகளைப் பயன்படுத்தியும் படம் (11–4)-ல் காட்டியவாறு வரையறுக்கலாம்.



படம் 11·4

t என்னும் நேரத்தில், துகளானது, வட்டத்தில் C என்னும் புள்ளியில் இருக்குமெனில், அதன் திசையிக்குத்துப் பிரிவுகளை $\underline{OA}$, $\underline{OB}$ என்பவைகள் படம் (11·4) (a)-ல் வரையறுக்கின்றன. நிலைக்குத்துக் கோட்டில் இவற்றின் தள நேரிணைகளைக் (Projections) கணக்கிட்டால், அவற்றின் குறியியற் கூடுதல்,

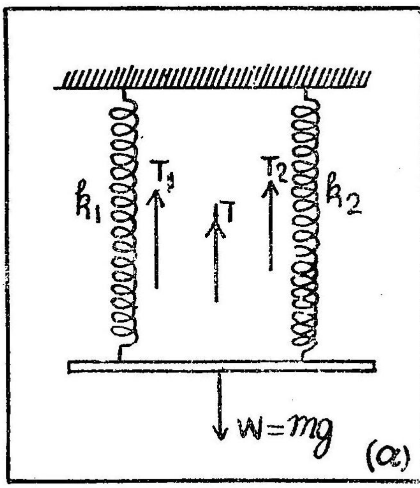
$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$= C\cos(\omega t + \beta) \quad \text{என்றாகும்.}$$

இது ஒரு சீரிசை இயக்கத்தில் ஏற்படும் இடப்பெயர்ச்சியை அறிவிக்கும் சமன்பாடாகும்.

காலம், இடப்பெயர்ச்சி ஆகியவற்றுக்குள்ள உறவை நெடுக்கை வளைகோடு (sine curve) படம் (11·4) (b)-ல் வெளிப்படுத்துகிறது. a என்னும் பெரும இடப்பெயர்ச்சியானது, அதிர்வின் வீச்சத்தை (amplitude) அறிவிக்கிறது.

படம் [11·5-(a)-ல்], இரு சுருளிவிற்களின் இணைத்தொகுப்பு காட்டப்பட்டுள்ளது. k_1, k_2 என்பவை 1-வது, 2-வது சுருளி வில்களின் வில் மாறிலிகளாகுக. அவைகள் முறையே சுருளி வில்களில் 1 செமீ. மீட்சியை ஏற்படுத்துவதற்குரிய விசைகளைக் குறிக்கும். k என்பது எடுத்த இரு சுருளி வில்களுக்கும் ஏற்றதான இணைமாற்றுச் (equivalent) சுருளி வில்மாறிலியாகுக.



படம் 11·5 (a)

எனவே, k ஆனது இணைமாற்றுச் சுருளிவில்லில், 1 செமீ. மீட்சியை ஏற்படுத்துவதற்கு ஏற்றதான விசையாகும். வில்களின் கீழ் முனைகளில் $W = mg$ எடையுள்ள சட்டமொன்று தொங்க விடப்பட்டு, அது அடையும் சமநிலைக் கோட்டிலிருந்து, x செமீ. அளவுள்ள இடப்பெயர்ச்சியடைந்தால், அந்நிலைக்குரிய மொத்த இழுவிசை

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 \\ &= k_1 x + k_2 x \\ &= (k_1 + k_2) x \end{aligned}$$

ஆனல் $k = \dfrac{T}{x} = k_1 + k_2$ ஆகும்.

∴ நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

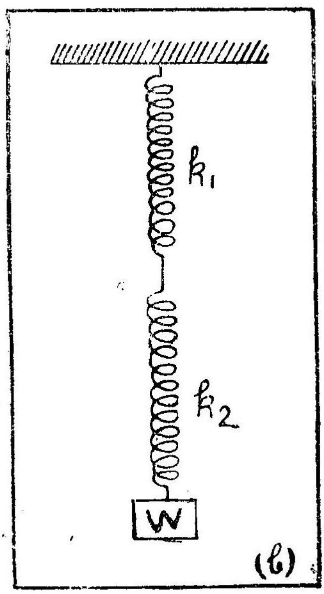
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T \\ &= -kx \\ &= -(k_1 + k_2)x \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = -\left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right) x \text{ ஆகும்.}$$

இதுவும் ஒரு சீரிசையியக்கத்தை வரையறுக்கும்.
எனவே,

$$\text{அலைவு நேரம்} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right)}}.$$

படம் (11·5 (b)-யில், இருசுருளிவில்களின் தொடரகச் சேர்க்கை காட்டப்பட்டுள்ளது



படம் 11·5 (b)

கொடுக்கப்பட்ட இருசுருளிவில்களுக்குச் சரி நிகரான தோர் சுருளி வில்லின் k என்னும் வில் மாறிலியை, நிலையியலான W என்னும் பளு (static load) ஒன்றல், எடுத்த சுருளிவில் ஒவ்வொன்றிலும் தனித் தனியே ஏற்படும் மீட்சியைக் கொண்டு வரையறுக்கலாம்.

x_1, x_2 என்பவை சுருளிவில்களில் தனித்தனியே ஏற்பட்ட மீட்சியைக் குறிக்குமெனில், மொத்த மீட்சியானது,

$$x = x_1 + x_2$$

$$= \frac{W}{k_1} + \frac{W}{k_2}$$

$$= W\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad k = \frac{W}{x} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, அலைவு நேரம்,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

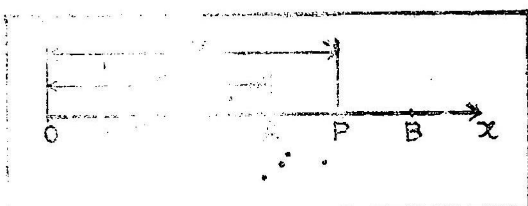
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}\right)}}$$

$$= 2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)} \text{ ஆகும்.}$$

11·3-7. கிடைத்தள மீட்சியுறு சுருளிவில்லில் பொருத்தப் பட்ட துகளின் இயக்கம்

வழவழப்பான கிடைத்தளம் ஒன்றின்மீது, O என்னும் புள்ளியில், இயல்பான l நீளமுள்ள மீட்சியுறு சுருளிவில்லின் முனை பொருத்தப்பட்டும், மற்றொரு முனையில் m நிறையுள்ள துகளொன்று கட்டப்பட்டிருக்கிறது.

படம் (11·6)-ல், OA என்பது சுருளிவில்லின் இயல்பான நீளத்தைக் குறிக்கிறது. A என்பது நிறையின் சமநிலைப் புள்ளியாகும்.



படம் 11·6

நிறையை OA திசையில் சற்று அசைத்து விட்டால், அது, A-ஐப்பற்றி முன்னும், பின்னும் இயங்கும்.

t என்னும் நேரத்தில், துகளின் நிலையை P என்னும் புள்ளி குறிக்கட்டும். $OP = x$ ஆகுக. k என்பது சுருளிவில் மாறிலியாகுக. எனவே இழுவிசை, $T = kx$ ஆகும். எனவே, துகளின் இயக்கச் சமன்பாடு,

$$m\ddot{x} = -T = -kx$$

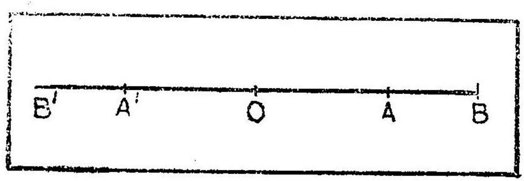
அதாவது, $$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$ ஆகும்.

ஆகவே, துகளின் இயக்கம், A-ஐ அலைவுமையமாகக்கொண்ட சீரிசை இயக்கமாகும்.

$$\therefore \quad \text{அலைவு நேரம்},\ T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

துகள் B-வரை இழுக்கப்பட்டு, பிறகு விடப்பட்டால், அது, A வழியாக B'-க்குச் சென்று மீண்டும் B-ஐ அடையும். அப்போது $AB' = BA$ ஆகும் அதுவே அலைவியக்கத்தின் வீச்சுமாகும்.

சுருளி வில்லுக்குப் பதிலாக, மீட்சியுறு இழை (elastic string) இருப்பின், B-யிலிருந்து A வரைக்கும் உள்ள இயக்கம் சீரிசை இயக்கமாகும். துகள் A-ஐ அடைந்தவுடன், இழை தளர்ச்சியடைகிறது. அப்போது, இழையில் இழுவிசை ஏதுமில்லை. எனினும், சீரிசை இயக்கத்தின் போது, A-யில் பெற்ற வேகத்துடன் இயங்கி அதே நேர் கோட்டில், படம் (11·7)-ல் காட்டியவாறு, O-வுக்கு மறுபுறமுள்ள A_1 என்னும் புள்ளிவரை செல்லும்.



படம் 11·7

இங்கு $OA_1 = AO$ ஆகும். A_1-லிருந்து B_1-வரை துகள் சீரிசை இயக்கத்திலியங்கும். இங்கு $A_1 B_1 = BA$ ஆகும். B_1-ல் ஓய்வுற்று, துகள் மீண்டும் B_1-லிருந்து A_1-வரை சீரிசையியக்கத்தை மேற்கொள்ளும். எனவே, மீட்சியுறு இழையில் அலைவு நேரம் சீரிசையியக்கத்திற்கு மட்டுமே உரியதாகும் என்பதை அறியவேண்டும்.

11·4 தனிஊசலி (Simple pendulum)

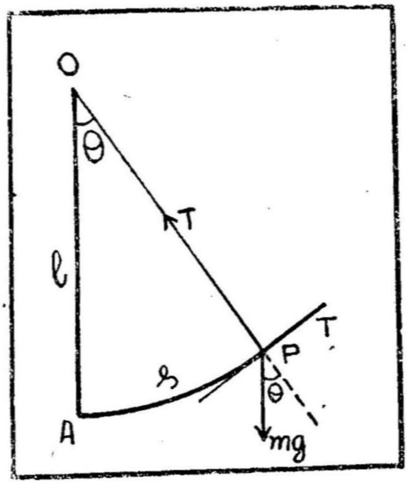
ஓர் எடையற்ற மெல்லிய, விரிவுபடாத இழையொன்றின் ஒரு முனை நிலைப்படுத்தினதாகவும், மற்றைய முனை ஒரு பளுவான சிறிய கோளத்திற்குக் கட்டப்பட்டதாயுமிருக்க, அக் கோளம் அந் நிலைப்புள்ளியை மையமாகக்கொண்டு ஒரு நிலைகுத்து வட்டப் பகுதியில் அலைவுற்றால், அவ் வமைப்பு ஒரு தனி ஊசலி எனப்படும்.

இங்கு ஊசலியானது நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன் ஒரு சிறிய கோணத்தை அமைப்பதாகக் கொள்ளப்படும். அப்போது அதன் இயக்கம் ஒரு சீரிசை இயக்கமென்றும், அதன் அலைவு நேரம் ஒரு மாறிலி என்றும் காணலாம்.

படம் (11·8)-ல் O என்பது ஒரு நிலையான புள்ளியாகுக. OA என்பது இழையின் நிலைக்குத்து நிலையைக் குறிக்கிறது. துகளின் நிறை m ஆகுக. ஏதேனுமொரு t என்னும் கணத்தில், துகளின் நிலை P ஆகுக. $A\hat{O}P = \theta$ என்னும் ஒரு சிறு கோணமாகுக. $\overset{\frown}{AP} = s$ எனக் கொள்க.

$OP = OA = l$ இழையின் நீளமாகும்.

P-யில் வட்டத்திற்கு PT என்றும் தொடுகோட்டை வரைக.



படம் 11 8

கோளத்தின்மேல் செயற்படும் விசைகள் பின்வருமாறு :

(1) அதன் எடை, mg, நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல் படும்.

(2) PO-வின் வழியே செயற்படும் T என்னும் இழு விசை தொடுகோட்டுத் திசையில் இயக்கச் சமன்பாடு,

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = - mg \sin \theta$$

$$\ddot{s} = - g\theta, \quad (\because \sin\theta = \theta, \text{ தோராயமாக})$$

ஆனால் $s = l\theta$.

எனவே $\ddot{s} = - g \frac{s}{l} = - \frac{g}{l} s$

எனவே, P-யின் இயக்கம், A-ஐப்பற்றி ஒரு தனியிசை இயக்கமாகும்.

$\therefore$ அலைவு நேரம், $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{g}}$

11·4-1. விநாடி ஊசலி (Seconds Pendulum)

அலைவு நேரம் இரண்டு விநாடிகளைப் பெற்ற ஊசலியானது, விநாடி ஊசலி எனப்படும்.

எனவே, $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2$

$$\therefore \quad \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1$$

அதாவது, $l = \frac{g}{\pi^2}$

குறிப்பு : (i) C.G.S. முறையில், $g = 981$ செமீ / (விநாடி)^2

எனக்கொண்டால், விநாடி ஊசலியின் நீளம்

$$= \frac{981}{9.87} = 99.4 \text{ செமீ.}$$

(ii) ஒரு நாளில், விநாடி ஊசலி மேற்கொள்ளும் அலைவுகள்

$$= \frac{24 \times 60 \times 60}{2} = 43200.$$

(iii) ஒரு நாளில், விநாடி ஊசலி n விநாடிகள் கூடுதலாகக் காட்டினால், அது ஒரு நாளில், $43200 + \frac{n}{2}$ அலைவுகள் மேற்கொள்வதாகும்,

ஆகவே, அதன் அலைவு நேரம்

$$= \frac{86400}{43200 + \frac{n}{2}} \text{ விநாடிகள்.}$$

(iv) அது n விநாடிகள் இழந்தால், அதன் அலைவு நேரம்

$$= \frac{86400}{43200 - \frac{n}{2}} \text{ விநாடிகள்...}$$

11·4.2 விநாடி ஊசலி அலைவு நேரத்தின் மாறுபாடுகள்

ஊசலியின் அலைவு நேரம் அதன் நீளத்தையும் (l) ஈர்ப்பு முடுக்கத்தையும் (g) சார்ந்துள்ளது. எனவே, கடிகாரங்களில் அமைந்துள்ள விநாடி ஊசலியின் அலைவு நேரம், l, g ஆகிய

வற்றின் மாறுபாடுகளால், இரண்டு விநாடிகளுக்குச் சற்று மிகையாகவோ குறைவாகவோ காணப்படும். அது மாறும் வகையைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

T விநாடிகளைக்கொண்ட தந்தவொரு நேரத்தில் t விநாடி அலைவு நேரத்தையுடைய ஒரு ஊசலி n முழு அலைவுகளை மேற்கொள்ளும்போது,

$$T = nt = n \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ ஆகும்.}$$

ஊசலியின் l என்னும் நீளமும், g என்னும் ஈர்ப்பு முடுக்கமும், $l + dl$, $g + dg$ என்று மாறுவதாகக் கொள்க. அப்போது, T என்னும் தந்தகால இடைவெளியில், ஊசலியானது, $n + dn$ அலைவுகளை நிகழ்த்துவதாகக் கொள்க. இங்கு dn என்பது கூடுதலான அலைவுகளைக் குறிக்கிறது.

எனவே, $$n + dn = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{g + dg}{l + dl}}$$

$$= \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 + \frac{dg}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{dl}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{n + dn}{n} = \left(1 + \frac{dg}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{dl}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\frac{dg}{g}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{dl}{l}\right),$$

(தோராயமாக)

$$= 1 + \frac{1}{2}\frac{dg}{g} - \frac{1}{2}\frac{dl}{l}, \quad \text{(தோராயமாக)}$$

எனவே $$\frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\frac{dg}{g} - \frac{1}{2}\frac{dl}{l} \text{ ஆகும்.}$$

இதனைப் பின் வருமாறும் வரையறுக்கலாம்.

$$n = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \text{ என்பதை}$$

$$\log_e n = \log_e\left(\frac{T}{2\pi}\right) + \frac{1}{2}\log g - \frac{1}{2}\log l$$

எனவும் எழுதலாம்.

இதற்கு வகையீடு காண,

$$\frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\frac{dg}{g} - \frac{1}{2}\frac{dl}{l},$$

$\left(\frac{T}{2\pi}\right.$ ஒரு மாறிலி என்பதால்$\left.\right)$

என்பது கிடைக்கிறது.

குறிப்பு : (i) g மட்டும் மாறினால், $dl = 0$.

$$\therefore \quad dn = \frac{n}{2} \cdot \frac{dg}{g}$$

ஆகவே, g அதிகரித்தால், அலைவுகள் கூடுதலாகும்; g குறைந்தால், அலைவுகளும் குறையும்.

(ii) l மாத்திரம் மாறினால், $dg = 0$.

$$\therefore \quad dn = -\frac{n}{2}\frac{dl}{l}.$$

ஆகவே, l அதிகரிக்கப்பட்டால், n குறையும். அதாவது, அலைவுகளின் எண்ணிக்கை குறையும். அப்போது, கடிகாரம் மெதுவாகச் செல்லும். ஆனால், l குறைக்கப்பட்டால், n அதிகமாகும். அதாவது, அலைவுகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாகும். அப்போது, கடிகாரம் வேகமாகச் செல்லும்.

(iii) ஊசலியானது, புவியின் மேற் பரப்பிலிருந்து h தொலைவு உயர்த்தப்படுவதாகக் கொள்க. புவியின் ஆரை r எனின், புவியின் மேற் பரப்பிலுள்ள பொருளின் முடுக்கம்,

$$g = \frac{Gr}{r^2} \text{ ஆகும்.}$$

புவியின் மேற்பரப்பிலிருந்து, h தொலைவு உயரத்திலுள்ள பொருளின் முடுக்கம் g_1 எனின்,

$$g_1 = \frac{Gr}{(r+h)^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{g_1}{g} = \frac{r^2}{(r+h)^2}$$

g_1 என்பது, g ஐ விடச் சற்றே குறைவாக இருப்பதால்,

$g_1 = g - dg$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad \frac{g - dg}{g} = \frac{r^2}{r^2\left(1 + \frac{h}{r}\right)^2} = \left(1 + \frac{h}{r}\right)^{-2}$$

$$= 1 - \frac{2h}{r} \text{ (தோராயமாக)}$$

$$\therefore \quad \frac{dg}{g} = +2\frac{h}{r}$$

அப்போது,

$$\frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\frac{dg}{g} = \frac{1}{2} \times \frac{2h}{r} = \frac{h}{r}$$

$$\therefore \quad dn = \frac{nh}{r}$$

எனவே, இழந்த அலைவுகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{nh}{r}$.

(vi) நியூட்டனின் விதிப்படி, புவியின் உட்புறத்தேயுள்ள ஒரு புள்ளியில் புவியின் ஈர்ப்பு, புவிமையத்திலிருந்து அப்புள்ளியின் தொலைவிற்கு நேர் விகிதத்தில் மாறுகிறது. எனவே, d ஆழத்தில் உள்ள சுரங்கத்தில், புவியீர்ப்பு g_1 எனின்

$$\frac{g_1}{g} = \frac{r - d}{r} \text{ ஆகும்.}$$

g_1 ஆனது, g ஐ விடக் குறைவாக இருப்பதால்,

$$\frac{g - dg}{g} = 1 - \frac{d}{r}$$

$$\therefore \quad \frac{dg}{g} = \frac{d}{r}$$

$$\therefore \quad \frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\frac{dg}{g} = \frac{1}{2} \times \frac{d}{r}$$

அதாவது, $dn = \dfrac{n}{2} \cdot \dfrac{d}{r}$

எனவே, இழந்த அலைவுகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{d}{r} \text{ ஆகும்.}$$

11·5. மாதிரிக் கணக்குகள்

11·5-1. ஒரு நேர்கோட்டில் சீரியக்கத்தை கொண்ட துகளொன்று, நிலையான மையப்புள்ளியிலிருந்து 40 செமீ. தொலைவிலுள்ளபோது. அதன் முடுக்கம் 80 செமீ /(விநாடி)^2 ஆக உள்ளது. அது ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு மறுபடியும் ஓய்வு நிலையை அடைய எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க. அத் துகளின் இயக்க வீச்சு 40 செமீ. எனின், அத்துகள் தன் பாதையின் மையத்தின் வழியே செல்லும்போது, அதன் வேகத்தைக் காண்க.

மையத்திலிருந்து x தொலைவில், துகளின் முடுக்கம்

$$= \mu x$$

$$\therefore \quad 40\mu = 80$$

அதாவது, $\mu = 2$

ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு, மறுபடியும் ஓய்வு நிலையை அடைய எடுக்கும் நேரம் $= \dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ ஆகும்.

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \text{ விநாடிகளாகும்.}$$

மையத்திலிருந்து, x தொலைவில், துகளின் திசைவேகம்

$$= \sqrt{\mu(a^2 - x^2)}$$

$\therefore$ மையத்தில் திசை வேகம்

$$= \sqrt{\mu}\, a = \sqrt{2} \times 40 = 40\sqrt{2}$$

செமீ./விநாடி.

11·5-2. சீரியக்கத்தில் இயங்கும் புள்ளியின் அலைவு நேரம் 12 விநாடிகளாகும். அது தன் பாதையின் மையத்திலிருந்து 2·4 மீட்டர் தொலைவில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டால், அது 1 2 மீட்டர் தொலைவைக் கடக்கும்போது கழிந்த நேரத்தையும், அப்பொழுது அது அடையும் வேகத்தையும் காண்க.

அலைவு நேரம் $= \dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 12$

$$\therefore \quad \sqrt{\mu} = \frac{\pi}{6}$$

அதாவது, $\mu = \dfrac{\pi^2}{36}$

$$x = a\cos\sqrt{\mu}\, t$$

$$1 \cdot 2 = 2 \cdot 4 \cos\frac{\pi}{6} t$$

$$\therefore \quad \frac{\pi t}{6} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore \quad t = 2$ விநாடிகள்.

துகள் அத் தருணத்தில் பெற்ற வேகம்

$$= \sqrt{\mu (a^2 - x^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi^2}{36}(2 \cdot 4^2 - 1 \cdot 2^2)}$$

$$= \frac{\pi}{6}\sqrt{3 \cdot 6 \times 1 \cdot 2}$$

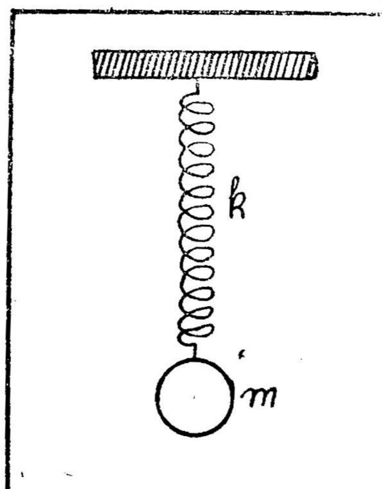
$$= \frac{2\pi\sqrt{3}}{10} \text{ மீட்டர்/விநாடி.}$$

11·5-3. படம் (11·9)-ல் காட்டியுள்ளவாறு அமையும் துகளின் பெரும வேகம் 26 செமீ. / விநாடி; இடப் பெயர்ச்சி 5 செமீ., என்றுள்ள போது, அத் துகளின் வேகம் 24 செமீ விநாடி எனில்,

(i) அலைவு நேரம்,

(ii) அலைவின் வீச்சம்

ஆகியவற்றைக் காண்க.



படம் 11 9

இங்கு பெரும வேகம் $\sqrt{\mu}\, a = 26$ மையத்திலிருந்து x தொலைவில் துகளின் திசை வேகம்,

$$= \sqrt{\mu (a^2 - x^2)}$$

$$\therefore \quad 24 = \sqrt{\mu (a^2 - 25)}$$

$$= \sqrt{\mu a^2 - 25\mu}$$

$$= \sqrt{676 - 25\mu}$$

$$\therefore \quad 25\mu = 676 - 576 = 100$$

$$\mu = 4$$

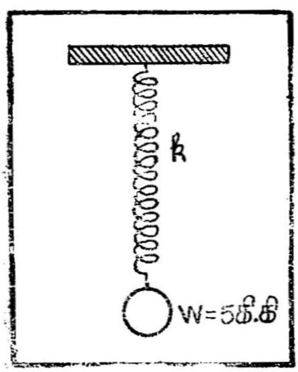
$\therefore$ அலைவு நேரம் $= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi$ வினாடிகள்.

$$\sqrt{\mu}\, a = 26$$

$$2a = 26$$

$\therefore$ $a = 13$ செமீ.

11·5.4 (படம் 11·10)-ல் காட்டியுள்ள ஊசல் குண்டின் எடை 5 கி. கி. திருகு சுருள் வில்லின் எடை புறக் கணிக்கத் தக்கதாக உள்ளது. மேலும் 5 கி. கி. அளவுள்ள விசை ஒன்று குண்டின்மேல் செயல்பட்டு அதை 4 செ மீ. தொலைவு கீழ் முகமாக இழுக்கிறது. அத் தருணத்தில் குண்டானது விடுவிக்கப்பட்டால்,



படம் 11·10

(i) விடுவிக்கப்படுமுன் சுருளி வில்லில் சேமித்து வைக்கப் பட்டுள்ள ஆற்றலின் மதிப்பு யாது?

(ii) இயக்கத்தின் அலைவு நேரம் யாது?

(iii) குண்டு பெறும் மிகப் பெரிய வேகம் யாது? குண்டானது அமைதி நிலையை அடையும் போது,

$$W = T = k\Delta \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $5 = k\Delta$.

இன்னும் 5 கி. கி. விசையானது செயல்படும் போது

$$10 = k(\Delta + 4) = k\Delta + 4k = 5 + 4k$$

$\therefore$ $k = \frac{5}{4} = 1{\cdot}25$ கி. கி./செ.மீ.

சுருளி வில்லில் சேமித்து வைக்கப்பட்டுள்ள நிலை ஆற்றல்

$$= \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1{\cdot}25 \times 8^2$$

$= 40$ செ. மீ./கி கி.

$$\text{அலைவு நேரம்} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1.25}}\sqrt{\frac{5}{981}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{5}{1.25 \times 981}}$$

$$= 0.4013 \text{ விநாடி}$$

மிகப் பெரிய திசை வேகம்

$$= \sqrt{\mu}\, a = \sqrt{\frac{1.25 \times 981}{5}} \times 8$$

$$= 125.3 \text{ செ. மீ./விநாடி.}$$

1·15.5. 200 கிராம் எடையுள்ள துகளொன்று நிலைக்குத்துத் திசையில், சீரிசை இயக்கத்தைப் பெற்ற கிடைத் தகட்டில் (horizontal plate) வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. அத் தகட்டின் அதிர்வுத் தொலைவு 39·24 செ. மீ. எனில், துகளானது, தகட்டை விட்டு விலகிட தகடு ஒரு நிமிடத்தில் நிகழ்த்த வேண்டிய அலைவுகளின் மிகச் சிறிய எண்ணிக்கை யாது? மற்றும், தகட்டின் மேல் செயல்படும் எதிர்த் தாக்க அழுத்தத்தின் மீப் பெரும மதிப்பு யாது?

இயக்க வீச்சு a எனில்,

$$2a = 39.24 \text{ செ.மீ.}$$

$$\therefore\quad a = 19.62 \text{ செ மீ.}$$

இயக்க மையப் புள்ளியிலிருந்து, மிகப் பெரிய உயரத்திலுள்ள போது, தகடானது மீப்பெரும முடுக்கத்தைப் பெறுகிறது. அப்போது. துகள் தகட்டை விட்டு விலகும். மேலும் அத் தருணத்தில், மீப்பெரும முடுக்கத்தின் மதிப்பு புவியீர்ப்பு முடுக்கத்திற்குச் சமமாகும். எனவே,

$$981 = \text{முடுக்கத்தின் மிகப்பெரிய மதிப்பு } 19.62\mu$$

$$\therefore\quad \mu = 50 \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{அலைவு நேரம்} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{5} \text{ விநாடிகள்.}$$

1 நிமிடத்தில் ஏற்படும் அலைவகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{60 \times 5}{\sqrt{2} \times \pi} = 13.5$$

தகடானது. மிகத் தாழ்ந்த நிலையிலுள்ள போதும். அதன் மிகப் பெரிய முடுக்கம், புவிஈர்ப்பு முடுக்கத்திற்குச் சமமாகும். அத் தருணத்தில், துகளின் மேல் தகடு செயல்படுத்தும் எதிர்த் தாக்க விசை R ஆகுக. எனவே, நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

$$R - W = \frac{W}{g} \times \text{முடுக்கம்}$$

$$= \frac{W}{g} \times g = W$$

$$\therefore \quad R = 2W = 400 \text{ கிராம் எடை}$$

11·5-6. ஒரு கிடைத்தட்டு நிலைக்குத்தாகத் தனியிசை இயக்கத்தைப் பெற்றுள்ளது. அதன் வீச்சு 24 செமீ., அதன் அலைவுக் காலம் 2 விநாடிகள். அத் தட்டிற்கிடக்கும் m நிறையுள்ள பொருளொன்று மைய நிலையிலிருந்து (mean position) $\frac{g}{\pi^2}$ செமீ. உயரத்தைக் கடக்கும் தருணத்தில் தட்டை விட்டு விலகும் எனக் காண்பி. அதன்பின், அப்பொருள் இறுதியாக, மைய நிலையிலிருந்து $\left(\frac{g}{2\pi^2} + \frac{288\pi^2}{g}\right)$ செமீ. தொலைவை அடையும் எனவும் காட்டுக.

m நிறையுடைய பொருளின் முடுக்கம், சீரிசை இயக்கத்தைப் பெற்ற கிடைத்தட்டின் முடுக்கத்திற்குச் சமமாகும்.

$$\text{இங்கு அலைவு நேரம், } T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 2 \text{ விநாடிகள்.}$$

$$\therefore \quad \sqrt{\mu} = \pi$$

ஒரு செமீ. தொலைவில் துகளின் முடுக்கம் $= \mu \times 1 = \pi^2$ செமீ /(விநாடி)^2.

t என்னும் நேரத்தில், பொருளின்மேல் செயற்படும் விசைகளாவன :

(i) $W = mg$ என்னும் அதன் எடை கீழ் நோக்கிய திசையில் செயல்படுகிறது.

(ii) தட்டின் எதிர்த்தாக்க விசை R, மேல் நோக்கிய திசையில் செயல்படுகிறது.

தட்டு, மைய நிலையிலிருந்து x செமீ. தொலைவு மேல் நோக்கி இயங்கும்போது, m நிறையுடைய பொருளின் இயக்கச் சமன்பாடு,

$$R - mg = m \times \text{முடுக்கம்}$$
$$= (-\mu x)$$
$$= -m\pi^2 x$$
$$\therefore \quad R = m(g - \pi^{2x})$$

R பூச்சியமாகும்போது, பொருள் தட்டைவிட்டு நீங்குகிறது.

அப்போது, $x = \frac{g}{\pi^2}$ செமீ. ஆகும்.

மேலும், $v^2 = \mu(a^2 - x^2) = \pi^2(576 - x^2)$

பொருளானது, தட்டை விட்டு விலகும்போது, அதன் வேகம்

$$= \sqrt{\pi^2\left(576 - \frac{g^2}{\pi^4}\right)}$$
$$= \sqrt{576\pi^2 - \frac{g^2}{\pi^2}} \text{ ஆகும்.}$$

அவ்வேகத்துடன், பொருள் இன்னும் y செ.மீ. உயரச் செல்வதாகில்,

$$0 = 567\pi^2 - \frac{g^2}{\pi^2} - 2gy$$
$$\therefore \; y = \left(\frac{288\pi^2}{g} - \frac{g}{2\pi^2}\right).$$

எனவே, மைய நிலையிலிருந்து துகள் கடந்த மொத்த உயரம்,

$$= x + y$$
$$= \frac{g}{\pi^2} + \frac{288\pi^2}{g} - \frac{g}{2\pi^2}$$
$$= \left(\frac{g}{2\pi^2} + \frac{288\pi^2}{g}\right) \text{ செ. மீ.}$$

11·5-7 ஒரு திருகு சுருள் வில்லில் ஒவ்வொரு கிராம் நிறை சேர்க்கப்படும்போது, அதன் நீளம் 0·25 செ. மீ. அதிகமாகின்றது. அதன் ஒரு முனை பொருத்தப்பட்டு, மற்றொரு முனையில் 20 கிராம் நிறையுள்ள துகளொன்று தொங்கவிடப்பட்டு, அலைவுறும்படிச் செய்யப்படுகிறது. இயக்கத்தின் அலைவு நேரத்தைக் காண்க. ($g = 980$ செ. மீ./(விநாடி)^2 எனக் கொள்க.

1 கிராம் நிறைக்கு நீட்சி $= 0 \cdot 25$ செ. மீ.

$\therefore$ 20 கிராம் நிறைக்கு நீட்சி $= 5$ செ.மீ.

k கிராம்/செ. மீ. என்பது வில் மாறிலி (spring constant) என்றால், 5 செ. மீ. மீட்சியுற்று, துகள் நிலையிலிருக்கும் போது, வில்லில் இழுவிசை T ஆகுக.

$\therefore \quad T = k \times 5 = 5k$ ஆகும்.

மேலும், 20 கிராம் நிறை சமநிலையிலுள்ளதால்,

$$T = mg \text{ ஆகும்.}$$

$$5k = 20g$$

அதாவது, $\quad k = 4g$ ஆகும்.

துகளானது, அலைவியக்கத்திலுள்ள போது, அதன் சம நிலைக்குக் கீழ், x செ. மீ. தாழ்ந்திருக்கும் நேரத்தில், வில்லின் இழு விசை,

$$T_1 = k\,(5 + x) \text{ ஆகும்.}$$

துகளின் எடை $= 20g$.

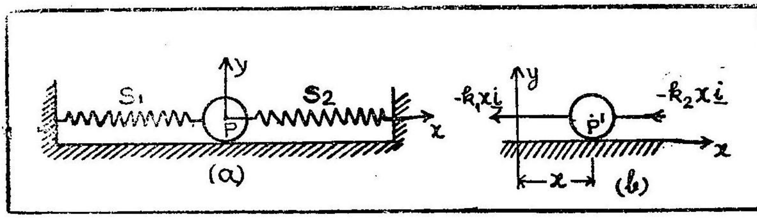
எனவே, சீரிசை இயக்கத்திற்கான நுண்வகைச் சமன்பாடு,

$$20\ddot{x} = 20g - T_1 = 20g - 5k - kx$$
$$= 20g - 20g - 4gx$$
$$= -4gx$$
$$\therefore \quad \ddot{x} = -\frac{g}{5}x$$
$$= -\frac{980}{5}x$$
$$= -196x$$

$\therefore$ அலைவு நேரம் $= \dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{196}} = \dfrac{\pi}{7}$ விநாடி.

11.5.8 40 கி. கி. எடையுள்ள பொருளொன்று, படம் (11·11)-ல் காட்டிய வாறு, $k_1 = 3$ கி கி/செ மீ.: $k_2 = 9$கி.கி/செ.மீ என்னும் வில் மாறிலிகளைக் கொண்ட S_1, S_2 என்னும் இரு திருகு சுருள் வில்களில் பொருத்தப்பட்டு, அமைதி நிலையில் வைக்கப் பட்டிருக்கின்றது. அப்பொருளானது கிடைத்தளத்தில். உராய் வற்று வழுக்கி இயங்குகிறது. தனிச் சீரிசை இயக்கத்தின் அடுக் கத்தைக் காண்க.

பொருளானது, x அச்சின் மிகைத் திசையில், x செமீ. தொலைவு இடப்பெயர்ச்சியைப் பெறும்போதுள்ள அமைப்பு படம் [11·11-(b)]-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 11·11

பொருளின் இயக்கச் சமன்பாடு,

$$\frac{W}{g}\ddot{x}\,\underline{i} = -(k_1 + k_2)\,x\,\underline{i} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \frac{40}{g}\ddot{x} = -12x$$

அதாவது, $\ddot{x} = -\dfrac{3g}{10}\,x = -\mu x.$

எனவே,

$$\text{அடுக்கம்} = \text{மீள்வெண்} = f = \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi} = \frac{17{\cdot}155}{2\pi}$$

$$= 2{\cdot}729\ Hz.$$

11·5-9. m நிறையுடைய துகளொன்று, படம் (11·12)-ல் காட்டியவாறு, கிடையாக அமையும் கம்பியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்துத் திசையில் ஏற்படும் ஒரு சிறிய அலைவுக்கு ஏற்றதான மீள்வெண்ணைக் காண்க.

t என்னும் நேரத்தில், நிலைக்குத்துத் திசையில், m நிறையுடைய துகள், x தொலைவு கீழ் நோக்கி இயங்கும்போது, கம்பியின் இழு விசையை T எனக் கொள்க. அப்போது துகளின் இயக்கச் சமன்பாடு,

$$m\ddot{x} = -T\sin\theta_1 - T\sin\theta_2$$

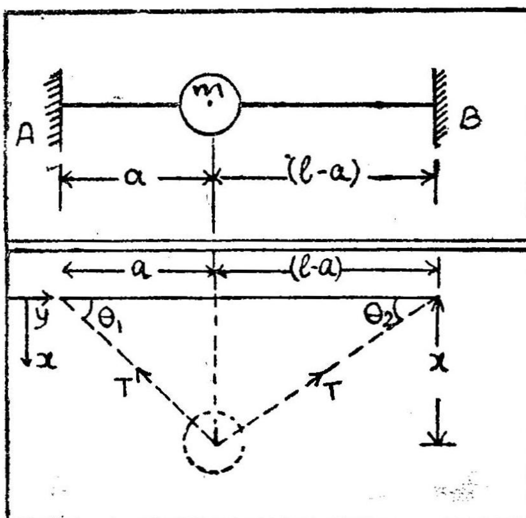
$$= -T\left[\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x}{\sqrt{(l-a)^2 + x^2}}\right]$$

$$= -T\left[\frac{x}{a}\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{x}{l-a}\left(1 + \frac{x^2}{(l-a)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= -T\left[\frac{x}{a} + \frac{x}{l-a}\right], \text{ தோராயமாக}$$

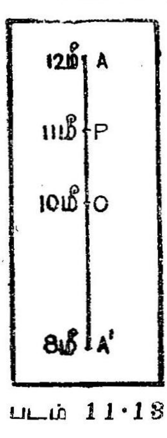
$$\therefore \quad \ddot{x} = -\frac{Tlx}{m(l-a)a} = -\mu x$$

$$\therefore \quad f = \text{மீள்வெண்} = \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Tl}{ma(l-a)}}$$



படம் 11·12

11·5.10. ஒரு குறிப்பிட்ட நாளன்று, ஒரு துறைமுகத்தில் கடல் ஏற்றம் (high water) கொள்ளும்போது, நீரின் ஆழம் 12 மீ. இதற்கு 6 மணிக்குமுன் கடல் இறக்கம் (low water) கொள்ளும் போது நீரின் ஆழம் 8 மீட்டர். கடலின் ஏற்றம் பிற்பகல் 4 மணி 15 நிமிடத்திற்கு எதிர் பார்க்கப்படின், 11 மீட்டர் ஆழம் தேவைப் படும் ஒரு கப்பலானது துறைமுகத்திற்குள் வரக் கூடிய மிகச் சீக்கிரமான நேரம் யாது? (கடல் நீரின் ஏற்றமும், இறக்கமும் ஒரு சீரிசை இயக்க மாகக் கொள்க.)



படம் 11·13

கடலின் ஏற்ற நிலை, இறக்க நிலை ஆகிய வற்றின் போதுள்ள நீரின் ஆழத்தை A, A' என்ற புள்ளிகள் குறிக்கட்டும்.

$\therefore \quad AA' = 12 - 8 = 4$ மீட்டர்.

AA'-ன் மையப்புள்ளி O ஆகுக.

$\therefore$ O என்பது 10 மீட்டர் ஆழ நிலையைக் குறிக்கிறது. சீரிலைச இயக்கத்தின் வீச்சு a எனின்,

$$2a = 4, \quad \text{அல்லது} \quad a = 2 \text{ மீட்டர் ஆகும்.}$$

$$\text{அலைவு நேரம்} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 12 \text{ மணி}$$

$$\therefore \quad \sqrt{\mu} = \frac{\pi}{6}.$$

P-என்ற புள்ளியானது. O, A என்ற புள்ளிகளுக்கிடையே யுள்ள யாதேனுமொரு நிலையைக் குறிக்கட்டும்.

$$OP = x \quad \text{ஆகுக.}$$

நேரம் A யிலிருந்து அளக்கப்படின்,

$$x = a \cos \sqrt{\mu}\, t \quad \text{ஆகும்.}$$

$OP = 1$ மீட்டர் உள்ளபோது, P என்பது கப்பல் துறைமுகத்திற்குள் வரக்கூடிய 11 மீட்டர் ஆழநிலையைக் குறிக்கிறது.

$$\therefore \quad 1 = 2 \cos \frac{\pi}{6} t$$

$$\text{அல்லது} \quad \cos \frac{\pi t}{6} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \quad t = 2 \text{ மணி.}$$

எனவே, கப்பல், P-யிலிருக்கக் கூடிய மிகச் சீக்கிரமான நேரம் = பிற்பகல் 2 மணி 15 நிமிடம்.

115-11. விநாடி ஊசலி ஒன்றின் நீளம் 900 : 901 என்ற விகித அளவில் மிகை படுத்தப்பட்டால், அது ஒரு நாளில் எத்தனை விநாடிகள் இழக்குமெனக் காண்க.

$$\text{இங்கு} \quad \frac{l + dl}{l} = \frac{901}{900} \quad \text{அல்லது} \quad \frac{dl}{l} = \frac{1}{900}$$

$$n = \text{ஒரு நாளில் நிகழும் அலைவுகள்}$$
$$= \frac{86400}{2} = 43200$$

$$\frac{dn}{n} = -\frac{1}{2}\frac{dl}{l} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{900} = -\frac{1}{1800}$$

$$\therefore \quad dn = -\frac{43200}{1800} = -24 \text{ அலைவுகள்.}$$

∴ இழந்த அலைவுகளின் எண்ணிக்கை = 24.

எனவே, நாளொன்றுக்கு இழக்கும் விநாடிகளின் எண்ணிக்கை

$= 2 \times 24 = 48$ விநாடிகள்.

11 5-12. புவியீர்ப்பின் முடுக்கம் 980 செமீ./(விநாடி)^2 ஆக உள்ள இடத்தில், விநாடிகள் அடிக்கும் ஊசலி, புவியீர்ப்பின் முடுக்கம் 980·98 செமீ./(விநாடி)^2 ஆக உள்ள இடத்திற்கு மாற்றப்பட்டால், நாளுக்கு எத்தனை விநாடிகள் வீதம் கூடுதலாக நேரத்தைக் காட்டுமெனக் காண்க.

இங்கு $\dfrac{g + dg}{g} = \dfrac{980 \cdot 98}{980 \cdot 00}$,

அல்லது $\dfrac{dg}{g} = \dfrac{0 \cdot 98}{980} = \dfrac{98}{98000} = \dfrac{1}{1000}$

$\dfrac{dn}{n} = \dfrac{1}{2} \dfrac{dg}{g}$ என்பதால்,

$$dn = \frac{n}{2} \times \frac{1}{1000} = \frac{43200}{2 \times 1000} = 21 \cdot 6$$

எனவே, நாளொன்றுக்குக் கூடுதலாகும் அலைவுகளின் எண்ணிக்கை = 21·6.

∴ நாளொன்றுக்குக் கூடுதலாகும் நேரம்

$= 2 \times 21 \cdot 6 = 43 \cdot 2$ விநாடிகள்.

11·5-13. புவியீர்ப்பு முடுக்கம் 981 செமீ./(விநாடி)^2 ஆக உள்ள இடத்தில், விநாடி ஊசலியுடனுள்ள ஒரு கடிகாரம், நாளுக்கு 9 விநாடிகள் இழக்கின்றது. அது திருத்தமான நேரம் காட்டுதற்கு அவ்வூசலியின் நீளத்தில் செய்யவேண்டிய மாற்றத்தைக் காண்க.

சரியான விநாடி ஊசலியின் நீளம் $\dfrac{g}{\pi^2}$-ஐ, l எனக் கொள்க. l ஆனது, $l + dl$ ஆக மாறும்போது, குறையும் அலைவுகளின் எண்ணிக்கை,

$$dn = \frac{n}{2} \cdot \frac{dl}{l} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு கொடுக்கப்பட்ட ஊசலி நாளொன்றுக்கு 9 விநாடிகள் இழக்கின்றது. அதாவது, அது 4 5 அலைவுகள் இழக்கின்றது.

எனவே, ஊசலியின் நீளம் சரியான ஊசலியின் நீளத்தைவிட dl அளவு அதிகமாக இருக்கிறது.

ஊசலியைத் திருத்த, அதன் நீளத்தை dl அளவு குறைக்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad 4{\cdot}5 = \frac{43200}{2} \times \frac{dl}{l}$$

$$\therefore \quad dl = \frac{9}{43200} \times l$$

$$= \frac{9}{43200} \times \frac{g}{\pi^2}$$

$$= \frac{9}{43200} \times \frac{981}{9{\cdot}87}$$

$$= 0{\cdot}02094 \text{ செமீ.}$$

எனவே, நீளத்தை 0·021 செமீ. குறைக்கவேண்டும்.

புவியின் மேற்பரப்பில் விநாடிகள் அடிக்கின்ற ஊசலி ஒன்று 4 கிலோ மீட்டர் உயரமான ஒரு மலையினுச்சிக்குக் கொண்டு செல்லப்படுகின்றது. புவியின் ஆரையை 6356·8 கிலோ மீட்டர் எனக்கொண்டு, ஒரு நாளில் அது எத்தனை விநாடிகள் இழக்கு மெனக் காண்க.

இழக்கும் அலைவுகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{nh}{r}$$

$$= \frac{43200 \times 4}{6356{\cdot}8}$$

$$= 27{\cdot}18$$

$$\therefore \quad \text{இழந்த விநாடிகள்} = 27{\cdot}18 \times 2$$

$$= 54{\cdot}36 \text{ விநாடிகள்.}$$

11·6 பயிற்சி

11·6-1. ஒரு துகள் சீரியக்கத்தோடு ஒரு நேர் கோட்டில் இயங்குகிறது. அதன் மீப்பெரு முடுக்கமும், மீப்பெரு திசைவேகமும் முறையே, 10 மீ./(விநாடி)^2, 1 மீ./விநாடி எனின், இயக்கத்தின் வீச்சையும், மீள்வெண்ணையும் காண்க.

[விடை : 10 செமீ., $\frac{5}{\pi}$]

11·6-2. ஒரு துகள் சீரிசை இயக்கத்தோடு ஒரு நேர் கோட்டியங்குகிறது. அதன் அலைவுக்காலம் 4 விநாடிகள். அதன் இயக்க வீச்சு 2 மீட்டர். அத் துகள் தன் பாதையின் மையத்தின் வழியாகச் செல்லும்போது, அதன் வேகத்தைக் காண்க.

[விடை : π மீட்டர்/விநாடி]

11·6-3. ஒரு நேர் கோட்டில் சீரிசை இயக்கத்தைப் பெற்ற துகளொன்றின் இயக்க வீச்சு 2 மீட்டர் ஆகவும், அலைவுக்காலம் 4 விநாடிகளாகவும் இருக்குமெனில், அத் துகள் மையப் புள்ளியின் ஒரு முகமாக 1·50 மீட்டர் தொலைவிலிருந்து 0·75 மீட்டர் தொலைவை அடைய எடுக்கும் நேரம் யாது?

[விடை ; 0·295 விநாடி]

11·6-4. ஒரு துகள் தன் பாதையின் மையத்திலிருந்து, 6 மீட்டர் தொலைவில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டுத் தனிச் சீரிசை இயக்கத்தோடு இயங்குகிறது. அதன் தொடக்க நிலையில் முடுக்கம் 1·4 மீட்டர் (விநாடி)^2 எனில்,

(i) மையத்திலிருந்து 3 மீட்டர் தொலைவிலும்,

(ii) மையத்தின் வழிச் செல்லும்போதும், அதன் வேகத்தைக் காண்க.

(iii) அதன் அலைவு நேரத்தையும் காண்க.

[விடை : (i) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ மீ/வி; (ii) 3 மீ/வி;

(iii) 4π விநாடிகள்]

தனியிசை இயக்கத்தைப்பெற்ற துகளின் மீப்பெரு திசைவேகம் 2 மீ/வி. ஆகும். அதன் அலைவு நேரம் $\frac{2}{5}$ விநாடி. அதன் இயக்க வீச்சு யாது?

[விடை : $\frac{2}{5\pi}$]

11·6.5 m நிறையுடைய துகளொன்று ஒரு நேர் கோட்டில் நிலையான, O எனனும் மையப் புள்ளியிலிருந்து M தொலைவிலுள்ள போது, $m(n^2r)$ என்னும் மைய நோக்கிய விசையால் சீரிசை இயக்கத்தைப் பெற்றுள்ளது. இயக்கத்தின் வீச்சு a எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. O-விலிருந்து, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ தொலைவிலுள்ள போது, துகளானது, அதன் இயக்க திசையில் ஒரு கணத்தாக்க

விசையால் தாக்கப்பட்டு, na என்னும் திசை வேகத்தைப் பெறுகிறது. அத் திசை வேகம் O-விலிருந்து வெளி நோக்கிய திசையில் செயற்படுவதாகில், இயக்கத்தின் புதிய வீச்சு $\sqrt{3}\,a$ ஆகும் எனக் காண்க.

11·6.6 a என்னும் இயக்க வீச்சையும், T என்னும் அலைவு நேரத்தையம் கொண்ட துகளொன்று, ஒரு நேர் கோட்டில் சீரிசை இயக்கத்தைப் பெற்றுள்ளது. அலைவு மையப் புள்ளியிலிருந்து இயங்கி, $\frac{\theta T}{2\pi}$ நேரம் கழிந்த பின் அது மையப் புள்ளிக்கு x தொலைவு அப்பால், வினாடிக்கு $\frac{2\pi\sqrt{a^2-x^2}}{T}$ என்னும் வேகத்துடன் இயங்குமெனக் காண்பி. இங்கு $x = a\sin\theta$ எனக் கொள்க.

11·6.7. 150 கிலோ கிராம் எடையுள்ள பொருள் நிலைக்குத்துத் திசையில், வில்மாறிலி $k = 50$ கி.கி விசை/செ.மீ. என்புள்ள ஒரு திருகு சுருள் வில்லின் அடி நுனியில் தொங்கவிடப் பட்டிருக்கின்றது. அப்பொருள் அதன் அமைதி நிலைப் புள்ளியிலிருந்து 5 செ.மீ. தொலைவு கீழ் நோக்கி இழுக்கப்பட்டு விடுவிக்கப் படுகிறது. பொருளின் மிகப் பெரிய முடுக்கத்தையும், அலைவெண்ணையும் காண்க. [விடை 1·308 மீ./வினாடி; 2·876]

11·6.8. ஒரு நேர் கோட்டில் துகளொன்று சீரிசை இயக்கத்தோடு இயங்குகிறது. அத்துகள் மையப் புள்ளியிலிருந்து 20செ.மீ. தொலைவிலுள்ள போது, 25 மீ./வினாடி என்னும் வேகத்துடனும், மையப் புள்ளிக்கு அப்பால் மேலும் 10 செ. மீ. தொலைவிலுள்ள போது, 20 மீ வினாடி என்னும் வேகத்துடனும் இயங்குகிறதெனில் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) இயக்க வீச்சு. (ii) அலைவு நேரம், (iii) அடுக்கம், (iv) திசை வேகத்தின் பெரும மதிப்பு.

[விடை : (i) 25·3 செமீ., (ii) 0·116 வினாடி ; (iii) 6, (iv) 9 533 மீ/வினாடி]

11·6-9. துகளொன்று ஒரு நேர் கோட்டில் சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொள்ளுகிறது. ஒன்றுக்கொன்று 1 செமீ. தொலைவிலுள்ள மூன்று புள்ளிகளில் அதன் வேகங்கள், முறையே, வினாடிக்கு 11, 9, 5 செமீ. எனில், அதன் அலைவு நேரத்தையும், மீப்பெரு வேகத்தையும் காண்க.

[விடை : $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ வினாடி ; $3\sqrt{17}$ செமீ/வினாடி.]

11·6-10, ஒரு துகள் 12 செமீ. நீளமுள்ள நேர் கோட்டில் நிமிடத்திற்கு 240 அலைவுகள் வீதம் தனியிசை இயக்கத்தில் இயங்குகிறது. அத் துகளின் மீப்பெரு வேகத்தையும், மீப்பெரு முடுக்கத்தையும் காண்க.

விடை : 6π செமீ./விநாடி ; $3\pi^2$ செமீ./(விநாடி)^2]

11·6-11. தனியிசை இயக்கத்தைப்பெற்ற துகளுக்கு, அது தன் பாதையின் மையத்தின் வழியாகச் செல்லும்போது விநாடிக்கு 6 மீட்டர் என்னும் வேகம் உண்டு. அதன் அலைவு காலம் $1\cdot5\pi$ விநாடிகளாகும். அதன் வேகம் பூச்சியமாக உள்ள நிலையிலிருந்து $1\cdot5$ மீட்டர் சென்ற பொழுது அதன் வேகம் யாது ?

[விடை : $2\sqrt{5}$ மீ/விநாடி]

11·6-12. துகளொன்று ஒரு நேர்கோட்டிலியங்குகிறது. அக் கோட்டில் நிலையான ஒரு புள்ளியிலிருந்து x தொலைவில் துகள் உள்ளபோது அதன் திசை வேகம், $v^2 = k - lx^2$ என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படுமெனில், துகளின் இயக்கம் ஒரு சீரிசை இயக்கமெனக் காட்டுக. அவ்வியக்கத்தின் அலைவு நேரம், வீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்க.

[விடை : $\left\{ \frac{dv}{dt} = - lx \right\}$; வீச்சு $= \sqrt{\frac{k}{l}}$;

அலைவு நேரம் $= \frac{2\pi}{\sqrt{l}} \Big\}$]

11·6·13. f என்னும் மாறு முடுக்கத்துடன், OX என்ற நேர் கோட்டில் இயங்கும் A என்ற புள்ளியை நோக்கி, m நிறையுள்ள P என்னும் துகள், $m\mu \times PA$ என்னும் விசையின் கீழ், அந்த நேர் கோட்டிலேயே இயங்குகிறது. P-ன் இயக்கமானது A-ன் பின்னால் எப்பொழுதும் $\frac{f}{\mu}$ என்னும் தொலைவில் இயங்கும் மையத்தைப் பற்றி, $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ என்னும் அலைவு நேரத்தைக் கொண்ட ஒரு தனியிசை இயக்கமாகுமென நிறுவுக.

[குறிப்பு : $\ddot{x} = -\mu\left(x - \frac{1}{2} f t^2\right)$

$$X = x - \frac{1}{2} f t^2 + \frac{f}{\mu}$$

$$\ddot{X} = -\mu x$$]

11·6-14. m நிறையுள்ள துகளொன்று நிலையான மையப் புள்ளியை நோக்கி $m\mu x$ என்னும் விசையின் கீழ், x அச்சில் இயங்குகிறது. $t = 3$ விநாடிகள் ஆகும்போது அது மையப் புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது. $t = 6$ விநாடிகள் ஆகும்போது அதன் வேகம் விநாடிக்கு 3 மீ. எனில், இயக்கத்தை வரையறுக்க. முழு அலைவு நேரம் 24 விநாடிகள் எனின், பாதையின் வீச்சு $\frac{36\sqrt{2}}{\pi}$ மீட்டர் ஆகுமெனக் காட்டுக.

11·6-15. தனியிசை இயக்கத்தை மேற்கொள்ளும் துகளொன்றின் முடுக்கம், ஏதேனுமொரு நேரத்தில் திசை வேகம், அலைவு நேரம் ஆகியவை முறையே f, N, T எனின்,

$$f^2 T^2 + 4\pi^2 N^2$$

என்பது ஒரு மாறிலியாகும் எனக் காட்டுக.

11·6-16. t என்னும் நேரத்தில், இயங்கும் துகளொன்றின் இடப்பெயர்ச்சி, $x = a\cos nt + b\sin nt$ எனின், அத்துகள் ஒரு சீரிசை இயக்கத்தைப் பெற்றுள்ளது என நிறுவுக.

11·6-17. தனியிசை இயக்கத்தை மேற்கொண்டுள்ள ஒரு துகளின் நிறை, வீச்சு, மீள்வெண் ஆகியவை முறையே, m, a, n எனின், அதன் ஆற்றல் $2\pi^2 ma^2 n^2$ எனக் காட்டுக. மற்றும் துகளின் ஆற்றலானது, இடப்பெயர்ச்சியின் மதிப்பைச் சார்ந்திராமல், எக்கணத்திலும் ஒரே மதிப்பைக் கொண்டுள்ளது எனவும், ஆனால் வீச்சு, மீள்வெண் ஆகியவற்றின் வர்க்கங்களுக்கு நேர் விகிதத்தில் உள்ளது எனவும் நிறுவுக.

11·6-18. ஒரு கிடைத்தட்டு நிலைக்குத்தாக சீரிசை இயக்கத்தோடு இயங்குகிறது. அதன் அலைவு நேரம் 2 விநாடிகளாகும். அத் தட்டில் கிடக்கும் பொருள் எப்பொழுதும் அதனைத் தொட்டுக் கொண்டு கிடக்குமாறு இருப்பதற்கு ஏற்றதான மிகப் பெரிய இயக்க வீச்சம் யாது? [$g = 980$ செமீ./(விநாடி)^2 எனக் கொள்க.]

[விடை: $\frac{g}{\pi^2} = 99{\cdot}32$ செமீ.]

11·6-19. கிடைத்தட்டு ஒன்று தனியிசையியக்கத்தைப் பெற்றுள்ளது. அதன் வீச்சு 6 செமீ. அதன் அலைவு நேரம் 2 விநாடிகளாகும். அத் தட்டிற்கிடக்கும் 1 கிலோகிராம் நிறையுள்ள நூலொன்று தட்டைவிட்டுப் போகாதெனக் காட்டுக.

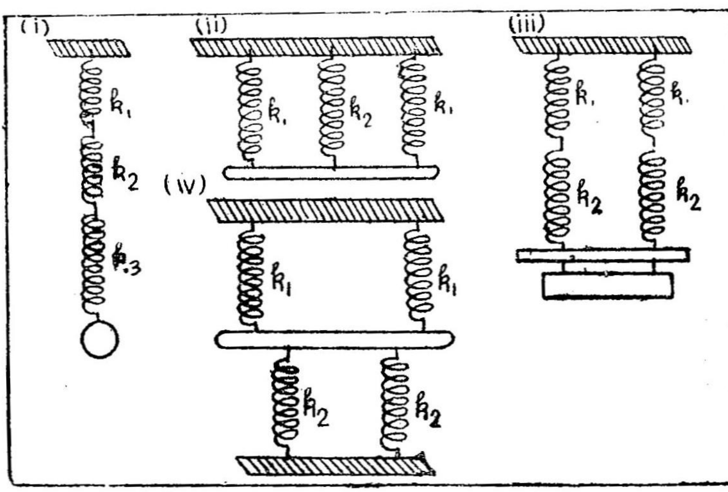
தட்டின் மீது நூல் செயற்படும் மிகப் பெரிய, மிகச் சிறிய அழுத்தங்களைக் காண்க.

[விடை : $(g + 6\pi^2)$ டைன்கள் ; $(g - 6\pi^2)$ டைன்கள்]

11·6-20. ஒரு கிடைத்தட்டு கிடையாகத் தனியிசையியக்கத்தைப் பெற்றுள்ளது. அது 120 செமீ. தொலைவுக்கு முன்னும், பின்னும் இயங்கக் கூடியதாகவும், ஒரு நிமிடத்தில் 15 நிறைவான (complete) அலைவுகளை ஏற்படுத்தக்கூடியதாகவும் உள்ளது. அத் தட்டிற்கிடக்கும் பளுவான பொருள், தட்டை விட்டுப் போகாமலிருக்க, தட்டின் மிகச் சிறிய உராய்வுக் கெழுவைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை : உராய்வுக்கெழு} = \frac{5\pi^2}{g} \right]$$

11·6-21. பின் வரும் திருகு சுருள் வில்களின் தொகுதிக்குரிய வில் மாறிலியின் மதிப்பு யாது ?



படம் 11·14

விடை :

(i) $k = \dfrac{k_1k_2k_3}{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1}$

(ii) $k = 2k_1 + k_2$

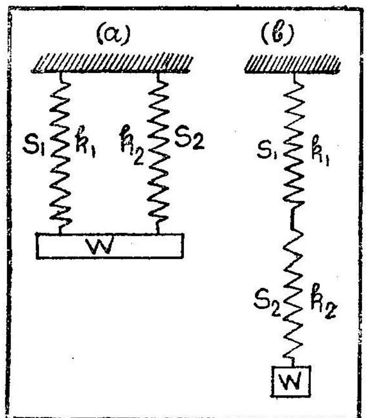
விடை :

(iii) $k = \dfrac{2\,k_1k_2}{k_1 + k_2}$

(iv) $k = 2\,(k_1 + k_2)$

11·6-22. படம் (11·15)-ல் காட்டப்பட்டுள்ள அமைப்புகளில் S_1, S_2 என்னும் திருகு சுருள்வில்களின் வில்மாறிலிகள்,

முறையே, $k_1 = 2$ கி.கி./செமீ., $k_2 = 3$ கி.கி./செமீ. எனில், அவற்றின் தொகுதிக்குரிய வில் மாறிலியின் மதிப்பைக் காண்க.



படம் 11·15

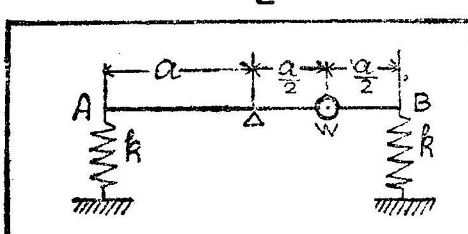
வில்களில் தொங்கவிடப்பட்ட பொருளின் எடை $W = 10$ கி. கி. எனில், தனிச் சீரிசை இயக்கங்களின் மீள்வெண்களைக் காண்க.

[விடை : (a) 5 கி.கி./செமீ., $f = 3·523\ H_z$

(b) 1·2 கி.கி./செமீ., $f = 1·73\ H_z$]

11·6-23. படம் (11·16)-ல் காட்டியுள்ள அமைப்பில், இரு திருகு சுருள்வில்கள் k என்னும் வில் மாறிலியைப் பெற்றுள்ளன. தனிச் சீரிசை இயக்கத்தின் மீள்வெண்ணைக் காண்க.

$$\left[\text{விடை : } f = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{gk}{W}}\right]$$



படம் 11·16

11·6-24. ஒரு குறிப்பிட்ட நாளன்று, ஒரு துறைமுகத்தில் கடல் ஏற்றம் கொள்ளும்போது, நீரின் ஆழம் 13 மீட்டர். இதற்கு

$7\frac{1}{2}$ மணிக்கு முன்னால் கடல் இறக்கம் கொள்ளும்போது. நீரின் ஆழம் 7 மீட்டர் ஆகும். கடலில் ஏற்றம் பிற்பகல் 4 மணி 30 நிமிடத்திற்கு எதிர்பார்க்கப்படின், 11·5 மீட்டர் ஆழம் தேவைப் படும் ஒரு கப்பலானது துறைமுகத்திற்குள் வரக்கூடிய மிகச் சீக்கிர மான நேரம் யாது? (கடல் நீரின் ஏற்றமும், இறக்கமும் ஒரு சீரிசை இயக்கமாகக் கொள்க.)

[விடை : பிற்பகல் 2 மணி]

11·6-25. ஒரு துறைமுகத்தில், கடல் இறக்கம் கொள்ளும் போது நீரின் ஆழம் 2·4 மீட்டர் ஆகும். கடல் ஏற்றம் கொள்ளும் போது நீரின் ஆழம் 6·6 மீட்டர் ஆகும். ஒரு குறிப்பிட்ட நாளன்று, கடல் இறக்கம் காலை 7 மணி 30 நிமிடத்திற்கும், கடல் ஏற்றம் பிற்பகல் 1 மணி 45 நிமிடத்திற்கும் ஏற்பட்டால், குறைந்த பட்சம் 4·2 மீட்டர் ஆழம் நீர் தேவைப்படும் கப்பலானது துறை முகத்திற்குள் அந்நாளன்று எப்பொழுது வரக்கூடுமெனக் காண்க. (கடல் நீரின் ஏற்றமும், இறக்கமும் ஒரு சீரிசை இயக்கமாகக் கொள்க.)

[விடை : காலை 10 மணி 20 நிமிடம் முதல் மாலை 5 மணி 10 நிமிடம் வரை]

11·6-26. ஒரே திசையில் ஒரே அலைவு நேரத்தைக் கொண்ட இரு தனியிசை இயக்கங்களுள் ஒன்றின் வீச்சு மற்றதைப் போல இரு மடங்காகவும், அதன் கலை (phase) மற்றதைவிட, அலைவு நேரத்தில் கால் பங்கு முன்னதாகவுமிருப்பின் அவற்றின் விளைவு இயக்கமானது ஒரு தனி சீரிசை இயக்கமென்றும், அவ் விளைவு இயக்கத்தின் வீச்சு முன்னதைப்போல $\sqrt{5}$ மடங்குள்ளதாகவும், அதன் கலை முதல் இயக்கத்தின் கலையைவிட, அலைவு நேரத்தில் $\frac{\tan^{-1}(2)}{2\pi}$ பகுதி முன்னதாகவும் இருக்குமென நிறுவுக.

11·6-27. மீட்சிக் குணகம் λ, இயல்பான நீளம் a என்பவற்றைக் கொண்ட ஒரு மீட்சியுறு கம்பியின் ஒரு முனை வழவழப்பான கிடைத்தளமொன்றில், ஒரு நிலையான புள்ளியில் பொருத்தப்பட்டு அதன் மறுமுனை அத்தளத்தில் கிடக்கும் m நிறையுடைய துகளொன்றுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துகள் நிலையான புள்ளியிலிருந்து $2a$ தொலைவுக்கு இழுத்துவிடப்பட்டால், அதன் மொத்த அலைவு நேரம் $2(\pi + 2)\sqrt{\frac{am}{\lambda}}$ எனக் காட்டுக.

11·6-28. 109 செ. மீ. நீளமுள்ள ஒரு ஊசலி, ஓரிடத்தில் 44 விநாடிகளில் 21 அலைவுகள் மேற் கொள்வதாகக் காணப்படுகிறது. அவ்விடத்தில் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் மதிப்பைக் காண்க.

[விடை : 981 செ. மீ /(விநாடி)^2]

11·6-29. ஒரு விநாடி ஊசலியின் நீளம் அதன் ஆயிரத்திலொரு பகுதியாலே நீட்டப்பட்டால், அது ஒரு நாளில் எத்தனை விநாடிகள் இழக்கும் எனக் காண்க [விடை : 43·2 விநாடிகள்]

11·6-30 ஒரு விநாடி ஊசலி ஒரு சுரங்கத்தின் அடியிலே நாளுக்கு 10 விநாடி நேரமிழந்தால், அச் சுரங்கத்தின் ஆழத்தையும், அவ்வூசலி அச்சுரங்கத்தின் ஆழத்தில் பாதி தொலைவிலுள்ள போது அது இழக்கும் விநாடிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க (புவியின் ஆரை = 6356·8 கி.மீ.).

[விடை : 735·74 மீட்டர், 5 விநாடிகள்]

11·6-31. குறையுள்ள ஒரு விநாடி புவியீர்ப்பு முடுக்கம் 981 செ மீ /(விநாடி)^2 என்றுள்ள இடத்தில் நாள் ஒன்றுக்கு 20 விநாடிகள் வீதம் இழக்கின்றது. அது திருத்தமான நேரம் காட்டுவதற்கு வேண்டிய

(i) நீளமாற்றத்தைக் காண்க.

(ii) ஈர்ப்பு முடுக்க மாற்றத்தைக் காண்க.

[விடை : (i) நீளத்தை 0·046 செ.மீ. குறைக்க வேண்டும்.

(ii) ஈர்ப்பு முடுக்கத்தின் மதிப்பு 0·454 செ மீ. அதிகமாக இருக்க வேண்டும்.]

11·6-32. ஓரிடத்திலே நாளுக்கு 10 விநாடிகள் கூடுதலாகக் காட்டுகின்ற விநாடி ஊசலி ஒன்று, மற்றோர் இடத்தில் நாளுக்கு 10 விநாடிகள் இழக்கின்றது. ஈரிடங்களிலும் புவியீர்ப்பால் விளையும் முடுக்கங்களை ஒப்பிடுக.

[விடை : 1·00046 : 1]

11·6-33 ஓரிடத்தில் விநாடிகள் அடிக்கின்ற ஒரு ஊசலி மற்றோர் இடத்திற்கு எடுத்துச் செல்லும் போது, அது நாளுக்கு இரண்டு விநாடிகள் இழக்கின்றது. அவ்விரு இடங்களிலும் புவியீர்ப்பால் விளையும் முடுக்கங்களை ஒப்பிடுக.

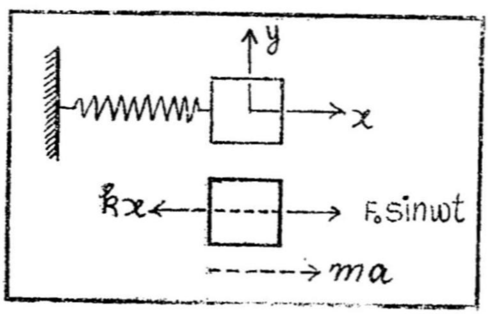
[விடை : $\frac{21600}{21599}$]

11·6-34. விநாடி ஊசலியுடனுள்ள ஒரு கடிகாரம் நாள் ஒன்றுக்கு இரண்டு நிமிடங்கள் கூடுதலாகக் காட்டுகிறது. அது திருத்தமான நேரம் காட்டுவதற்கு அதன் நீளத்தை 0·28 செ.மீ. மிகைப்படுத்த வேண்டுமெனக் காட்டுக.

11·6-35. புவியின் மேற்பரப்பில் விநாடிகள் அடிக்கின்ற ஒரு ஊசலி, ஒரு மலையினுச்சிக்குக் கொண்டுசெல்லப்படும் போது நாளொன்றுக்கு 24 விநாடிகள் வீதம் இழக்கின்றது. புவியின் ஆரை 6356.8 கி.மீ. எனக் கொண்டு, மலையினுயரத்தைக் காண்க. [விடை : 1·7656 கி.மீ.]

11·7. வலிந்து நிகழும் அதிர்வுகள் (Forced vibrations)

நடைமுறை பொறியியல் கணக்குகளில் புறவிசைகள் செயல் படுத்தப்பட்டு அதிர்வுகள் வலுவாக நிகழ்கின்றன. பெரும்பாலும் இவ்விதப் புறவிசைகள் காலவட்ட ஒழுங்குடையனவாகவும், தொடர்ச்சியாகவும் செயலபடும். அவ்விசைகள் ஏற்படுத்தும் இயக்கம் வலிந்து நிகழ்கின்ற இயக்கம் எனப்படும்.



படம் 11 17

படம் (11·17)-ல் காட்டியவாறு, நேர் கோட்டிலமையும் திருகு சுருள் வில் ஒன்றின் kx என்னும் இழுவிசை. $F = F_0 \sin \omega t$ என்னும் காலவட்ட ஒழுங்குடைய புறவிசை ஆகியவற்றின் கீழ் m நிறையுள்ள துகள் இயங்குகிறது. இங்கு ω, F_0 என்பவை, முறையே, புறவிசையின் மீள்வெண் அல்லது அடுக்கம் (frequency) வீச்சு (amplitude) ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன.

x என்பது திருகு சுருள் வில்லின் மீட்சியுரு நிலைப்புள்ளியி லிருந்து, x அச்சின் மிகைத் திசையில், துகளின் தொலைவைக் குறிக்குமெனில், அத் துகளின் இயக்கச் சமன்பாடு,

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \sin \omega t$$

அல்லது, $$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$ என்றாகும்.

இவ்வியக்கச் சமன்பாடு மாறுக்கெழுக்களைக் கொண்ட ஓர் ஓரினமில்லாத இரண்டாம் வரிசை வகைக் கெழுச் சமன்பாடாகும். இச் சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு (complete solution or General solution) இரு பகுதிகளாலானவை. முதற் பகுதியானது, துணைத் தீர்வு (complementary function) எனக் கூறப்படும். வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின் வலதுபுறக் கோவையானது புறக்கணிக்கப் படும்போது, ஓரினமுள்ள வகைக் கெழு சமன்பாடு கிடைக்கும். அச் சமன்பாட்டின் தீர்வே, துணைத் தீர்வாகும். இரண்டாவது பகுதி யானது சிறப்புத் தீர்வு (particular integral) எனப்படும். இத் தீர்வு எடுத்த வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை நிறைவு படுத்தும். எனவே, துணைத் தீர்வு, $x_c = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t$ என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும். இங்கு ω_n என்பது தனிச் சீரிசை இயக்கத்தில் இயல்பான தன்வய அடுக்கம் அல்லது அலைவைக் (natural frequency) குறிக்கிறது. அதன் மதிப்பு $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ஆகும்.

x_p என்னும் சிறப்புத் தீர்வு, பின்வருமாறு கணிக்கபபடும்.

$$x_p = \frac{1}{\left(D^2 + \frac{k}{m}\right)} \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

$$= \frac{F_0}{m} \left[\frac{\sin \omega t}{\frac{k}{m} - \omega t}\right]$$

$$= \frac{F_0}{m} \left[\frac{\sin \omega t}{\omega_n^2 - \omega^2}\right], \quad \omega_n \neq \omega$$

$$= \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega_n^2} \left[\frac{\sin \omega t}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right]$$

$$= \frac{F_0}{m} \times \frac{m}{k} \left[\frac{\sin \omega t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cdot \sin \omega t \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு (complete solution or general solution).

$$x = x_c + x_p$$

$$= A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t + \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cdot \sin \omega t \text{ ஆகும்.}$$

எனவே இயக்கத்தின் விளைவதிர்வு, ஒன்றின்மேல் ஒன்று பொருத்தப்பட்ட இரு அதிர்வுகளின் தொகுபயனாகும். இத் தீர்வின் முதலிரண்டு கோவைகள் தனிச் சீரிசை இயக்கத்தின் தன் வயத் துடிப்பை அல்லது தனி அதிர்வைக் (free vibration) குறிக்கும். அத்தகைய அதிர்வின் அடுக்கம் (frequency), k, m என்பவைகளின் மதிப்புக்களை மட்டுமே சார்ந்துள்ளது. A, B என்னும் தொகையீட்டு மாறிலிகள் (constants of integration) தொடக்கநிலை நிபந்தனைகளால் வரையறுக்கப்படும். தனி அதிர்வு, இயக்கமேற்பட்ட சிறிது நேரத்திற்குப்பின், உராய்வு, காற்று முதலிய தடைவிசைகளால், அழிக்கப்படும். எனவே அத்தகைய தனி அதிர்வு நிலையற்ற அதிர்வு (transient vibration) எனவும் கூறப்படும். முழுத் தீர்வின் மூன்ருவது கோவையை உறுதியான நிலைமையதிர்வு (steady state vibration) என்று கூறுவது வழக்கம். இவ் வுறுதியான அதிர்வு, காலவட்ட நேரத்தைக் கொண்ட புறவிசை, தொடர்ச்சியாகத் துகளின்மேல் செயல்படுவதால், பிறப்பிக்கப்பட்டுள்ளதாகும். இத்தகைய நிலையான அதிர்வின் பெரும மதிப்பு,

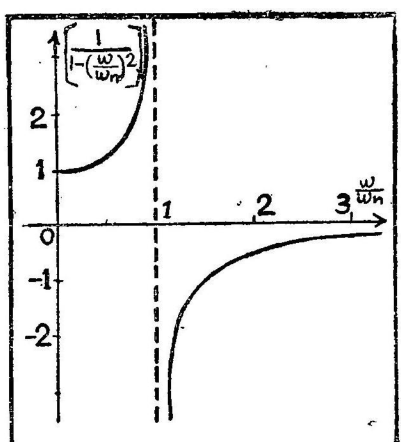
$$(x_p)_{\text{பெருமம்}} = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \text{ ஆகும்.}$$

இதுவே, நிலையான அதிர்வின் வீச்சமாகும்.

ω என்பது புறத்தே செலுத்தப்படும் அலைவு அல்லது அடுக்கமாதலின், அதனைத் தேவைக்கு ஏற்றவாறு மாற்றியமைக்க முடியும். எனவே, ω ஆனது ω_n-ன் மதிப்பை அணுகும்போது, நிலையான அதிர்வின் வீச்சம் முடிவிலி மதிப்பைப் (infinity) பெறும். அதாவது, தன்வய அடுக்கமும், புறவய அடுக்கமும் ஒன்றுபடுவதே (coincide), உடனியக்கத்திற்கு (resonance) உரிய நிபந்தனையாகும். ஆனல், நடைமுறையில், காற்று, உராய்வு என்னும் தடை விசைகளால் புறவய அதிர்வின் வீச்சமும் ஒரு முடிவுள்ள மதிப்பைத்தான் பெறுகிறது. எனினும் உடனியக்கத்திற்கான

நிபந்தனை, புறவய அதிர்வின் பெரியதொரு உள்ளழுக்கத்தோடு (stresses) மிகப் பெரிய வீச்சம் ஏற்படுவதைத் தெரிவிக்கிறது. இத்தகைய பெரிய உடை அழுக்கம் (large breaking stress) பொறி அமைப்புகளில் பேரிழைப்பை விளைவிக்கக் கூடியதாகவும் இருக்கக்கூடும். எனவே, புறவய அடுக்கம், பொறித் தொகுதியின் தன்வய அடுக்கத்தின் மதிப்பை நெருங்காத வண்ணம் எடுக்கப் படும்.

படம் (11·18)-ல் காட்டியுள்ளவாறு, புறவய அடுக்கம் பெரிதாகவுள்ளபோது, புறவய அதிர்வின் வீச்சம் மிகச்சிறியதாக இருப்பதைக் காணலாம். உடனியக்கத்திற்குமுன், புறவய அடுக்கம், தன் வய அடுக்கத்தின் மதிப்பை நெருங்கும் தருணம் வரை, புறவய அதிர்வின் வீச்சு மிகைக்குறியையுடையதாகவும், அதன் பின்பு, புறவய அடுக்கம், தன்வய அடுக்கத்திற்கு மேலான மதிப்பைப் பெறும்போது, அதிர்வின் வீச்சு குறைக்குறியையுடைய தாகவும் இருப்பதையறியலாம்.



படம் 11 18

11·8. தடையுடை தன்வயத்துடிப்பு (Damped free vibration)

தனியிசை இயக்கத்தின் வீச்சம், இயக்கத்திற்கு இடையூறு விளைவிக்கக்கூடிய காப்பற்ற விசைகளான உராய்வு, காற்று முதலியவற்றால் பாதிக்கப்பட்டு, காலம் செல்லச்செல்ல அதன் அளவு சிறிதாக்கப்பட்டு, இறுதியாக அத்தகைய விசைகள் பொறித்தொகுதியை அமைதி நிலையடையும்படிச் செய்யும். இவ்வகையான விசைகளனைத்தும், தடை செய்யும் விசைகளாகும் (damping forces)

தடைவிசையின் அளவைகாண, அநேகவிதிகள் உருவாக்கப்பட்டுள்ளன. ஆனால், அவையாவும் அனுபவ முறையிலேயே காணப்பட்டவையாகும். தொகுதியின் இயக்கத்திற்குத் தடைவிளைவிக்கும் விசைகள், கீழ்காணும் விதிகளை மேற்கொள்ளலாம்.

(i) பிசுக்குள்ளதடை (Viscous damping).

பொருளொன்று, நடுத்தரமான வேகங்களில், பாய்பொருள் (fluid) மூலமாக இயங்கும்போது, அது, தன் இயக்கத்திற்கு ஒரு தடையை அனுபவிக்கிறது. அவ்விதத்தடைவிசை பாய்பொருள் உராய்வுத்தடைவிசை எனப்படும். பாய்பொருள் உராய்வுத் தடைவிசையானது பொருளின் திசைவேகத்திற்கு நேர்விகித சமமாக இருப்பதாகக் காணப்படுகிறது. எனவே, C என்பது விகிதமாறிலியாயின், v என்னும் திசைவேகத்துடனியங்கும் பொருளின்மேல் செயல்படும் பாய்பொருள் உராய்வுத்தடைவிசையானது $F = -CN$ எனக்கொள்ளப்படும்.

உயவிடு மேற்பரப்புக்களில் (lubricated surfaces) ஏற்படும் நழுவியக்கம், குழாய்களில் நீரின் இயக்கம், அதிர்ச்சிகளை உட்கொள்ளும் தொகுதியின் இயக்கம், எண்ணெயில் மிதக்கும் துணைக் கருவிகளின் இயக்கம், காந்த மண்டலத்தில் மின் கருவிகளின் இயக்கம் -- ஆகியவற்றில் தடைவிசை, இயங்கும் பொருளின் திசைவேகத்திற்கு நேர்விகிதத்திலிருப்பதைப் பரிசோதனைகள் வாயிலாக அறியமுடிகிறது.

(ii) கொந்தளிப்புத்தடை (Turbulent damping).

திரவ மொன்றிலியங்கும் பொருளின் திசைவேகம் அதிகமாக இருப்பின், திரவத்தடையானது ஏறத்தாழ திசைவேகத்தின் வர்க்கத்திற்கு நேர்விகிதத்தில் மாறுவதாகக் காணப்படுகிறது. அவ்விதத்தடையானது, கொந்தளிப்புத்தடை எனப்படும். அதை

$$F = -kv^2$$ எனக்கொள்ளலாம்.

(iii) கூலம்பின்தடை (Coulomb damping).

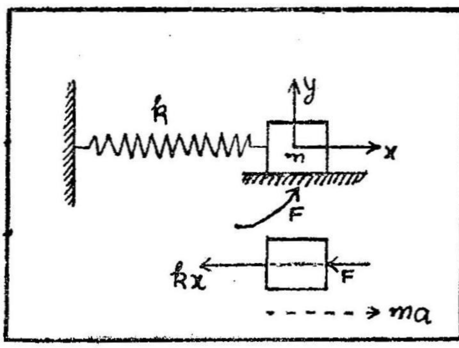
இருபொருள்கள் ஒன்றையொன்று தொடும் பரப்பில் சறுக்கும் போது, இயக்கத்திற்குத் தடையாக உராய்வு விசை செயல்படுகிறது. அத்தகைய தடையானது, வரட்சி உராய்வுத்தடைவிசை அல்லது கூலம்பின் உராய்வு எனப்படும். அதன் மதிப்பு ஏறக்குறைய மாறுததாகும். அது சறுக்கும் பொருள்களின் தன்மையைச் சார்ந்தும், தொடும்புள்ளியில் ஏற்படும் எதிர்த்தாக்க அழுத்தத்தைப் பொருத்தும் வரையறுக்கப்படும்.

μ, N என்பவை, முறையே, உராய்வுக்கெழு எதிர்த்தாக்க விசை ஆகியவற்றைக் குறிக்குமெனில், உராய்வுவிசை, $F = \mu N$ என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

உராய்வுவிசை இயங்கும் பொருள்களின் திசைவேகங்களைச் சார்ந்திருப்பதில்லை.

11·8-1. பிசுக்குள்ள தடையைப் பெற்ற பொருள் ஒன்றின் இயக்கத்தை வரையறுத்தல்.

m நிறையுடைய பொருளொன்று, கிடையாகப் பொருத்தப்பட்ட திருகு சுருள்வில்லின் ஒரு முனையில் கட்டப்பட்டு, பிசுபிசுப்புள்ள பாய்பொருள் தடவிய மழமழப்பான கிடைத்தளத்தில், படம் (11·19)-ல் காட்டியவாறு இயங்கட்டும்.



படம் 11·19

இங்கு உராய்வுத் தடை

$$F = -c\frac{dx}{dt} \text{ ஆகும்.}$$

t என்னும் ஏதேனுமொரு நேரத்தில், பொருளின் இயக்கச் சமன்பாடு,

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

அதாவது $$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இவ்வியக்கச் சமன்பாடு, மாருக் குணகங்களைக் கொண்ட ஒரு சமபடித்தான இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும். இச் சமன்பாட்டை வகையீட்டுச் செயலியின் (differential operat r) வாயிலாக,

$$\left(D^2 + \frac{c}{m}D + \frac{k}{m}\right)x = 0 \text{ எனவும், எழுதலாம்.}$$

இங்கு $D \equiv \frac{d}{dt}$ ஆகும். எனவே துணைச் சமன்பாடு (auxiliary equation),

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இதன் தீர்வுகள்,

$$s = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - \frac{4k}{m}}}{2},$$

$$= -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}.$$

முறையே,

$$s_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$s_2 = \frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{\rho}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டிற்கான, முழுத் தீர்வு, $x = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$ எனக் கொள்ளப்படும். இங்கு A, B என்னும் தொகையீட்டு மாறிலிகள், தொடக்க அல்லது எல்லை நிபந்தனைகளின் வாயிலாகத் தீர்மானிக்கப்படும். காரணிகளின் வர்க்க மூலத்திலுள்ள, $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}$ என்னும் சார்பலன், தன்மை காட்டி (discriminant) எனக் கூறப்படும். இத்தன்மை காட்டியில், c என்பது ஒரு தெரியாக் கணியமாகும். தன்மை காட்டியின் மதிப்பு பூச்சியமாகும் போது, c-ன் மதிப்பு, நடுநிலைத் தடை அளவின் குணகம் (critical damping coefficient) எனப்படும். அது c_c எனப் பொதுவாகக் குறிக்கப்படும்.

எனவே,

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0,$$

அதாவது, $c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\,\omega_n$ ஆகும்.

இங்கு ω_n என்பது தன் வய அதிர்வுக்குரிய அடுக்கமாகும்.

c என்னும் தடைக் குணகம் ஏற்கும் மூன்று வகையான மதிப்புகளைச் சார்ந்து, தடை அமைப்புகள் கீழ்க்காணுமாறு விவரிக்கப்படும்.

வகை 1 : பெரும் தடை (over or heavy damping) $c > c_c$ என்றுள்ளபோது, உராய்வுத் தடை அளவுக்கு மீறிய பெரும் தடையாகக் கருதப்படும். அப்போது,

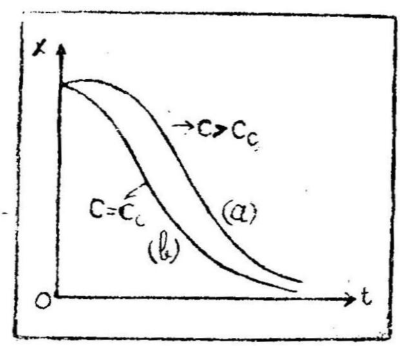
$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0 \text{ ஆகும்.}$$

மேலும், $\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} < \frac{c}{2m}$ என்பதால்,

$$-\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} < 0 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, s_1, s_2 என்பவைகள் குறைக்குறியுடையனவாகும். ஆகவே t-யின் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது,

$x = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$ என்பதன் மதிப்பு குறைந்துகொண்டு வரும். இதை படம் (11·20)-ல் காட்டியுள்ள (a)-என்னும் பாதை விளக்குகிறது. இது ஒரு சீரிசை இயக்கமன்று.



படம் 11·20

வகை 2 : நடுநிலைத்தடை (Critical damping).

$C = C_c$ என்றுகும்போது, உராய்வுத்தடை நடுநிலைத்தடையாகக் கருதப்படும். அப்போது,

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $s_1 = s_2 = -\frac{c}{2m}$ என்றுவதால், முழுத் தீர்வு

$x = (A + Bt)\, e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}$ என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்

கப்படும். இதுவும் ஒரு சீரிசை இயக்கமன்று. t-யின் மதிப்பு அதிகரிக்க, அதிகரிக்க, x-ன் மதிப்பு குறைந்து கொண்டே சென்று, இறுதியாக, t ஆனது முடிவிலியாகும் போது, x-ன் மதிப்பு படம் 11-20-ல் (b) என்னும் பாதை அமைப்பில் காட்டியவாறு பூச்சியத்தை அணுகும்.

வகை 3 : இலேசான தடை (Leght dempts)

$c < c_c$ என்றுகும்போது, உராய்வுத் தடை இலேசானதாகக் கருதப்படும். அப்போது,

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, தன்மை காட்டி குறைக் குறியை யுடையதாகும்.

$$\text{எனவே,} \quad s = -\left(\frac{c}{2m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$= -\left(\frac{c}{2m}\right) \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

$$= -\left(\frac{c}{2m}\right) \pm iq \text{ ஆகும்.}$$

எனவே முழுத் தீர்வு,

$$x = e^{-\frac{c}{2m}t}\,(A \sin qt + B \cos qt)$$ என்னும் சமன்பாட்

டால் வரையறுக்கப்படும்.

$$\text{இங்கு,} \quad q = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m}}\left\{1 - \frac{c}{c_c}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \text{ ஆகும்.}$$

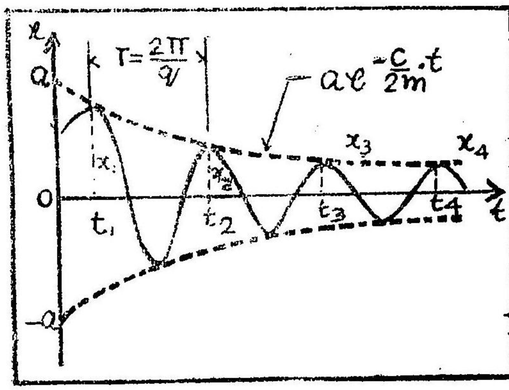
$\frac{c}{c}$ என்னும் விகிதம், தடைப் பகுப்பு (damping factor) எனக் கூறப்படும்

மேலும் முழுத் தீர்வை,

$$x = ae^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} \sin(qt + \phi),$$

$$a = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$\tan\phi = \frac{A}{B}$ என்றும் எழுதலாம்.



படம் 112.1

மேற் கூறிய சமன்பாடு வரையறுக்கும் இயக்கப்பாதையானது, படம் (11-21)-ல் காட்டியவாறு, நேரம் செல்லச் செல்ல, குறைவான வீச்சத்தைப் பெற்ற அதிர்வியக்கமாகும்.

11-9. தடையுடன் வலிந்து நிகழ்கின்ற துடிப்பு (Damped forced vibration).

$F_1 = -c\frac{dx}{dt}$, $F_2 = F_0 \sin\omega t$ என்பவை, முறையே, சீரிசை இயக்கத்தைப்பெற்ற துகளொன்றில் செயற்படும் உராய்வுத் தடை விசை காலவட்ட ஒழுங்குடைய புறவிசை ஆகியவற்றைக் குறிப்பதாகில், துகளின் இயக்கச்சமன்பாடு,

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + \left(\frac{F_0}{m}\right)\sin\omega t,$$

அதாவது, $\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x}\;\frac{kx}{m} = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$ ஆகும்.

இச்சமன்பாட்டை

$$\left(D^2 + \frac{c}{m}D + \frac{k}{m}\right)x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t, \quad D \equiv \frac{d}{dt}$$

எனவும் எழுதலாம்.

எனவே, துணைச்சமன்பாடு,

$$s^2 + \frac{c}{m} s + \frac{k}{m} = 0$$ ஆகும். இதன் மூலங்கள்,

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$ ஆகும்.

எனவே, துணைத்தீர்வு (Complementary function)

$$x_c = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$ ஆகும்.

மேலும், வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிற்கான, சிறப்புத்தீர்வு,

$$x_p = \frac{1}{D^2 + \frac{c}{m} D + \frac{k}{m}} \cdot \frac{F_0}{m} \cdot \sin \omega t$$

$$= \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) + \frac{c}{m} D} \sin \omega t$$

$$= \frac{F_0}{m} \cdot m \cdot \frac{1}{(k - m\omega^2) + CD} \cdot \sin \omega t$$

$$= \frac{F_0}{\{(k - m\omega^2)^2 + C^2\omega^2\}} \{(k - m\omega^2) \sin \omega t - c\omega \cos \omega t\}$$

$$= \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \left\{ \frac{(k - m\omega^2) \times \sin \omega t}{\sqrt{(k - m\omega)^2 + (c\omega^2)}} - \frac{c\omega \times \cos \omega t}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \right\}$$

$$x_p = a \sin (\omega t - \phi)$$ ஆகும்.

இங்கு $$a = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega^2)^2}}$$

$$\tan \phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}.$$

எனவே, வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு,

$$x = x_c + x_p$$

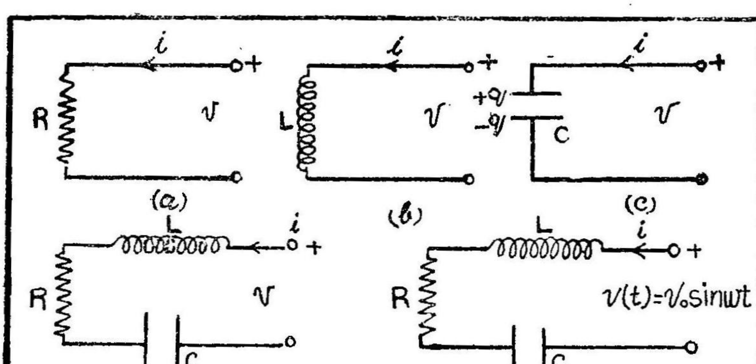
$$= Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + a \sin (\omega t - \phi)$$ ஆகும்.

11-10. மின்வலிசார்ந்த ஒப்புமைகள் (Electrical analogies)

பொறித்துறை அதிர்வுகளுக்கான அமைப்புகளை அதற்குச் சரிநிகரான மின்வலிசார்ந்த அதிர்வுகளின் மின் ஓட்ட மண்டலங்களின் வாயிலாகத் தெளிவுற விளக்க முடியும். பொறிமுறையான அதிர்வு அமைப்புகளைக்காட்டிலும், மின்வலிசார்ந்த அதிர்வு அமைப்புகள் பரிசோதனைக்கு வசதியாக உள்ளதால், மின்வலிசார்ந்த அதிர்வுகளின் விளைவுகளைப் பயன்படுத்தி, பொறிமுறைசார்ந்த அதிர்வுகளுக்குப் பொருத்தமான தீர்வுகளை வரையறுப்பது முறையாகும்.

பொறிமுறை சார்ந்த அதிர்வு அமைப்பு, மின்வலிசார்ந்த அதிர்வு அமைப்பு ஆகியவற்றின வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் கணக்கியலாக ஒப்புமை உடையனவெனில், அவ் வமைப்புகள் ஒன்று மற்றதன் உவமையாகக் கொள்ளப்படும்.

மின்வலிசார்ந்த மின் ஓட்ட மண்டலங்கள் L என்னும் ஊட்டம் (Inductance), R என்னும் மின் தகவு (Resistance), C என்னும் கொள்திறன் (Capacitance) ஆகிய மூன்று மூலக்கூறுகளால் உருவாக்கப்படும். i என்பது மின்னோட்டத்தைக் (current) குறிக்கும்.



படம் 11 22

மின் ஓட்ட மண்டலம் ஒன்றில், ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் மின்னோட்டமானது, அப் புள்ளியில் அத் திசையிலேயே ஏற்படும் நேர்மின் தாக்களவை (q)-வின் (positive charge) வீதமாகும். அதாவது, $i = \frac{dq}{dt}$ ஆகும். எல்லை

யாயுள்ள இரு முனைகளில் பயன்படுத்தப்படும் மின் மூல அளவை யால் (voltage) மண்டலத்தில் (circuit) மின்னோட்டம் ஏற்படு கிறது.

மின் ஓட்ட மண்டல அமைப்பு ஒவ்வொன்றையும் உருவாக்கு வதில் பயன்படுத்தப்படும் மூலக்கூறுகள் படம் (11·22)-ல் காட் டப்பட்டுள்ளன.

(1) மின் தகவு தடையுள்ள மண்டலத்தில் ஏற்படும் மின்மூல அளவையின் வீழ்ச்சி (voltage drop), $v = Ri$ என்னும் சமன் பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

(a) $Ri = v$; (b) $L \frac{di}{dt}$;

(c) $\frac{q}{c}$; (d) $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{c} = v$;

(e) $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{c} = v(t)$

(2) மின் ஊட்டமுள்ள மண்டலத்தில் ஏற்படும் மின் மூல அளவையின் வீழ்ச்சி,

$v = L \frac{di}{dt}$ என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

(3) மின் கொள் திறனுடைய மண்டலத்தில் ஏற்படும் மின் மூல அளவையின் வீழ்ச்சி,

$v = \frac{q}{c}$ என்னும் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படும்.

$i = \frac{dq}{dt}$ என்பதால்,

$q = \int i\, dt$ எனவும்

$v = \frac{q}{c} = \frac{1}{c} \int i\, dt$ எனவும் எழுதலாம்.

கிர்சாப்பின் விதிகள் (Kirchhoff's laws)

(1) கிர்சாப்பின் மின்மூல அளவைக்கான விதி (Kirchhoff's voltage law)

எவ்விதப் பின்னலமைப்பையுடைய (in any network) மூடிய தோர் மின் ஓட்ட மண்டலத்தைச் சுற்றி அமையும் மின் மூல அளவைகளின் குறியியற் கூடுதல் பூச்சியமாகும்.

(2) கிர்சாப்பின் மின்னோட்டத்திற்கான விதி (Kirchhoff's current law)

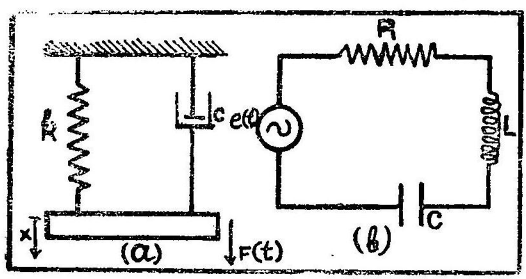
ஏதேனுமொரு மின் ஓட்ட மண்டலத்தில் ஏதேனுமொரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழியே செல்லும் மின்னோட்டங்களின் குறியியற் கூடுதல் பூச்சியத்திற்குச் சமமாகும்.

இவ்விதிகளை யொட்டி, பொறி முறைகளுக்கும் பொருத்தமான இரு மின் வலி அமைப்புகள் உள. அவையாவன :

(1) 'மின் மூல அளவை — விசை' அல்லது 'நிறை — மின்னூட்ட' ஒப்புமை.

(2) 'மின்னோட்ட — விசை' அல்லது 'நிறை — மின் கொள்திறன்' ஒப்புமை.

மின் மூல அளவை — விசை உவமையானது, பின்வருமாறு :



படம் 11·23

படம் [11·23 (a)]-யில் பொறித்துறை அதிர்வுகளுக்கான அமைப்பும், படம் [11·23 (b)]-யில் மின்வலி சார்ந்த அதிர்வு களுக்கான அமைப்பும் காட்டப்பட்டுள்ளன. இவ்விரு அமைப்பு களுக்குப் பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் முறையே,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t), \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{c} = e(t)$$

அல்லது $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{c} = e(t)$ ஆகும். ... (2)

(1)-வது சமன்பாடு பொறி அமைப்பில் தடையுடன் வலிந்து நிகழ்கின்ற துடிப்பையும், (2)-வது சமன்பாடு மின்வலி சார்ந்த மண்டல அமைப்பில் மின்னோட்டத்தின் துடிப்பையும் வரையறுக் கின்றன.

பொறி, மின்வலி சார்ந்த அமைப்புகளின் சிறப்பியல்பு இணைப்பொருத்தங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

பொறி அமைப்பு	மின்வலி சார்ந்த மின் மூல அளவை — விசை அமைப்பு
விசை பயன்படுத்தப்படும்	மின்னோட்டம் தடுக்கப்படும்
m — நிறை	L — மின்னூட்டம் (ஹென்றி)
c — பிசுபிசுப்புக்குள்ள தடை விகிதமாறிலி	R — மின்தகவு (ஓம்)
k — வில் மாறிலி	$\frac{1}{C}$ மின்கொள்திறனின் தலைகீழ் மதிப்பு (1/பாரட்)
x — இடப்பெயர்ச்சி	q — நேர்மின் தாக்கம் (கூலம்பு)
v — திசைவேகம்	i — கண்ணியிலமையும் மின்னோட்டம்
F— பயன்படுத்தப்பட்ட விசை	e — மின் மூல அளவை (வோல்டு)

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்
(BIBLIOGRAPHY)

(Books consulted by the author while preparing his book on **ENGINEERING MECHANICS** In Tamil)

1. ARCHIE HIGDON & WILLIAM, B. STILES, 'Engineering Mechanics — Vector Edition, Volume II — Dynamics'. Prentice Hall Inc. Engle wood cliffs, N.J., U.S.A.

2. BEER, F. P. & JOHNSTON, JR., E. R., 'Vector Mechanics for Engineers', McGraw Hill Book Company, New York, 1962.

3. DAN EDWIN CHRISTIE, 'Vector Mechanics' McGraw Hill Book Company, N. Y., Second Edition, 1964.

4. HARRY, R. NARA (Edited by), 'Vector Mechanics for Engineers, Part II—Dynamics', John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.

5. IRVING H. SHAMES, 'Engineering Mechanics — Statics & Dynamics', Prentice Hall of India (Pvt.) Ltd., New Delhi, 1963.

6. LANGHAAR, H. L., & BORESI, A. P., 'Engineering Mechanics,' McGraw Hill Book Company, N. Y., 1959.

7. MCLEAN, W. G., & NELSON, E. W. 'Theory and Problems of Engineering Mechanics', Schaum Publishing Co., N. Y.

8. THADANI, B. N., 'Engineering Mechanics', Asia Publishing House, Bombay, 1966.

9. TIMOSHENKO, S., & YOUNG, D. H. 'Engineering Mechanics,' McGraw Hill Book Company, N. Y., 1956.

கலைச் சொற்கள்

A

Acceleration	— முடுக்கம், வேகவளர்ச்சித் தகவு
Acceleration, angular	— கோண முடுக்கம்
Acceleration, Cartesian Components of	— தெக்காட்டின் முடுக்கப் பகிர்வுகள்
Acceleration, tangential and normal components of	— தொடுவரை, செங்குத்துக் கோடு முடுக்கப் பகிர்வுகள்
Acceleration, radial and transverse components of	— ஆரை, குறுக்கு முடுக்கப் பகிர்வுகள்
Acceleration due to gravity	— ஈர்ப்பு முடுக்கம்
Aggregate of particles	— துகட்டொகுதி
Amplitude	— வீச்சம்
Angle	— கோணம்
Angular momentum	— சுழல் உந்தம்
Angular velocity	— சுழல் திசைவேகம்
Areal velocity	— பரப்பளவு திசைவேகம்
Axioms	— மெய்ம்மைகள்

B

Bob	— ஊசல் குண்டு
Body	— பொருள்
Body, rigid	— கட்டிறுக்கப் பொருள்
Body, elastic	— மீள்சக்திப் பொருள்
Boundary Conditions	— எல்லை நிபந்தனைகள்

C

Calculus	— நுண்கணிதம்
Calculus, differential	— வகை நுண்கணிதம்
Centre	— மையம்
Centre of Curvature	— வளைவு மையம்
Cartesian Coordinates	— தெக்காட்டின் ஆயக் கூறுகள்
Central axis	— மைய அச்சு
Central Conics	— மையக் கூம்பு வளைவுகள்
Central force	— மைய விசை

Centre of gravity — புவிஈர்ப்பு மையம்
Central impact — மைய மோதுகை
Centre of mass — திணிவு மையம்
Centre of oscillation — அலைவு மையம்
Centrifugal force — மையவிட்டோடும் விசை
Centripetal force — மையநோக்கு விசை
Centroid — திணிவு மையம்
Coefficient — குணகம்
Coefficient of damping — குணகத் தடை
Coefficient, differential — வகைக் கெழு
Coefficient, successive differential — அடுத்தடுத்த வகைக் கெழு
Coefficient of friction — உராய்வுக் கெழு
Coefficient of restitution — மீட்சிக் குணகம்
Coefficient of elasticity — மீட்சிக் கெழு
Coincide — ஒன்றுபடு, பொருத்து, ஒரே இடத்தில் இணை
Collision — மோதுகை
Collision of elastic bodies — மீள்சக்திப் பொருள்களின் மோதுகை
Complementary function — துணைத்தீர்வு
Complete integral — முழுத்தீர்வு
Component — கூறு, பிரிவு
Components of acceleration — முடுக்கக் கூறுகள்
Components of a force — விசைக் கூறுகள், விசைப் பகிர்வுகள்
Components of a vector — திசையிப் பகிர்வுகள்
Compression — இறுக்கம், நெருக்கம்
Conclusion — முடிவு
Concurrent forces — ஒரு முனை விசைகள்
Conditions — நிபந்தனைகள்
Conditions, necessary and sufficient — வேண்டிய, போதிய நிபந்தனைகள்
Cone — கூம்பு
Cone, Hollow — உள்ளீடில் கூர்பு
Cone, right circular — நேர்வட்டக் கூம்பு
Cone, solid — திண்மக் கூர்பு
Configuration — உருவ அமைப்பு
Conics — பொதுக்குவியக் கூம்பு வளைவுகள்

Conservation of energy — ஆற்றல் காப்பு, ஆற்றல் அழிவின்மை
Conservation of momentum — உந்தக்காப்பு
Conservative force — காப்புவிசை
Conservative force field — காப்புவிசைக்களம்
Constant — மாறாத, மாறிலி
Constant of gravitation — ஈர்ப்பு மாறிலி
Constant of integration — தொகையீட்டு மாறிலி
Contact — தொடுகை
Coordinates — கூறுகள், அச்சுத் தொலைவுகள்
Coordinates, Cartesian — தெக்கார்ட்டின் கூறுகள்
Coordinates, Cylindrical — உருளைக் கூறுகள்
Coordinates, polar — கோண தூரக் கூறுகள்
Coplanar forces — ஒருதள விசைகள்
Couple — சுழலிணை
Curl of a vector — திசையியின் சுழல்
Curvature — வளைவு
Curvature, Centre of — வளைவுமையம்
Curvature, radius of — வளைவாரை, வளை ஆரம்
Curve — வளைகோடு, வளைவாரை
Curved surface — வளைபரப்பு
Coulomb's friction — கூலம்பின் உராய்வு
Curvilinear — வளைகோட்டிற்குரிய
Cylinder — உருளை
Cylinder, right circular — நேர்வட்ட உருளை
Cylindrical Coordinates — உருளைக்கூறுகள்

D

D'Alembert's principle — தலம்பாட்டின் தத்துவம்
Damping coefficient — குணகத் தடை
Damping viscous — பிசுபிசுப்புக்குள்ள தடை
Degrees of freedom, number — கட்டின்மையின் எண்ணிக்கை
Density — அடர்த்தி
Derivative — வகைக்கெழு
Differential calculus — வகைநுண்கணிதம்
Differential coefficient — வகையீட்டுக்குணகம்
Differential equation — வகைக்கெழுச் சமன்பாடு
Differential operator — வகையீட்டுச் செயலி
Differentiate — வகையீடுகாண்

Differentiate, y with respect to x — y-யின், x-ஐக்குறித்து வகையிடுக
Dimension — பரிமாணம்
Direct — நேரான
Direct impact — நேரான அல்லது நேரடி மோதுகை
Direct central impact — நேரடி மைய மோதுகை
Direction cosines — திசைக்கிடக்கைகள்
Discrete variable — தனித்த மாறி
Displacement — இடப்பெயர்ச்சி
Dot product — புள்ளிப்பெருக்கி
Dynamical equation — இயக்க விசையியற் சமன்பாடு
Dynamics — இயக்கவிசைஇயல்

E

Elastic — மீள்சக்தியுடைய
Elastic constant — மீள்சக்தி மாறிலி
Elastic string — மீள்சக்தி இழை
Elastic spring — மீள்சக்தியுடைய திருகுச் சுருள்வில்
Elastic impact — மீள்சக்தி மோதுகை
Energy — ஆற்றல்
Energy, kinetic — இயக்க ஆற்றல்
Energy, potential — நிலை ஆற்றல்
Ellipse — நீள் வட்டம், நீள் வளையம்
Ellipsoid — கன நீள் வட்டம், கன நீள் வளையம்
Elliptic orbit — நீள் வளையப்பாதை
Equation of motion — இயக்கச்சமன்பாடு
Equation, differential — வகைக்கெழுச் சமன்பாடு
Equivalence — சரிநிகரான
External forces — புறவிசைகள், வெளிவிசைகள்

F

Fields — களங்கள்
Fluid — பாய்பொருள்
Focus — குவியம்
Force — விசை
Force, centrifugal — மைய விட்டோடு விசை

Force, centripetal — மைய நோக்கிய விசை
Force, components of a — விசையின் பிரிவுகள் அல்லது பகிர்வுகள்
Force, gravitational unity of a — ஈர்ப்புவிசை அலகுகள்
Force of friction — உராய்வுவிசை
Force of compression — நெருக்க விசை
Force of restitution — நிலைமீள்தல் விசை
Force, impulsive — கணத்தாக்குவிசை
Forces, parallelogram law of — விசைகளின் இணைகரவிதி
Forces, system of — விசைத்தொகுதி
Forced vibration — வலிந்து நிகழும் அதிர்வு
Frame of reference — குறிப்பிட்டச்சு
Frequency — அலைவு அடுக்கம்
Frequency, natural — தன்னகத் துடிப்பு, தன்னக அதிர்வு
Friction — உராய்வு
Friction, coefficient — உராய்வுக்கெழு
Function — சார்பலன்

G

Generating — பிறப்பிக்கின்ற, உருவாக்குகிற
Generating line — பிறப்பிக்கும் கோடு, உருவாக்கும் கோடு
Gradient — சாய்வு விகிதம், சரிவு
Gravitational force — ஈர்ப்புவிசை
Gravitation, Newton's law of — நியூட்டனின் ஈர்ப்பு விதி
Gravitational constant — ஈர்ப்பு மாறிலி
Gravitational field — ஈர்ப்புக்களம்
Gravity — புவியீர்ப்பு
Gravity, acceleration due to — புவியீர்ப்பு முடுக்கம்
Gravity, centre of — புவியீர்ப்பு மையம்
Gyration, radius of — சுழியாரை

H

Harmonic Motion, Simple — தனியிசை இயக்கம், சாமானிய சீரிசை இயக்கம், தனிச்சீரிசை இயக்கம்
Homogeneous — சமபடித்தான, ஓரினமான, ஒரு படித்தான
Hock's law — ஹூக்கின் விதி
Horizontal — கிடை

Horse power	—	பரித்திறன்
Hyperbola	—	அதிபரவளைவு

I

Ideal	—	விழுமிய
Identical	—	முழுதும் ஒத்த, சர்வசமம்
Ideal spring	—	விழுமிய திருகு சுருள்வில்
Impact	—	மோதுகை
Impact central	—	மைய மோதுகை
Impact, direct central	—	நேரடி மையமோதுகை
Impact, elastic	—	மீள்சக்தி மோதுகை
Impact, oblique	—	சரிவு மோதுகை
Impressed forces	—	பொருத்தப்பட்ட விசைகள்
Impulse	—	தாக்களவை
Impulse of a force	—	ஒரு விசையின் கணத்தாக்கு
Impulsive force	—	கணத்தாக்குவிசை
Inclined plane	—	சாய்தளம்
Indefinite integral	—	வரையருத் தொகையீடு
Inelastic	—	மீள்சக்தியின்றிய
Inertia	—	நிலைமம், சடத்துவம்
Inertia force	—	சடத்துவவிசை
Inertia, Moment of	—	நிலைமத்திருப்புதிறன்
Inertial frame	—	சடத்துவ அமைப்பு
Infinity	—	முடிவிலி
Initial line	—	தொடக்கக்கோடு
Initial velocity	—	தொடக்கத்திசைவேகம்
Instant	—	கணம்
Integral	—	தொகை
Integral calculus	—	தொகைநுண்கணிதம்
Integral, definite	—	வரையறுத்த தொகை
Integral, indefinite	—	வரையருத்தொகை
Integration	—	தொகையிடல், தொகை காணல்
Internal forces	—	உள் விசைகள்

K

Kepler's laws	—	கெப்ளரின் விதிகள்
Kinematics	—	இயக்க இயல்

Kinetics	—	இயக்க விசையியல்
Kinetic energy	—	இயக்க ஆற்றல்

L

Law of gravitation	—	ஈர்ப்பு விதி
Laws of motion	—	இயக்க விதிகள்
Line of impact	—	மோதுகைக்கோடு
Line of centres	—	மையப் பிணைக்கோடு
Linear acceleration	—	நேர்கோட்டு முடுக்கம்
Linear velocity	—	நேர்கோட்டுத் திசைவேகம்
Linear Momentum Conservation of	—	நேர்கோட்டு உந்தக்காப்பு

M

Major axis	—	பேரச்சு
Mass	—	நிறை
Mass centre	—	திணிவுமையம்
Maximum	—	பெருமம்
Mechanics	—	நிலை இயக்கவியல்
Minimum	—	சிறுமம்
Minor axis	—	குட்டச்சு, சிற்றச்சு
Moment	—	திருப்புதிறன்
Moment of a couple	—	சுழலிணைப்புதிறன்
Moment of a force	—	விசையொன்றின் திருப்புதிறன்
Moment of inertia	—	நிலைமத்திருப்புதிறன்
Moment of Momentum of a particle	—	துகளொன்றின் உந்தத் திருப்பம்
Momental ellipse	—	திருப்புதிறனின் நீள்வளையம்
Momentum	—	உந்தம்
Momentum, angular	—	சுழல் உந்தம்
Momentum, conservation of	—	உந்தக்காப்பு
Motion	—	இயக்கம்
Motion, curvilinear	—	வளைகோட்டியக்கம்
Motion, under gravity	—	புவியீர்ப்பின்கீழ் இயக்கம்
Motion, central force	—	மையவிசை இயக்கம்
Motion, Harmonic	—	இசை இயக்கம்
Motion, rectilinear	—	நேர்கோட்டியக்கம்
Motion, Newton's laws of	—	நியூட்டனின் இயக்க விதிகள்
Motion, periodic	—	காலவட்ட அல்லது ஆவர்த்தன இயக்கம்

Motion, relative — சாரியக்கம்
Motion, rotational — சுழற்சி இயக்கம்
Motion, translational — பெயர்ச்சியியக்கம்

N

Natural frequency — தன்னகத் துடிப்பு, தன்னக அதிர்வு
Newton's laws of Motion — நியூட்டனின் இயக்க விதிகள்
Nullvector — பூச்சியத்திசையி

O

Object — பொருள்
Oblique — சரிவான
Oblique impact — சாய்வு மோதுகை
Orbit — ஒழுக்கு
Orbit, control — மைய ஒழுக்கு, மைய விசை பாதை
Oscillation — அலைவு, அதிர்வு, துடிப்பு
Oscillation, centre of — அலைவு மையம்
Oscillation, damped — தடையுடை அதிர்வு
Oscillation, forced — வலிந்து நிகழ்கின்ற அதிர்வு
Oscillatory, motion — அலைவியக்கம்

P

Parabola — பரவளைவு
Parallel, axis theorem — இணை அச்சுத்தேற்றம்
Parallelopiped — இணைகரத்திண்மம்
Parallelopiped, rectangular — செவ்வகத்திண்மம்
Particular integral — சிறப்புத்தீர்வு
Pendulum — ஊசலி
Pendulum, simple — தனி ஊசலி
Perfectly, elastic — நிறைமீள் சக்தியுடைய
Period — காலம், காலவட்டம்
Period of oscillation — அலைவுநேரம்
Period of compression — நெருக்களவுக்காலம்
Period of restitution — மீளளவுக்காலம்
Period of rotation — சுழற்சிக்காலம்
Period of simple harmonic motion — தனியிசை இயக்கத்திற்குரிய காலம்
Periodic — காலவட்ட ஒழுங்குடைய
Periodic motion — காலவட்ட இயக்கம்

Periodic time — காலவட்டநேரம், ஆவர்த்தன நேரம்
Perpendicular axis theorem — செங்குத்துத் தேற்றம்
Phase — கலை
Planet — கோள்
Planetary Motion — கோளியக்கம்
Position Vector — நிலைத்திசையி
Power — திறன்
Principal axis — தலையாய அச்சு
Principle — தத்துவம்
Principle of Angular Momentum — கோண உந்தத் தத்துவம்
Principle of Conservation of energy — ஆற்றல் காப்புத் தத்துவம்
Principle of Conservation of Momentum — உந்தக் காப்புத் தத்துவம்
Principle of transmissibility of a force — விசை ஊடுகடத்தற் கோட்பாடு
Product of inertia — சடத்துவப்பெருக்கம்
Projectile — எறிபொருள்
Projectile, range of a — எறிபொருளின் வீச்சு
Pulley — கப்பி

Q

Quantity — கணியம்
Quantity, known — தெரிந்த கணியம்
Quantity, unknown — தெரியாக் கணியம்

R

Radial acceleration — ஆரை முடுக்கம்
Radial velocity — ஆரைத்திசைவேகம்
Radian — ஆரையன்
Radius — ஆரை, ஆரம்
Radius of curvature — வளைவாரை, வளையாரம்
Radius of gyration — சுழியாரை
Radius vector — ஆரைத்திசையி
Rate of Change of Momentum — உந்தமாறுவீதம்
Rebound — எதிர்துள்ளல், எதிரெழுச்சி, தெறித்தல்

Recoil of gun — துப்பாக்கியின் பின்னடிப்பு வேகம்

Rectangular Components of a Vector — திசையிக் குத்துப் பிரிவுகள்

Rectangular Hyperbola — செவ்வக அதிபரவளைவு

Rectilinear Motion — நேர்கோட்டியக்கம்

Relation — தொடர்பு, உறவு

Relative angular velocity — சார்கோணத் திசைவேகம்

Relative acceleration — சார்முடுக்கம்

Relative displacement — சாரிடப்பெயர்ச்சி

Relative motion — சாரியக்கம்

Resistance — தடை

Restitution — நிலைமீள்தல்

Resultant — விளைவு, தொகுபயன்

Retardation — எதிர் முடுக்கம்

Righthanded screw — வலப்புறத் திருகுச்சுருளாணி

Rigid body — கட்டிறுக்கப்பொருள்

Rough — உராய்வுடைய, மழமழப்பற்ற

S

Scalar — எண்ணி, திசையிலி

Scalar quantity — எண்கணியம்

Scalar product — எண்ணிப்பெருக்கி

Simple Harmonic Motion — தனியிசை இயக்கம்

Simple pendulum — தனி ஊசலி

Sine — நெடுக்கை

Smooth — மழமழப்பான, வழவழப்பான

Solid — திடப்பொருள்

Speed — வேகம்

Speed, average — சராசரிவேகம்

Speed, relative — சார்புவேகம்

Spiral — சுருளி

Spring — திருகுச்சுருள்வில்

Statics — நிலையியல்

Stress — தகைவு, உள்ளமுக்கம்

Stress, breaking — உடை அமுக்கம்

Structure — அமைப்பு

Surface — மேற்பரப்பு

Sujace, curved — வளைபரப்பு

Symbol — குறியீடு

Symmetrical	—	ஓரேசீரான, சமச்சீருள்ள
System	—	தொகுதி, முறை, திட்டம்

T

Tangent	—	கோணகணிதத்தகவு
Tangent (geometrical)	—	தொடுகோடு
Tangential acceleration	—	தொடுவரை முடுக்கம்
Tangential velocity	—	தொடுகோட்டுத் திசைவேகம்
Tension	—	இழுவிசை
Terminal velocity	—	நோக்குவேகம்
Trajectory	—	எறிபொருள்பாதை
Transverse acceleration	—	குறுக்குமுடுக்கம்

U

Units	—	அளவைகள்
Unit vector	—	ஓரலகுத்திசையி
Units, fundamental	—	அடிப்படை அலகுகள்
Units, absolute	—	சார்பிலா அலகுகள்
Units, gravitational	—	புவியீர்ப்பு சார்ந்த அலகுகள்

V

Vector	—	திசையி
Vector calculus	—	திசையி நுண்கணிதம்
Vector, position	—	நிலைத்திசையி
Velocity	—	திசைவேகம்
Vertex	—	உச்சி
Vibrations	—	அதிர்வுகள், துடிப்புகள்
Vibration, amplitude of	—	அதிர்வின் வீச்சம்
Vibration, forced	—	வலிந்து நிகழ்கின்ற அதிர்வு
Vibration, damped	—	தடையுடையதிர்வு
Vibration, free	—	தடையிலா அதிர்வு, இயல்பான அதிர்வு
Vibration, period of	—	அதிர்வு நேரம்
Volume	—	பருமன்

W

Weight	—	எடை
Work	—	வேலை
